

В.П.吉米多维奇

数学分析

习题全解

1

原题译自俄文第13版

最新校本

南京大学数学系
廖良文 许宁 编著

分析引论

APG

安徽人民出版社



经典名著最新版本
全书增补数百新题
题型最全题量最大
数学名家详细解析

吉米多维奇数学分析习题全集 (一)——分析引论

吉米多维奇数学分析习题全集 (二)——一元函数的微分学

吉米多维奇数学分析习题全集 (三)——不定积分 定积分

吉米多维奇数学分析习题全集 (四)——级数

吉米多维奇数学分析习题全集 (五)——多元函数的微分学 傅里叶的积分

吉米多维奇数学分析习题全集 (六)——重积分和曲线积分

吉米多维奇数学分析习题全集

ISBN 978-7-212-02695-0



9 787212 026950 >

定价: 20.00 元

Б. П. 吉米多维奇

Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题全解

(一)

南京大学数学系

廖良文 许宁 编著

杨立信 译

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解. 1/(苏)吉米多维奇著. 廖良文, 许宁编著. —合肥:安徽人民出版社, 2005

ISBN 978—7—212—02695—0

I. 吉… II. ①吉…②廖…③许… III. 数学分析—高等学校—解
题 IV. 017—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 113600 号

吉米多维奇数学分析习题全解(一)

(苏)吉米多维奇 著 廖良文 许 宁 编著 杨立信 译

责任编辑	王玉法	封面设计	王国亮
出版发行	安徽人民出版社		
地 址	合肥市政务文化新区圣泉路 1118 号出版传媒广场 邮编:230071		
发 行 部	0551—3533258	0551—3533292(传真)	
经 销	新华书店		
印 刷	南京新洲印刷有限公司		
开 本	880×1230 1/32	印张	14.5 字数 350 千
版 次	2010 年 1 月第 3 版(最新校订本)		
标准书号	ISBN978—7—212—02695—0		
定 价	20.00 元		

本版图书凡印刷、装订错误可及时向安徽人民出版社调换。

前 言

数学分析是大学数学系的一门重要必修课,是学习其它数学课的基础。同时,也是理工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作,它在中国有很大影响,早在上世纪五十年代,国内就出版了该书的中译本。安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》,以俄文第 13 版(最新版本)为基础,新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题,共计有五千道习题,数量多,内容丰富,包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大,初学者不易解答。为了给广大高校师生提供学习参考,应安徽人民出版社的同志邀请,我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知,学习数学,做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题,可以巩固我们所学到的知识,加深我们对基础概念的理解,还可以提高我们的运算能力,逻辑推理能力,综合分析能力。所以,我们希望读者遇到问题一定要认真思考,努力找出自己的解答,不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答,许宁编写了第六、七章习题的解答。本书的编写过程中,我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解,在许多方面得到了启发,谨对原书的作者表示感谢,在此,不再一一列出。

本书自出版以来受到广大高校师生的高度肯定,深受读者喜爱,畅销不衰。此次再版,我们纠正了前一版中存在的个别错误,对版面进行了适当调整。在此对为此书付出辛勤劳动的各位老师表示深切的谢意!

由于我们水平有限,错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编 者

目 录

第一章 分析引论	(1)
§ 1. 实数	(1)
§ 2. 序列的理论	(23)
§ 3. 函数的概念	(86)
§ 4. 函数的图示法	(119)
§ 5. 函数的极限	(221)
§ 6. 无穷大和无穷小的阶	(349)
§ 7. 函数的连续性	(366)
§ 8. 反函数	(412)
§ 9. 函数的一致连续性	(428)
§ 10. 函数方程	(447)

第一章 分析引论

§ 1. 实数

1. 数学归纳法 为了证明某定理对任意自然数 n 是正确的, 只要证明下面两点:

(1) 该定理对 $n = 1$ 是正确的; (2) 若该定理对任何一个自然数 n 是正确的, 则它对其后的一个自然数 $n + 1$ 也是正确的.

2. 分割 若把有理数分为 A, B 两类, 使其满足下列条件: (1) 两类均非空集; (2) 每个有理数必属于一类, 且仅属于一个类; (3) 属于 A 类(下类)的任何数都小于属于 B 类(上类)的任意数, 此分类法被称之为分割. (a) 若或者下类 A 有最大数, 或者上类有最小数, 则分割 A/B 确定一个有理数; (b) 若 A 类没有最大数, 而 B 类没有最小数, 则分割 A/B 确定一个无理数. 有理数和无理数统称为实数^①.

3. 绝对值 若 x 为实数, 则由下列条件所确定的非负数 $|x|$, 称为 x 的绝对值:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{若 } x < 0; \\ x, & \text{若 } x \geq 0. \end{cases}$$

对于任何实数 x 和 y , 下列不等式成立

$$|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

4. 上确界和下确界 设 $X = \{x\}$ 为实数的有界集, 若:

(1) 每一个 $x \in X$ ^② 满足不等式

$$x \geq m,$$

① 今后如没有相反的说明, 我们把所研究的数都理解为实数.

② 符号 $x \in X$ 表示数字 x 属于集 X .

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在有 $x' \in X$, 使得

$$x' < m + \varepsilon,$$

则数 $m = \inf\{x\}$ 称为集 X 的下确界.

同样, 若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leq M,$$

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在有 $x'' \in X$, 使得

$$x'' > M - \varepsilon,$$

则数 $M = \sup\{x\}$ 称为集 X 的上确界.

若集 X 下方无界, 则通常说

$$\inf\{x\} = -\infty,$$

若集 X 上方无界, 则认为

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5. 绝对误差和相对误差 若 $a (a \neq 0)$ 是被测量的准确值, 而 x 是这个量的近似值, 则

$$\Delta = |x - a|,$$

称为绝对误差, 而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|},$$

称为被测量的相对误差.

如果 x 的绝对误差不超过其第 n 个有效数字的单位的一半, 则说明 x 有 n 位准确的数字.

运用数学归纳法证明: 下列等式对任何自然数 n 都成立.

【1】 证明 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$

证 当 $n = 1$ 时, 等式显然成立.

设当 $n = k$ 时等式成立, 即

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

则当 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 & 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
 &= \frac{k(k+1)}{2} + k+1 \\
 &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},
 \end{aligned}$$

即对 $n = k+1$ 等式也成立.

于是由数学归纳法知, 对任何自然数 n , 有

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

【2】 证明 $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证 当 $n = 1$ 时, 等式成立.

设当 $n = k$ 时, 等式成立, 即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

则当 $n = k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 & 1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 \\
 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
 &= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)] \\
 &= \frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1],
 \end{aligned}$$

即当 $n = k+1$ 时, 等式也成立.

于是由数学归纳法, 对任何自然数 n , 有 $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

【3】 证明 $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$.

证 当 $n = 1$ 时, 等式显然成立.

设当 $n = k$ 时, 等式成立, 即

$$1^3+2^3+\cdots+k^3 = (1+2+\cdots+k)^2,$$

则当 $n = k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
& 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 \\
&= (1+2+\cdots+k)^2 + (k+1)^3 \\
&= \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + (k+1)^3 \\
&= \frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4} \\
&= [1+2+\cdots+k+(k+1)]^2,
\end{aligned}$$

即当 $n = k+1$ 时, 等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2.$$

【4】 证明 $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

证 当 $n=1$ 时, 等式成立.

设 $n=k$ 时, 等式成立, 即

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1,$$

则当 $n=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
& 1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k \\
&= (2^k-1)+2^k=2^{k+1}-1,
\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时, 等式也成立.

于是对任何自然数 n , 有

$$1+2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1.$$

【5】 设 $a^{[n]} = a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 和 $a^{[0]} = 1$.

证明: $(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]}$, 式中 C_n^m 为由 n 个元素中选取 m 个的组合数, 由此推导出牛顿的二项式公式.

证 当 $n=1$ 时, 有 $(a+b)^{[1]} = a+b$,

$$\sum_{m=0}^1 C_1^m a^{[1-m]} b^{[m]} = a+b,$$

所以等式成立.

设 $n=k$ 时, 等式成立. 即

$$(a+b)^{[k]} = \sum_{m=0}^k C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]},$$

则对于 $n = k + 1$, 有

$$\begin{aligned}
 & (a+b)^{[k+1]} \\
 &= (a+b)^{[k]}(a+b-kh) \\
 &= (a+b-kh) \cdot \sum_{m=0}^k C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]} \\
 &= (a+b-kh) \{ C_k^0 a^{[k]} b^{[0]} + C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]} + \cdots + C_k^k a^{[0]} b^{[k]} \} \\
 &= \{ (a-kh) + b \} C_k^0 a^{[k]} b^{[0]} \\
 &\quad + \{ (a-(k-1)h) + (b-h) \} C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]} + \cdots \\
 &\quad + \{ a + (b-kh) \} C_k^k a^{[0]} b^{[k]} \\
 &= C_k^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + C_k^0 a^{[k]} b^{[1]} + C_k^1 a^{[k]} b^{[1]} \\
 &\quad + C_k^1 a^{[k-1]} b^{[2]} + \cdots + C_k^k a^{[1]} b^{[k]} + C_k^k a^{[0]} b^{[k+1]} \\
 &= C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + (C_k^0 + C_k^1) a^{[k]} b^{[1]} + \cdots \\
 &\quad + (C_k^{k-1} + C_k^k) a^{[1]} b^{[k]} + C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]} \\
 &= C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + C_{k+1}^1 a^{[k]} b^{[1]} + \cdots + C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]} \\
 &= \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]} b^{[m]},
 \end{aligned}$$

即对 $n = k + 1$ 时, 等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]}, \quad (1)$$

$$\text{令 } h = 0, \text{ 则有 } a^{[n]} = a^n. \quad (2)$$

将 ② 式代入 ① 式, 得牛顿二项式公式 $(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m$.

【6】 证明伯努利不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

其中 x_1, x_2, \cdots, x_n 是符号相同且大于 -1 的数.

证 当 $n = 1$ 时, 不等式显然成立.

设 $n = k$ 时, 不等式成立, 即

$$\begin{aligned}
 & (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k) \\
 & \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,
 \end{aligned}$$

则当 $n = k + 1$ 时, 由于

$$x_i > -1 \quad (i = 1, 2, \dots, k+1),$$

所以 $1 + x_i > 0$, 因此有

$$\begin{aligned} & (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \\ & \geq (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1}) \\ & = (1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}) \\ & \quad + (x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}). \end{aligned}$$

又由于 $x_ix_j \geq 0 \quad (i, j = \overline{1, 2, \dots, k+1})$,

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad & (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \\ & \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}, \end{aligned}$$

即当 $n = k + 1$ 时, 不等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

【7】 证明: 如果 $x > -1$, 则不等式 $(1+x)^n \geq 1+nx$ ($n > 1$) 成立, 且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立.

证 当 $n = 2$ 时,

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 \geq 1+2x.$$

即不等式成立, 当等号成立时, 有 $x = 0$.

设 $n = k$ 时, 不等式成立, 即 $(1+x)^k \geq 1+kx$ 且等号仅当 $x = 0$ 时才成立.

则当 $n = k + 1$ 时, 由于 $1+x \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) \\ &\geq (1+kx)(1+x) \\ &= 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x, \end{aligned}$$

且等号仅当 $x = 0$ 时, 才成立.

于是, 由数学归纳法, 对任何自然数 n ($n > 1$), 不等式 $(1+x)^n \geq 1+nx$ 成立, 且仅当 $x = 0$ 时等号成立.

【8】 证明: 当 $n > 1$ 时, $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

提示: 利用不等式

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 2 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

证 当 $n=2$ 时, 因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2 = 2!$. 故不等式成立.

设 $n=k$ 时, 不等式成立, 即

$$k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则当 $n=k+1$ 时, 有

$$(k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k (k+1) = 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

而 $\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2 \quad (k = 1, 2, \dots),$

从而 $(k+1)! < \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1} = \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$

即当 $n=k+1$ 时, 不等式也成立.

于是, 对于任何自然数 $n \geq 2$ 有 $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$

【9】 证明: 当 $n > 1$ 时, $2! \cdot 4! \cdots (2n)! > [(n+1)!]^n.$

证 当 $n=2$ 时, 显然有 $2!4! = 48 > [(2+1)!]^2 = 36.$

设 $n=k$ 时, 不等式成立, 即

$$2!4!\cdots(2k)! > [(k+1)!]^k.$$

则当 $n=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & 2!4!\cdots(2k)!(2k+2)! \\ & > [(k+1)!]^k (2k+2)! \\ & = [(k+1)!]^{k+1} (k+2)(k+3)\cdots(2k+2) \\ & > [(k+1)!]^{k+1} (k+2)^{k+1} \\ & = [(k+2)!]^{k+1}, \end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时, 不等式也成立.

因此对任何大于 1 的自然数有

$$2!4!\cdots(2n)! > [(n+1)!]^n.$$

【10】 证明不等式

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证 当 $n=1$ 时, 显然有 $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, 不等式成立.

设当 $n=k$ 时, 不等式成立, 即

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

则当 $n=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \\ & < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}, \end{aligned}$$

而 $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$

事实上, 我们有 $4k^2 + 8k + 3 < 4k^2 + 8k + 4,$
即 $(2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2,$

从而我们有 $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$

因此

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k+1}{2(k+1)} < \frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}}.$$

即当 $n=k+1$ 时, 不等式成立.

由数学归纳法, 命题证毕.

【10.1】 证明不等式

$$(1) \ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (n \geqslant 2);$$

$$(2) \ n^{n+1} > (n+1)^n \quad (n \geqslant 3);$$

$$(3) \ \left| \sin \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \right| \leqslant \sum_{k=1}^n \sin x_k$$

$$(0 \leqslant x_k \leqslant \pi, k=1, 2, \cdots, n);$$

$$(4) (2n)! < 2^{2n}(n!)^2.$$

证 (1) 当 $k=2$ 时, 因为

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} > 2 = (\sqrt{2})^2,$$

所以不等式成立.

设当 $n=k$ 时, 不等式成立, 即

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k},$$

则当 $n=k+1$ 时, 有

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

而当 $k \geq 2$ 时, $2\sqrt{k} \geq \sqrt{k+1}$, 所以有

$$\left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2 = k + 2\sqrt{k} \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1} \geq k+1.$$

因此 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$,

即当 $n=k+1$ 时, 不等式成立. 由数学归纳法, 命题证毕.

(2) 事实上, 我们只需证明

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} < n \quad (n \geq 3),$$

而

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^n}{n^n} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + C_n^2 \frac{1}{n^2} + C_n^3 \frac{1}{n^3} + \cdots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

而当 $k > 2$ 时, $\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1$, $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$,

$$\begin{aligned}\text{所以 } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3 \leq n.\end{aligned}$$

因此 $(n+1)^n < n^{n+1}$.

(3) 因为当 $0 \leq x_k \leq \pi$ 时, $\sin x_k \geq 0$,

所以当 $n=1$ 时, 不等式显然成立.

设当 $n=k$ 时, 不等式成立, 即

$$\left| \sin\left(\sum_{i=1}^k x_i\right) \right| \leq \sum_{i=1}^k \sin x_i.$$

则当 $n=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}& \left| \sin\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right) \right| \\ &= \left| \sin\left(\sum_{i=1}^k x_i\right) \cdot \cos x_{k+1} + \cos\left(\sum_{i=1}^k x_i\right) \sin x_{k+1} \right| \\ &\leq \left| \sin\left(\sum_{i=1}^k x_i\right) \right| \cdot |\cos x_{k+1}| + \left| \cos\left(\sum_{i=1}^k x_i\right) \right| |\sin x_{k+1}| \\ &\leq \left| \sin\left(\sum_{i=1}^k x_i\right) \right| + \sin x_{k+1} \\ &\leq \sum_{i=1}^{k+1} \sin x_i,\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时, 不等式成立. 由数学归纳法, 命题证毕.

$$\begin{aligned}(4) \quad (2n)! &= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \\ &\quad \times (2n-1) \times 2 \times 4 \times \cdots \times (2n) \\ &< (2 \times 4 \times \cdots \times 2n)^2 \\ &= 2^{2n} (n!)^2.\end{aligned}$$

【11】 设 c 为正整数, 而且不是整数的平方, $\frac{A}{B}$ 为确定实数 \sqrt{c} 的分割, 其中 B 类包含 $b^2 > c$ 这样的所有正有理数 b , 而 A 类包含其余的所有有理数, 证明: A 类中无最大数, 而 B 类中无最小数.

证 我们要证明对任意 $a \in A$, 存在 a' 使得 $a' > a$ 且 $a' \in A$.

若 $a \leq 0$, 则显然存在 $a' > 0 \geq a$ 且 $a' \in A$. 故不妨设 $a > 0$, 于是 $a^2 \leq c$ 但 $a^2 \neq c$, 倘若不然, $a^2 = c$. 设 $a = \frac{p}{q}$, 其中 p, q 为互质的正整数, 则 $\frac{p^2}{q^2} = c$. 由于 c 是正整数, 而 p^2 与 q^2 也是互质的, 故必有 $q = 1$, 从而 $c = p^2$, 这与题设矛盾. 因此 $a^2 < c$. 下面我们证明, 当 n 充分大时, $\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < c$, 即

$$a + \frac{1}{n} \in A,$$

上述不等式等价于 $\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < c - a^2$,

而 $\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{2a+1}{n}$,

故只需取 n 使得 $\frac{2a+1}{n} < c - a^2$,

为此只需取 $n > \frac{2a+1}{c-a^2}$,

因此当 $n > \frac{2a+1}{c-a^2}$ 时, $a + \frac{1}{n} \in A$.

故 A 类中无最大数.

应用相同的方法, 可证明 B 类中无最小数, 实质上, 此分割 $\frac{A}{B}$ 确定一个无理数 \sqrt{c} .

【12】 用下列方法建立确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 $\frac{A}{B}$: A 类包含符合 $a^3 < 2$ 条件的所有有理数 a ; 而 B 类含有其它的所有有理数, 证明 A 类中无最大数, 而 B 类中无最小数.

证 设 $a \in A$, 即 $a^3 < 2$, 下面我们证明存在正整数 n , 使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^3 < 2.$$

事实上, 上式等价于 $\frac{3a^2}{n} + \frac{3a}{n^2} + \frac{1}{n^3} < 2 - a^3$,

若 $a \leq 0$, 取 $n = 1$ 即可. 不妨设 $a > 0$.

由于 $\frac{3a^2}{n} + \frac{3a}{n^2} + \frac{1}{n^3} < \frac{3a^2 + 3a + 1}{n}$, 故只需取 n 使得

$$\frac{3a^2 + 3a + 1}{n} < 2 - a^3,$$

即 $n > \frac{3a^2 + 3a + 1}{2 - a^3}$ 即可.

当 $n > \frac{3a^2 + 3a + 1}{2 - a^3}$ 时, $a + \frac{1}{n} \in A$.

故 A 类中无最大数.

下面证明 B 类中无最小数, 设 $b \in B$, 则 $b^3 \geq 2$. 首先证明 $b^3 \neq 2$. 若 $b^3 = 2$, 设 $b = \frac{p}{q}$, p 与 q 为互质的正整数, 则 $\frac{p^3}{q^3} = 2$, $p^3 = 2q^3$, 从而 p^3 为偶数, 因此 p 必为偶数. 设 $p = 2r$, r 为正整数, 由于 $(p, q) = 1$, 故 q 必为奇数, 从而 q^3 也为奇数. 但 $q^3 = 4r^3$, 矛盾. 因此 $b^3 > 2$. 下面证明存在充分大的正整数 n , 使得 $\left(b - \frac{1}{n}\right)^3 > 2$.

事实上, 上式等价于

$$\frac{3b^2}{n} - \frac{3b}{n^2} + \frac{1}{n^3} < b^3 - 2,$$

而 $\frac{3b^2}{n} - \frac{3b}{n^2} + \frac{1}{n^3} < \frac{3b^2 + 1}{n}$,

因此, 取 $n > \frac{3b^2 + 1}{b^3 - 2}$,

则 $\frac{3b^2}{n} - \frac{3b}{n^2} + \frac{1}{n^3} < \frac{3b^2 + 1}{n} < b^3 - 2$.

从而 $\left(b - \frac{1}{n}\right)^3 > 2$,

即 $b - \frac{1}{n} \in B$.

因此, B 类中无最小数. 事实上, 此分割 $\frac{A}{B}$ 确定了一个无理数 $\sqrt[3]{2}$.

【13】 作出适当的分割,证明等式

$$(1) \sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18};$$

$$(2) \sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

证 (1) 作确定 $\sqrt{2}$ 的分割 $\frac{A}{B}$:其中 B 类包含所有满足条件 b^2

> 2 的正有理数,而其余有理数归入 A 类. 再作确定 $\sqrt{8}$ 的分割 $\frac{A'}{B'}$:

B' 类包含所有满足条件 $b'^2 > 8$ 的正有理数,而其余有理数归入 A' 类. 根据实数加法的定义,满足不等式 $a + a' < c < b + b'$ (对任何 $a \in A, b \in B, a' \in A', b' \in B'$)的唯一实数 c 就是 $\sqrt{2} + \sqrt{8}$. 因此要证 $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$,我们只需证明 $(b + b')^2 > 18 (\forall b \in B, b' \in B')$ 及 $(a + a')^2 < 18 (\forall a \in A, a' \in A' \text{ 且 } a + a' > 0)$.

因为 $b^2 > 2, b'^2 > 8, b > 0, b' > 0$,故 $b^2 b'^2 > 16, bb' > 4$,从而

$$\begin{aligned} (b + b')^2 &= b^2 + b'^2 + 2bb' \\ &> 2 + 8 + 8 = 18. \end{aligned}$$

又 $a + a' > 0$,

则 a 与 a' 中至少有一个为正,从而由 $a^2 a'^2 < 2 \times 8 = 16$,知 $aa' < 4$.

因此 $(a + a')^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' < 2 + 8 + 8 = 18$,证毕.

(2) $\sqrt{2}$ 的分割 $\frac{A}{B}$ 如(1)中所示,再作确定 $\sqrt{3}$ 的分割 $\frac{A^*}{B^*}$:其中

B^* 类中包含所有满足条件 $b^{*2} > 3$ 的正有理数,而其余有理数 a^* 归入 A^* 类. 根据实数乘法的定义,满足 $aa^* < c < bb^*$ (对任何 $a \in A, a > 0, a^* \in A^*, a^* > 0, b \in B, b^* \in B^*$)的实数 c 唯一存在且 $c = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.

但由于 $a \in A, a > 0, a^* \in A^*, a^* > 0$,从而 $a^2 < 2, a^{*2} < 3$ 所以 $(aa^*)^2 < 6$ 而当 $b \in B, b^* \in B^*$ 时, $(bb^*)^2 > 6$;故 $aa^* < \sqrt{6} < bb^*$ (对任何 $a \in A, a > 0, a^* \in A^*, a^* > 0, b \in B, b^* \in B^*$);因此 $\sqrt{6} = c = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.

【14】 建立确定数 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割.

解 如题 13(1), 作确定 $\sqrt{2}$ 的分割 $\frac{A}{B}$, 其次作分割 $\frac{A_1}{B_1}$, 其中 B_1 包含所有满足如下条件的正有理数 b_1 :

存在 $b = \frac{p}{q}$ (p, q 互质) 属于 B 使得 $b_1^q > 2^p$, 而其余有理数归入 A_1 类.

这样的分割确定了数 $2^{\sqrt{2}}$.

【15】 证明: 任何非空并且下方有界的数集有下确界, 而任何非空并且上方有界的数集有上确界.

证 设 A 是下方有界的数集, 即存在实数 α 使得 $a > \alpha$ ($\forall a \in A$). 下面我们证明 A 有下确界.

我们讨论两种情况:

(1) A 中有最小数 \bar{a} . 此时, $\forall a \in A$ 都有 $a \geq \bar{a}$, 即 \bar{a} 是 A 的下界, 又因为 $\bar{a} \in A$, 故对任何 A 的下界 m , 均有 $\bar{a} \geq m$, 故 \bar{a} 为 A 的下确界.

(2) A 中无最小数. 此时, 作分割 $\frac{A'}{B'}$: 将 A 的所有下界归入 A' 类, 而其余数归入 B' 类, 这样 $A \subset B'$, A', B' 均为非空集, 且 A' 中的数小于 B' 中的数, 故 $\frac{A'}{B'}$ 是一个实数分割. 易知由此分割产生的实数 β 是 A' 类中的最大数, 即 β 是 A 的最大下界. 因此 β 是 A 的下确界.

同理可证, 上方有界的数集必有上确界.

【16】 证明一切有理真分式 $\frac{m}{n}$ (其中 m 和 n 为自然数, 且 $0 < m < n$) 的集无最小和最大元素. 并求该集的上确界和下确界.

证 令 $E = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \text{ 为自然数, 且 } 0 < m < n \right\}$,

若 $\frac{m}{n} \in E$, 则 $\frac{m+1}{n+1} \in E$, 且 $\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$. 因此 E 中无最大元素.

又若 $\frac{m}{n} \in E$, 则 $\frac{m^2}{n^2} \in E$, 且 $\frac{m^2}{n^2} < \frac{m}{n}$, 故 E 中无最小元素. 显然 $\sup E = 1, \inf E = 0$.

【17】 求出满足不等式 $r^2 < 2$ 的有理数 r 所成集合的下确界和上确界.

解 设 $E = \{r \mid r \text{ 为有理数, 且 } r^2 < 2\}$. 由 13(1) 知分割 $\frac{A}{B}$ 确定无理数 $\sqrt{2}$, 其中 A 是由所有非正有理数以及满足 $r^2 < 2$ 的正有理数 r 组成的类, B 类包含所有其余的有理数. 于是 $\sup E = \sup A = \sqrt{2}$.

同样, 分割 $\frac{A'}{B'}$ 确定无理数 $-\sqrt{2}$, 其中 B' 是由所有非负有理数及满足条件 $r^2 < 2$ 的负有理数 r 组成的类, A' 是由其余有理数组成的类. 于是有 $\inf E = \inf B' = -\sqrt{2}$.

【18】 $\{x\}$ 为数集, $-x$ 为 x 的相反数, 证明: (1) $\inf \{-x\} = -\sup \{x\}$; (2) $\sup \{-x\} = -\inf \{x\}$.

证 (1) 设 $\inf \{-x\} = m$, 则有:

- (a) 当 $-x \in \{-x\}$ 时, $-x \geq m$;
- (b) 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $-x' \in \{-x\}$, 使 $-x' < m + \epsilon$,

因此由 (a) 及 (b) 得:

- (c) 当 $x \in \{x\}$ 时, $x \leq -m$;
- (d) 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $x' \in \{x\}$ 使得 $x' > -m - \epsilon$.

因此 $\sup \{x\} = -m$,

即 $m = -\sup \{x\}$,

所以 $\inf \{-x\} = -\sup \{x\}$.

(2) 设 $\sup \{-x\} = M$, 则由上确界的定义有

- (a) 当 $-x \in \{-x\}$ 时, $-x \leq M$.
- (b) 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $-x' \in \{-x\}$, 使

$$-x' > M - \epsilon,$$

因此由(a)及(b)得:

(c) 当 $x \in \{x\}$ 时, $x \geq -M$.

(d) 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $x' \in \{x\}$ 使得

$$x' < -M + \epsilon.$$

因此 $\inf\{x\} = -M$,

即 $M = -\inf\{x\}$,

亦即 $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

【19】 设 $\{x+y\}$ 是所有 x, y 的和的集, 其中 $x \in \{x\}$ 和 $y \in \{y\}$. 证明下列等式成立:

$$(1) \inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\};$$

$$(2) \sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}.$$

证 (1) 设 $\inf\{x\} = m_1, \inf\{y\} = m_2$, 则有

(a) 当 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$ 时 $x \geq m_1, y \geq m_2$,

从而 $x+y \geq m_1+m_2$.

(b) 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$, 使得 $x' < m_1 + \frac{\epsilon}{2}, y' < m_2 + \frac{\epsilon}{2}$ 从而 $x' + y' < (m_1 + m_2) + \epsilon$.

因此 $\inf\{x+y\} = m_1 + m_2$;

即 $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$.

(2) 同理可证:

$$\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}.$$

【20】 设 $\{xy\}$ 是所有 x, y 乘积的集合, 其中 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$, 且 $x \geq 0, y \geq 0$. 证明:

$$(1) \inf\{xy\} = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\};$$

$$(2) \sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}.$$

证 (1) 设 $\inf\{x\} = m_1, \inf\{y\} = m_2$, 因为 $x \geq 0, y \geq 0$, 故 $m_1 \geq 0, m_2 \geq 0$, 于是我们有:

(a) 当 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$ 时

$$x \geq m_1 \geq 0, y \geq m_2 \geq 0$$

从而 $xy \geq m_1 m_2$;

(b) 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$, 使得

$$0 \leq x' < m_1 + \varepsilon, \quad 0 \leq y' < m_2 + \varepsilon,$$

从而存在 $x'y' \in \{xy\}$ 使

$$0 \leq x'y' < (m_1 + \varepsilon)(m_2 + \varepsilon) = m_1 m_2 + \varepsilon',$$

其中 $\varepsilon' = (m_1 + m_2)\varepsilon + \varepsilon^2$,

因此 $\inf\{xy\} = m_1 \cdot m_2 = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}$,

(2) 同理可证:

$$\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}.$$

【21】 证明不等式:

$$(1) |x - y| \geq ||x| - |y||;$$

$$(2) |x + x_1 + \cdots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|)$$

证 (1) 由

$$|x - y| \geq |x| - |y|,$$

及 $|x - y| = |y - x| \geq |y| - |x| = -(|x| - |y|),$

得 $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|,$

即 $|x - y| \geq ||x| - |y||.$

$$(2) |x + x_1 + \cdots + x_n| > |x| - |x_1 + \cdots + x_n|,$$

而 $|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|,$

因此 $|x + x_1 + \cdots + x_n| > |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|).$

【22】 解不等式 $|x + 1| < 0.01$.

解 由 $|x + 1| < 0.01$

得 $-0.01 < x + 1 < 0.01$

所以 $-1.01 < x < -0.99.$

【23】 解不等式 $|x - 2| \geq 10$.

解 由 $|x - 2| \geq 10$ 得

$$x - 2 \geq 10 \text{ 或 } x - 2 \leq -10$$

因此不等式的解为

$$x \geq 12 \text{ 或 } x \leq -8.$$

【24】 解不等式 $|x| > |x + 1|$.

解 将不等式两边平方得 $(x+1)^2 < x^2$, 即 $2x+1 < 0$. 所以, 不等式的解为 $x < -\frac{1}{2}$.

【25】 解不等式 $|2x-1| < |x-1|$.

解 将不等式两边平方, 得 $(2x-1)^2 < (x-1)^2$, 即 $3x^2 - 2x < 0$. 解之得 $0 < x < \frac{2}{3}$.

【26】 解不等式 $|x+2| + |x-2| \leq 12$.

解 令 $x+2 = t$, 则有

$$|t| + |t-4| \leq 12,$$

即 $|t-4| \leq 12 - |t|$.

两边平方得 $t^2 - 8t + 16 \leq 144 - 24|t| + t^2$,

即 $3|t| \leq 16 + t$.

将上式两边平方, 化简得 $t^2 - 4t - 32 \leq 0$,

解之得 $-4 \leq t \leq 8$,

即 $-4 \leq x+2 \leq 8$.

因此 $-6 \leq x \leq 6$.

【27】 解不等式 $|x+2| - |x| > 1$.

解 原式可化为 $|x| + 1 < |x+2|$, 两边平方并化简得 $2|x| < 4x+3$, 再将上式两边平方得 $4x^2 < 16x^2 + 24x + 9$, 即 $4x^2 + 8x + 3 > 0$.

解之得 $x > -\frac{1}{2}$ 或 $x < -\frac{3}{2}$.

但容易验证, 当 $x < -\frac{3}{2}$ 时有 $|x+2| < |x|$, 故 $x < -\frac{3}{2}$ 不是原不等式的解.

因此, 原不等式的解为 $x > -\frac{1}{2}$.

【28】 解不等式 $||x+1| - |x-1|| < 1$.

解 将不等式两边平方并化简得

$$x^2 + \frac{1}{2} < |x^2 - 1|,$$

即 $x^2 + \frac{1}{2} < x^2 - 1,$

或 $x^2 - 1 < -\left(x^2 + \frac{1}{2}\right),$

显然 $x^2 + \frac{1}{2} < x^2 - 1$ 不成立. 故

$$x^2 - 1 < -\left(x^2 + \frac{1}{2}\right),$$

即 $x^2 < \frac{1}{4}.$

解之得 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$

【29】 解不等式 $|x(1-x)| < 0.05.$

证 由 $|x^2 - x| < \frac{1}{20}$ 得

$$-\frac{1}{20} < x^2 - x < \frac{1}{20},$$

故原不等式可化为

且
$$\begin{cases} x^2 - x - \frac{1}{20} < 0, \\ x^2 - x + \frac{1}{20} > 0. \end{cases} \quad (*)$$

由 $x^2 - x - \frac{1}{20} < 0,$

可得 $\frac{5 - \sqrt{30}}{10} < x < \frac{5 + \sqrt{30}}{5}.$

由 $x^2 - x + \frac{1}{20} > 0,$

可得 $x < \frac{5 - \sqrt{20}}{10},$

或 $x > \frac{5 + \sqrt{20}}{10},$

因此使(*)式中两个不等式同时成立的 x 为

$$\frac{5 - \sqrt{30}}{10} < x < \frac{5 - \sqrt{20}}{10},$$

或
$$\frac{5 + \sqrt{20}}{10} < x < \frac{5 + \sqrt{30}}{10}.$$

【30】 证明恒等式

$$\left(\frac{x + |x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - |x|}{2}\right)^2 = x^2.$$

证
$$\left(\frac{x + |x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - |x|}{2}\right)^2$$

$$= \frac{x^2 + 2x|x| + x^2}{4} + \frac{x^2 - 2x|x| + x^2}{4} = x^2.$$

【31】 测量长度 10 厘米时,绝对误差为 0.5 毫米;测量距离 500 千米时,绝对误差等于 200 米.哪种测量较为精确?

解 用相对误差 $\delta = \frac{\Delta}{|a|}$ 进行比较,其中 a 为被测量的精确值, Δ 为绝对误差.

对于前者: $\delta = \frac{0.5 \times 0.1}{10} = 0.5\%,$

对于后者: $\delta = \frac{200}{500 \times 1000} = 0.04\%,$

所以,测量距离 500 千米时,测量较为精确.

【32】 数 $x = 2.3752$,若这个数的相对误差为 1%,试求此数包含几位精确数字?

解 因为 $\frac{\Delta}{2.3752} = 0.01$,所以 $\Delta = 0.023752 < 0.05 = \frac{0.1}{2}.$

因此,此数包含两位准确数字.

【33】 数 $x = 12.125$,含有 3 位精确数字,试求此数的相对误差是多少?

解 因为 x 包含三位准确数字,所以 $\Delta < 0.05$. 于是

$$\delta = \frac{\Delta}{|x|} < \frac{0.05}{12.125} < 0.42\%.$$

【34】 矩形的边为 $x = 2.50$ 厘米 ± 0.01 厘米, $y = 4.00$ 厘米 ± 0.02 厘米. 问这个矩形的面积 S 在什么范围内? 如果其边长取平均值时, 矩形面积的绝对误差 Δ 和相对误差 δ 是多少?

解 $S_{\min} = (2.50 - 0.01)(4.00 - 0.02)$

$$= 9.9102(\text{cm}^2),$$

$$S_{\max} = (2.50 + 0.01)(4.00 + 0.02)$$

$$= 10.0902(\text{cm}^2),$$

故 $9.9102 \leq S \leq 10.0902,$

$$S_{\text{平均}} = 2.50 \times 4.00 = 10(\text{cm}^2),$$

$$\Delta_1 = 10.0902 - 10 = 0.0902(\text{cm}^2),$$

$$\Delta_2 = 10 - 9.9102 = 0.0898(\text{cm}^2),$$

故 $\Delta \leq \max(\Delta_1, \Delta_2) = 0.0902(\text{cm}^2),$

$$\delta = \frac{\Delta}{10} \leq \frac{0.0902}{10} = 0.902\%.$$

【35】 物体的重量为 $p = 12.59$ 克 ± 0.01 克, 体积为 $V = 3.2$ 厘米² ± 0.2 厘米³, 若物体的重量和体积都取其平均值, 求物体的比重, 并估算比重的绝对误差和相对误差.

解 比重

$$C_{\text{平均}} = \frac{12.59}{3.2} \text{ g/cm}^3 = 3.93 \text{ g/cm}^3,$$

$$C_{\max} = \frac{12.60}{3.0} \text{ g/cm}^3 = 4.20 \text{ g/cm}^3,$$

$$C_{\min} = \frac{12.58}{3.2} \text{ g/cm}^3 = 3.70 \text{ g/cm}^3,$$

$$\Delta_1 = C_{\max} - C = 0.27 \text{ g/cm}^3,$$

$$\Delta_2 = C - C_{\min} = 0.23 \text{ g/cm}^3,$$

$$C_{\min} \leq C \leq C_{\max},$$

故

$$\Delta \leq \max(\Delta_1, \Delta_2) = 0.27 \text{ g/cm}^3,$$

$$\delta = \frac{\Delta}{C} \leq \frac{0.27}{3.70} < 7.3\%.$$

【36】 圆半径 $r = 7.2$ 米 ± 0.1 米. 若取 $\pi = 3.14$, 求出的圆面积的最小相对误差?

解 圆面积 $A = \pi \times 7.2^2 \approx 162.78(\text{米}^2)$,

$$\Delta_1 = \pi \times (7.2 + 0.1)^2 - \pi \times 7.2^2 = 1.45\pi,$$

$$\Delta_2 = \pi \times 7.2^2 - \pi \times (7.2 - 0.1)^2 = 1.43\pi,$$

故 $\Delta \leq \max(\Delta_1, \Delta_2) = 1.45\pi \approx 4.55(\text{米}^2)$,

即一般圆面积 A 为 $162.78 \text{ 米}^2 \pm 4.55 \text{ 米}^2$, $\delta \leq \frac{4.55}{162.78} < 2.8\%$.

【37】 测得直角平行六面体 $x = 24.7$ 米 ± 0.2 米; $y = 6.5$ 米 ± 0.1 米; $z = 1.2$ 米 ± 0.1 米; 这个平行六面体的体积 V 在什么范围内? 若其测量都取其平均值, 求出的这个平行六面体的体积为多少绝对误差和相对误差?

解 $24.5 \times 6.4 \times 1.1 \leq V \leq 24.9 \times 6.6 \times 1.3$,

即 $172.480(\text{米}^3) \leq V \leq 213.642(\text{米}^3)$.

当 x, y, z 均取平均值时,

$$V = 24.7 \times 6.5 \times 1.2 = 192.660(\text{米}^3),$$

$$\Delta_1 = 213.642 - 192.660 = 20.982(\text{米}^3),$$

$$\Delta_2 = 192.660 - 172.480 = 20.180(\text{米}^3),$$

故 $\Delta \leq 20.982(\text{米}^3)$,

$$\delta \leq \frac{20.982}{172.480} \approx 12.2\%.$$

【38】 正方形的边长为 x , 其中 $2 \text{ 米} < x < 3 \text{ 米}$, 问边长的绝对误差应为多小时, 才能使确定这个正方形的面积精确到 0.001 米^2 ?

解 由题设我们有

$$0 < x^2 - 4 < 0.001, 0 < 9 - x^2 < 0.001,$$

解之得 $2 < x < 2.00024$,

或 $2.99983 < x < 3$,

因此, Δ 取二者中误差较小者, 即

$$\Delta \leq 0.00017(\text{米}) = 0.17(\text{毫米}).$$

故当边长 x 的绝对误差不超过 0.17 毫米时, 能使此正方形的面积

精确到 0.001 米².

【39】 若矩形每边边长均不超过 10 米, 为了使它的面积能精确到 0.01m^2 来计算, 求在测量矩形的边长 x 和 y 时所能允许的绝对误差 Δ .

解 根据题设, 我们有

$$(x + \Delta)(y + \Delta) - xy \leq 0.01,$$

即
$$\Delta^2 + (x + y)\Delta \leq 0.01.$$

由于 $x \leq 10, y \leq 10$, 所以只要

$$\Delta^2 + 20\Delta - 0.01 \leq 0,$$

解之得(注意 $\Delta > 0$),

$$\begin{aligned}\Delta &\leq \frac{-20 + \sqrt{20^2 + 0.04}}{2} = -10 + \frac{20.000999975}{2} \\ &= 0.0004999875(\text{米}).\end{aligned}$$

【40】 假设 $\delta(x)$ 和 $\delta(y)$ 为数 x 及 y 的相对误差, $\delta(xy)$ 为数 xy 的相对误差, 证明: $\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)$.

证 $x = a + \Delta_x, y = b + \Delta_y$,

其中 a 与 b 分别是 x 和 y 的精确值, Δ_x 与 Δ_y 是 x 和 y 的绝对误差, 则有, xy 的绝对误差

$$\begin{aligned}\Delta &= |xy - ab| \\ &= |b\Delta_x + a\Delta_y + \Delta_x\Delta_y| \\ &\leq |b|\Delta_x + |a|\Delta_y + \Delta_x\Delta_y.\end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned}\delta(xy) &= \frac{\Delta}{|ab|} \\ &\leq \frac{\Delta_x}{|a|} + \frac{\Delta_y}{|b|} + \frac{\Delta_x}{|a|} \cdot \frac{\Delta_y}{|b|} \\ &= \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).\end{aligned}$$

§ 2. 序列的理论

1. 序列极限的概念

假设对于任何的 $\epsilon > 0$, 存在数 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 时,

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

则称序列 $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ 或 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 有极限 a (简称收敛于 a), 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 特别是若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 则称 x_n 为无穷小.

没有极限的序列称为发散的.

2. 极限存在的准则

(1) 如果 $y_n \leq x_n \leq z_n$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

(2) 单调且有界的序列具有极限.

(3) 柯西判别法 序列 x_n 极限存在的必要且充分条件是: 对于任何的 $\varepsilon > 0$ 都存在数 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时:
 $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon.$

3. 序列极限的基本定理

假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在, 则有

(1) 如果 $x_n \leq y_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

(4) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$

4. 数 e.

序列 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n = 1, 2, \dots)$ 具有有限极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818284 \dots.$$

5. 无穷极限

符号 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 表示: 对于任何的 $E > 0$, 都存在数 $N = N(E)$, 使当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$.

6. 极限点(聚点)

若存在子序列:

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}, \dots \quad (1 \leq p_1 < p_2 < \dots)$$

使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \xi$, 则数 ξ (或符号 ∞) 称为已知序列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 的聚点.

任何有界序列至少有一个有穷的聚点 (布尔查诺 - 威尔斯特拉斯原理), 如这个聚点是惟一的, 则它就是该序列的有穷极限.

序列 x_n 的最小聚点 (有穷的或无穷的) $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ 称作下极限; 而其最大聚点 $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ 称为此序列的上极限. 等式 $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ 是序列 x_n 的 (有穷的或无穷的) 极限存在的必要且充分的条件.

【41】 假设 $x_n = \frac{n}{n+1} (n = 1, 2, \dots)$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

对任一给定的 $\epsilon > 0$, 确定数 $N = N(\epsilon)$, 使得若 $n > N$ 时,

$$|x_n - 1| < \epsilon.$$

填下表:

ϵ	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
N					

证 因为

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n+1}, \quad \forall \epsilon > 0^{(*)},$$

要使 $|x_n - 1| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$, 即 $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$. 故取

$$N = N(\epsilon) = \left[\frac{1}{\epsilon} \right],$$

则当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \epsilon$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

ϵ	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
N	10	100	1000	10000	...

* 记号 \forall 表示“对于任给的”, 记号 \exists 表示“存在”.

【42】 若

$$(1) x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}; \quad (2) x_n = \frac{2n}{n^3 + 1};$$

$$(3) x_n = \frac{1}{n!};$$

$$(4) x_n = (-1)^n \cdot 0.999^n$$

证明 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 是无穷小(即极限等于 0).

对任一给定的 $\epsilon > 0$, 确定 $N = N(\epsilon)$ 使得当 $n > N$ 时, $|x_n| < \epsilon$.

对应上述四种情况, 填下表:

ϵ	0.1	0.001	0.0001	...
N				

证 (1) 因为 $|x_n| = \frac{1}{n}$, 所以, $\forall \epsilon > 0$, 要使 $|x_n| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \epsilon$. 即 $n > \frac{1}{\epsilon}$.

取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, $|x_n| < \epsilon$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(2) 因为 $|x_n| = \frac{2n}{n^2 + 1} < \frac{2}{n}$, 所以, $\forall \epsilon > 0$, 要 $|x_n| < \epsilon$, 只要 $\frac{2}{n} < \epsilon$. 即 $n > \frac{2}{\epsilon}$.

取 $N = \left[\frac{2}{\epsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, $|x_n| < \epsilon$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(3) $|x_n| = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$, $\forall \epsilon > 0$, 要使 $|x_n| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \epsilon$, 即 $n > \frac{1}{\epsilon}$.

取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, $|x_n| < \epsilon$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(4) $|x_n| = 0.999^n$, $\forall \epsilon > 0$, 要使 $|x_n| < \epsilon$, 只要 $0.999^n < \epsilon$, 即 $n \lg 0.999 < \lg \epsilon$, 由于 $\lg 0.999 < 0$, 故只要

$$n > \frac{\lg \epsilon}{\lg 0.999} \approx 2302 \lg \frac{1}{\epsilon},$$

取 $N = \left[2302 \lg \frac{1}{\epsilon} \right]$.

则当 $n > N$ 时, $|x_n| < \epsilon$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

填表:

ϵ		0.1	0.001	0.0001	...
(1)	N	10	1000	10000	...
(2)	N	20	2000	20000	...
(3)	N	10	1000	10000	...
(4)	N	2302	6906	9208	...

【43】 证明序列

(1) $x_n = (-1)^n n$; (2) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$;

(3) $x_n = \lg(\lg n) \quad (n \geq 2)$.

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有无穷极限 (亦即是无穷大), 即对于任意的 $E > 0$, 确定数 $N = N(E)$, 使得当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$.

对应上述各种情况, 填下表:

E	10	100	1000	10000	...
N					

证 (1) $|x_n| = n, \forall E > 0$, 要使 $|x_n| > E$, 只要 $n > E$, 取 $N = [E]$, 则当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

(2) $|x_n| = 2^{\sqrt{n}}, \forall E > 0$, 要使 $|x_n| > E$, 只要 $2^{\sqrt{n}} > E$. 即

$$n > \left(\frac{\lg E}{\lg 2} \right)^2,$$

取 $N = \left[\left(\frac{\lg E}{\lg 2} \right)^2 \right]$,

则当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

(3) 当 $n > 10$ 时, $\lg(\lg n) > 0$,

故此时 $|x_n| = \lg(\lg n)$

$\forall E > 0$, 要 $|x_n| > E$, 只要 $\lg(\lg n) > E$,

即 $n > 10^{10^E}$,

取 $N = [10^{10^E}]$,

则当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

填表:

E		10	100	1000	10000	...
(1)	N	10	100	100	10000	...
(2)	N	11	44	99	176	...
(3)	N	$10^{10^{10}}$	$10^{10^{100}}$	$10^{10^{1000}}$	$10^{10^{10000}}$...

【44】 证明: $x_n = n^{(-1)^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 无界, 但是当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它并不是无穷大.

证 因为

$$x_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} 2k, & \text{当 } n = 2k \text{ 时,} \\ \frac{1}{2k+1}, & \text{当 } n = 2k+1 \text{ 时,} \end{cases}$$

所以 $x_{2k} \rightarrow \infty, x_{2k+1} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), 故 x_n 无界, 且不趋于无穷大.

【45】 用不等式表示下列各式:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

解 (1) $\forall E > 0, \exists N = N(E)$, 使得当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$, 此即, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

(2) $\forall E > 0, \exists N = N(E)$, 使得当 $n > N$ 时, $x_n < -E$, 此即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

(3) $\forall E > 0, \exists N = N(E)$, 使得当 $n > N$ 时, $x_n > E$, 此即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

假设 n 为自然数列, 求下列各式(46 ~ 57) 的值:

【46】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000n}{n^2 + 1}$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000}{n + \frac{1}{n}} = 0$.

【47】 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$

解
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0. \end{aligned}$$

【48】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}.$

解 因为 $|\sin n!| \leq 1$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = 0$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1} = 0.$$

【49】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}.$

解
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

【50】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} \quad (|a| < 1, |b| < 1).$

解
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \frac{1-b}{1-a}.$$

【51】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right).$

解
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{【52】} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right].$$

解 当 $n = 2k$ 时 (k 为自然数)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \\ &= \left(\frac{1}{2k} - \frac{2}{2k} \right) + \left(\frac{3}{2k} - \frac{4}{2k} \right) + \cdots + \left(\frac{2k-1}{2k} - \frac{2k}{2k} \right) \\ &= \frac{-k}{2k} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

当 $n = 2k+1$ 时,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \\ &= \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{2}{2k+1} \right) + \left(\frac{3}{2k+1} - \frac{4}{2k+1} \right) + \cdots \\ & \quad + \left(\frac{2k-1}{2k+1} - \frac{2k}{2k+1} \right) + \frac{2k+1}{2k+1} \\ &= -\frac{k}{2k+1} + \frac{2k+1}{2k+1} = \frac{k+1}{2k+1} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

由于不同子列的极限值不同,所以极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right],$$

不存在.

$$\text{【53】} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right].$$

解 因为

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

所以

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{【54】} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right].$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{2^2}{n^3} + \frac{4^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2(n-1))^2}{n^3} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right) \right. \\
&\quad \left. - 4 \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6n^3} - 4 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \right] \\
&= \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

$$\text{【55】} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right).$$

$$\text{解} \quad \text{设 } f(n) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n},$$

$$g(n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\begin{aligned}
\text{则} \quad f(n) + g(n) &= \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \cdots + \frac{2n+1}{2^n} \\
&= 2f(n+1) - 1,
\end{aligned}$$

$$\text{故} \quad 2f(n+1) - f(n) = g(n) + 1,$$

$$\begin{aligned}
\text{又} \quad 2f(n+1) - f(n) &= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} + \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} \right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right) \\
&= f(n) + \frac{2n+1}{2^n},
\end{aligned}$$

$$\text{故} \quad f(n) = g(n) + 1 - \frac{2n+1}{2^n},$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} (g(n) + 1) = 3,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2^n} = 0^{(*)},$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right) = 3.$

(*) 参看第 58 题.

【56】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right].$

解
$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1. \end{aligned}$$

【57】 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}).$

解
$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{2} \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}} = 2. \end{aligned}$$

证明下列等式(58 ~ 66).

【58】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$

证 因为 $2^n = (1+1)^n$

$$= 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \cdots + 1 > \frac{n(n-1)}{2},$$

故 $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1} \quad (n \geq 2),$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0,$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$

【59】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$

证 因为 $0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{n} \leq \frac{4}{n}$,

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} = 0$,

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

【60】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1)$.

证 当 $k \leq 0$ 时, 显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{n^{-k}} \right) = 0,$$

下面讨论当 $k > 0$ 时的情形.

设 $a = 1 + h \quad (h > 0)$,

则 $a^n = (1 + h)^n$

$$= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n > \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2.$$

若 $k = 1$, 则有

$$0 < \frac{n^k}{a^n} = \frac{n}{a^n} < \frac{2n}{n(n-1)(a-1)^2}$$

$$= \frac{2}{(n-1)(a-1)^2},$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n-1)(a-1)^2} = 0$,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$.

而当 $k > 0$ 但 $k \neq 1$ 时,

因为 $\frac{n^k}{a^n} = \left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n} \right]^k$,

而 $a^{\frac{1}{k}} > 1$,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n} = 0$,

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$.

【61】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

证 取 $k = [|a|]$, 则当 $n > k$ 时

$$\begin{aligned} 0 < \left| \frac{a^n}{n!} \right| &= \frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdots \frac{|a|}{k} \cdot \frac{|a|}{k+1} \cdots \frac{|a|}{n} \\ &< |a|^k \frac{|a|}{n} = \frac{|a|^{k+1}}{n}, \end{aligned}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|^{k+1}}{n} = 0$,

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

【62】 $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$, 若 $|q| < 1$.

证 当 $q = 0$ 时, $nq^n = 0$, 结论显然成立.

当 $0 < |q| < 1$ 时, 令 $a = \frac{1}{|q|}$, 则 $a > 1$,

由题 60 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} n |q|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$,

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$.

【63】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$.

证 (1) 当 $a = 1$ 时, 等式显然成立.

(2) 当 $a > 1$ 时, 对任意给定的 ϵ , 取 $N = \left[\frac{a-1}{\epsilon} \right]$,

则当 $n > N$ 时, $1 + n\epsilon > a$, 而

$$(1 + \epsilon)^n > 1 + n\epsilon,$$

所以 $(1 + \epsilon)^n > a$,

因此, 当 $n > N$ 时, 我们有,

$$1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \epsilon,$$

即 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$,

此即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(3) 当 $0 < a < 1$ 时, 令 $h = \frac{1}{a}$, 则 $h > 1$. 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{h}} = 1,$$

总之, 当 $a > 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

【64】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 1).$

证 设 $\log_a n = h, m = [h], a = 1 + \lambda (\lambda > 0)$.

则
$$\begin{aligned} n = a^h &\geq \frac{1}{a^2} a^{m+2} = \frac{1}{a^2} (1 + \lambda)^{m+2} \\ &> \frac{1}{a^2} \frac{(m+2)(m+1)}{2} \lambda^2 > \frac{\lambda^2}{a^2} \frac{(m+1)^2}{2}, \end{aligned}$$

从而
$$(m+1) < \frac{\sqrt{2a}}{a-1} \sqrt{n},$$

即
$$\log_a n = h < m+1 < \frac{\sqrt{2a}}{a-1} \sqrt{n},$$

所以
$$0 < \frac{\log_a n}{n} < \frac{\sqrt{2a}}{a-1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{n},$$

而
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2a}}{a-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

因此
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$$

【65】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

证 令 $a_n = \sqrt[n]{n}$, 则 $a_n > 1$. 所以我们有, 当 $n > 2$ 时,

$$n = a_n^n > \frac{n(n-1)}{2} (a_n - 1)^2 \geq \frac{n^2}{4} (a_n - 1)^2,$$

由此, 可得

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

而
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0,$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$$\text{【66】} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

证 我们首先证明

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

事实上, 设 $x_n = \left(\frac{n}{3}\right)^n$,

$$\text{则} \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n 3} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{3},$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad & \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + C_n^2 \frac{1}{n^2} + C_n^3 \frac{1}{n^3} + \cdots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &\leq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}, \\ &= 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3, \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} < n+1,$$

$$\text{而} \quad x_1 = \frac{1}{3} < 1,$$

$$\text{因此} \quad x_n = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}} < n!.$$

$$\text{即} \quad n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n,$$

从而 $0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{3}{n}$,

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$,

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

【67】 当 n 充分大时, 下列各式哪个大?

(1) $100n + 200$ 与 $0.01n^2$;

(2) 2^n 与 n^{1000} ;

(3) 1000^n 或 $n!$

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n + 200}{0.01n^2} = 0,$$

所以当 n 充分大时, $0.01n^2$ 比 $100n + 200$ 大些.

(2) 由第 60 题结果有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1000}}{2^n} = 0,$$

所以当 n 充分大时, 2^n 比 n^{1000} 大.

(3) 由第 61 题结果知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000^n}{n!} = 0,$$

所以当 n 充分大时, $n!$ 比 1000^n 大.

【68】 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0$.

提示: 参照第 10 题.

证 由 10 题结果, 我们有

$$0 < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0$.

【69】 证明序列

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

是单调递增且上方有界, 而序列

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

是单调递减且下方有界. 由此推导出这些序列有共同的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

证 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$= 1 + 1 + C_n^2 \frac{1}{n^2} + C_n^3 \frac{1}{n^3} + \dots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n}$$

$$= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots$$

$$+ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right),$$

而
$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

注意到, 当 $1 \leq k \leq n-1$ 时, $1 - \frac{k}{n+1} > 1 - \frac{k}{n}$

且 x_{n+1} 比 x_n 增加一项正数. 所以 $x_n < x_{n+1}$. 又当 $k > 2$ 时

$$\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1, \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}},$$

所以 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$,

即 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 上方有界.

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 存在, 设为 e .

其次, 由于

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n},$$

即 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \frac{n+1}{n}$,

所以 $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$,

即 $y_{n-1} > y_n$.

又 $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
 $> \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$,

所以, 数列 $y_n (n = 1, 2, \cdots)$ 单调减少且下方有界, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

存在, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$,

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$.

注: 从此题证明知

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

后面题目的解答常用到这一不等式.

【70】 证明

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

当指数 n 为何值, 式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之差小于 0.001?

解 由 69 题的结果知

$$0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

所以 $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$

而 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right]$
 $= \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n},$

因此 $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}.$

要 $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 0.001$, 只要 $\frac{3}{n} \leq 0.001$, 即 $n \geq 3000$. 所以当

指数 n 是一个不小于 3000 的自然数时, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之差小于 0.001.

【71】 假设 $p_n (n=1, 2, \dots)$ 为趋于 $+\infty$ 的任意数列, 而 $q_n (n=1, 2, \dots)$ 为趋于 $-\infty$ ($p_n, q_n \in [-1, 0]$) 的任意数列, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

证 令 $k_n = [p_n]$, 则

$$k_n \leq p_n < k_n + 1,$$

由于 $p_n \rightarrow +\infty$, 故 $k_n \rightarrow +\infty$. 按 69 题的方法, 我们可证 (或利用 89 题的结果)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e,$$

由于 $\frac{1}{k_n} \geq \frac{1}{p_n} > \frac{1}{k_n + 1},$

所以 $\left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} > \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} > \left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n},$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right) = e,$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{-1} = e, \end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e.$

若 $q_n \rightarrow -\infty$, 令 $p_n = -q_n$, 则 $p_n \rightarrow +\infty$. 于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p_n}{p_n-1}\right)^{p_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n-1}\right)^{p_n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{p_n-1}\right) = e, \end{aligned}$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$

【72】 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e.$

由此推导出公式 $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n},$

其中 $0 < \theta_n < 1$, 并计算数 e (精确到 10^{-5}).

证 因为 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\begin{aligned} &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right), \end{aligned}$$

对于固定的 $k (k < n)$, 有

$$x_n > 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

令 $n \rightarrow \infty$, 在上式两边取极限得

$$e \geq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!}.$$

由于此不等式对任何自然数 k 均成立, 因此, 我们有

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq e,$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$,

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e$.

其次, 设 $\beta_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$,

则 $0 < \beta_{n+m} - \beta_n$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)} \right\} \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n+2)^{m-1}} + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1}. \end{aligned}$$

现固定 n , 令 $m \rightarrow \infty$, 取极限得

$$0 < e - \beta_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!} \frac{n+2}{(n+1)^2},$$

而 $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$,

所以 $0 < e - \beta_n < \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}$,

即 $e - \beta_n = \frac{\theta_n}{n!n}$,

其中 $0 < \theta_n < 1$. 因此

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}. \quad (1)$$

下面利用公式①计算 e , 使之准确到 10^{-5} . 首先须确定选取怎样的 n , 才能实现这一精确度. 通过计算知可取 $n = 8$. 事实上, 此时, 公式①中的余项

$$\frac{\theta_8}{8!8} < \frac{1}{8!8} < 3.2 \times 10^{-6},$$

其次, 还须考虑计算每一项时的舍入误差, 为保证精确到 10^{-5} , 我们计算每一项时, 计算到第六位小数, 并采用四舍五入法. 则舍入

误差总的不超过 $\frac{1}{2 \times 10^6} \times 6 = \frac{3}{10^6}$,

于是总误差不超过 $7 \times 10^{-6} < 10^{-5}$.

计算每一项如下

$$\begin{array}{r} 2.000000 \\ \frac{1}{2!} = 0.500000 \\ \frac{1}{3!} = 0.166667 \\ \frac{1}{4!} = 0.041667 \\ \frac{1}{5!} = 0.008333 \\ \frac{1}{6!} = 0.001389 \\ \frac{1}{7!} = 0.000198 \\ + \frac{1}{8!} = 0.000025 \\ \hline 2.718279 \end{array}$$

故 $e \approx 2.71828$, e 介于 2.71827 与 2.71829 之间.

【73】 证明数 e 为无理数.

证 反设 e 为有理数 $\frac{m}{n}$, 则由 72 题的结论, 我们有

$$\frac{m}{n} = e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n} \quad (0 < \theta_n < 1),$$

即
$$\frac{\theta_n}{n!n} = \frac{m}{n} - 2 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \cdots - \frac{1}{n!} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

上面等式两边同乘以 $n!$, 得

$$\frac{\theta_n}{n} = n! \left(\frac{m}{n} - 2 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \cdots - \frac{1}{n!} \right).$$

上式右端为一整数, 右端为一小数, 矛盾.

因此 e 为无理数.

【74】 证明不等式 $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

证 由 8 题的结论, 我们有

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n = \left(\frac{n}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e\left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

下面再证 $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$,

设 $x_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n$, 则有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}e} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}n}{e} < n,$$

而
$$x_1 = \frac{1}{e} < 1,$$

所以
$$x_n = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}} < n!,$$

即
$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!,$$

因此
$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

【75】 证明不等式

(1) $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, 其中 n 为任意自然数.

(2) $1 + \alpha < e^\alpha$, 其中 α 为不为零的实数.

证 (1) 因为 $1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$,

两边取对数即得 $0 < n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$,

所以 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

又 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$,

两边取对数得 $(n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1$,

故 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$,

因此 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

(2) 我们这里只证明当 α 为正有理数的情况, 至于 $\alpha \neq 0$ 为任意实数的情形见 1289 题(1)

设 $\alpha = \frac{p}{q}$, 这里 p, q 为正整数. 而

$$(1+x)^n > 1+nx \quad (x > -1, n \text{ 为正整数}),$$

且 $e > \left(1 + \frac{1}{q}\right)^q$,

所以 $e^\alpha > \left(1 + \frac{1}{q}\right)^{q\alpha} = \left(1 + \frac{1}{q}\right)^p > 1 + \frac{p}{q} = 1 + \alpha$.

【76】 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a$ ($a > 0$),

其中 $\ln a$ 为取 $e = 2.718\cdots$ 作底时数 a 的对数.

证 当 $a = 1$ 时, 等式显然成立.

下面先考虑 $a > 1$ 时的情形.

令 $b_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$, 则 $b_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$,

又 $\frac{\ln a}{n} = \ln(b_n + 1),$

即 $n = \frac{\ln a}{\ln(b_n + 1)},$

所以 $n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{b_n}{\ln(b_n + 1)} \ln a.$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$

故存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, $0 < b_n < 1$. 故对于 $n > N$, 存在唯一正整数 k_n , 使 $\frac{1}{k_n + 1} < b_n < \frac{1}{k_n}$, 且 $k_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$.

由 75 题(1) 知 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$

故 $\frac{1}{k_n + 2} < \ln\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right) \leq \ln(1 + b_n)$
 $< \ln\left(1 + \frac{1}{k_n}\right) < \frac{1}{k_n}.$

从而 $k_n < \frac{1}{\ln(1 + b_n)} < k_n + 2,$

故 $\frac{k_n}{k_n + 1} < \frac{b_n}{\ln(1 + b_n)} < \frac{k_n + 2}{k_n}.$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{k_n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n + 2}{k_n} = 1,$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\ln(1 + b_n)} = 1,$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a.$

设 $0 < a < 1$, 则 $b = \frac{1}{a} > 1.$

由上面的结果有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n\left[\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right] n(b^{\frac{1}{n}} - 1) \\ &= -\ln b = \ln a, \end{aligned}$$

因此对任何 $a > 0$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a$.

利用关于单调有界序列的极限存在的定理, 证明下列各序列的收敛性(77 ~ 81).

$$\text{【77】 } x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \cdots + \frac{p_n}{10^n} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

其中 $p_i (i = 0, 1, 2, \cdots)$ 是非负整数, 从 p_1 起不大于 9.

证 由于 $0 \leq p_i \leq 9 \quad (i = 1, 2, \cdots)$,

故
$$x_{n+1} - x_n = \frac{p_{n+1}}{10^{n+1}} \geq 0,$$

且
$$p_0 \leq x_n \leq p_0 + 9\left(\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^n}\right) < p_0 + 1,$$

即序列 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是单调增加且有界的, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

$$\text{【78】 } x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}.$$

证 当 $n > 10$ 时,

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n+9}{2n-1} < 1,$$

即从第 10 项开始, 序列是单调减少的, 且 $x_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$, 因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

$$\text{【79】 } x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

证 因为 $x_{n+1} = x_n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < x_n$

又 $x_n > 0$. 即序列 $\{x_n\}$ 是单调减少且下方有界的, 故 $\{x_n\}$ 收敛.

$$\text{【80】 } x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

证 $x_{n+1} = x_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > x_n,$

所以序列 $\{x_n\}$ 是单调增加的, 又因为 $1 + a < e^a$, 所以

$$0 < x_n < e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{4}} \cdots e^{\frac{1}{2^n}} = e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}} < e,$$

即序列 $\{x_n\}$ 是有界的, 故 $\{x_n\}$ 收敛.

$$\text{【81】 } x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \dots,$$

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ 重根号}}, \dots$$

n 重根号

证 显然, 序列 $\{x_n\}$ 是单调增加的. 下面我们用数学归纳法证明 $x_n < 2$.

事实上, 当 $n = 1$ 时, $x_1 = \sqrt{2} < 2$,

假设 $x_k < 2$, 则 $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$, 因而, 对一切自然数 n , 均有 $x_n < 2$.

即 $\{x_n\}$ 是有界序列, 因而 $\{x_n\}$ 收敛.

利用柯西判别法, 证明下列各序列的收敛性(82 ~ 86).

$$\text{【82】 } x_n = a_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n.$$

其中 $|a_k| < M (k = 0, 1, 2, \dots)$ 且 $|q| < 1$.

$$\begin{aligned} \text{证 } |x_{n+p} - x_n| &= |a_{n+1} q^{n+1} + \dots + a_{n+p} q^{n+p}| \\ &< M(q)^{n+1} (1 + |q| + \dots + |q|^{p-1}) \\ &< M |q|^{n+1} \frac{1}{1 - |q|}, \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^{n+1} = 0$,

故 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|q|^{n+1} < \frac{1 - |q|}{M} \varepsilon,$$

于是当 $n > N$ 时, 对任何自然数 p 均有

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon,$$

由柯西收敛准则, 知 $\{x_n\}$ 收敛.

$$\text{【83】 } x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \left| 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} \right| \end{aligned}$$

$$< \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

对任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \right\rceil$,

则当 $n > N$ 时, 对任何正整数 p 都有

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

所以序列 $\{x_n\}$ 收敛.

【84】 $x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}.$

证 $|x_{n+p} - x_n|$

$$= \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} \right|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \cdots$$

$$+ \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

对任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 对任何正整数 p 均有

$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, 所以序列 $\{x_n\}$ 收敛.

【85】 $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$

提示: 利用不等式

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

证 $|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \right|,$

而 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$

因而 $|x_{n+p} - x_n|$
 $< \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots$
 $+ \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right)$
 $= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$

对任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$

当 $n > N$ 时, 对任何正整数 p 均有

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon,$$

所以, 序列 $\{x_n\}$ 收敛.

【86】 如果存在数 C , 使得

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < C$$

($n = 2, 3, \cdots$),

则称序列 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 具有有界变差.

证明带有有界变差的序列是收敛的. 举出一个收敛序列而无有界变差的实例.

证 设

$$y_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}|,$$

因 $\{x_n\}$ 是有界变差序列, 则 $\{y_n\}$ 是单调增加且有界的序列, 因此 $\{y_n\}$ 收敛. 由柯西准则, 对任何对给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, $|y_{n+p} - y_n| < \varepsilon$, 即

$$|x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| < \varepsilon,$$

而 $|x_{n+p} - x_n|$
 $\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n|$
 $< \varepsilon,$

所以序列 $\{x_n\}$ 收敛.

序列: $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, (-1)\frac{1}{n}, \cdots$ 是以零为极限的收

敛序列,但它不是有界变差函数.事实上

$$\begin{aligned} & |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{2n} - x_{2n-1}| \\ & > |x_2 - x_1| + |x_4 - x_3| + \cdots + |x_{2n} - x_{2n-1}| \\ & = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

而 $y_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$,

是发散的,又是递增的,故 $y_n \rightarrow +\infty$. 因而 $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \cdots,$

$\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \cdots$ 是无界变差的.

* 证明见 88 题.

【87】 试说明某序列不满足柯西准则的意义.

解 即存在某 $\varepsilon_0 > 0$, 不论对怎样的自然数 N , 总存在 $n_0 > N$ 及 p_0 使得 $|x_{n_0+p_0} - x_{n_0}| \geq \varepsilon_0$.

【88】 利用柯西判别法证明序列 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 的发散性.

证 取 $n+p=2n$, 则

$$\begin{aligned} |x_{2n} - x_n| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以序列 $\{x_n\}$ 发散.

【89】 证明如果序列 $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 收敛, 则其任何子序列也收敛, 并具有同一极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$, 而 $p_k \rightarrow +\infty$, 所以, 对于此 N , 存在正整数 k_0 , 使得当 $k > k_0$ 时, $p_k > N$, 因此

$$|x_{p_k} - a| < \varepsilon,$$

所以子序列 $\{x_{p_k}\}$ 收敛且 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = a$.

【90】 证明: 如果单调序列的某一子序列收敛, 则该单调序

列也是收敛的.

证 设 $\{x_n\}$ 是单调增加的, 子序列 $\{x_{p_k}\}$ 收敛于 a . 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 K , 使当 $k > K$ 时, $|x_{p_k} - a| < \varepsilon$, 令 $N = p_{K+1}$, 若 $n > N$, 由于 $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots \rightarrow +\infty$, 故必有 $p_k (k > K)$ 使 $p_k \leq n < p_{k+1}$. 而

$$|x_{p_k} - a| < \varepsilon, \quad |x_{p_{k+1}} - a| < \varepsilon,$$

又 $x_{p_k} \leq x_n \leq x_{p_{k+1}}$,

故必有 $|x_n - a| < \varepsilon$,

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

【91】 证明: 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$.

证 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$. \exists 正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$,

又 $|x_n - a| \geq ||x_n| - |a||$.

故当 $n > N$ 时, $||x_n| - |a|| < \varepsilon$,

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$.

【92】 若 $x_n \rightarrow a$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可作出哪些解释?

解 若 $a \neq 0$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{a}{a} = 1$.

若 $a = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能不存在.

例如设 $x_n = \frac{1}{3^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}$. 这里 $[a]$ 表 a 的最大整数部分.

即 $\{x_n\}$ 为: $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^3}, \cdots$. 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. 但显然

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x_{2m}}{x_{2m-1}} = 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x_{2m+1}}{x_{2m}} = \frac{1}{3},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 不存在. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在. 设 $b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 则

$-1 \leq b \leq 1$. 反之 $|b| > 1$, 取 r , 使 $|b| > r > 1$.

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = |b|,$$

故存在正整数 N , 使得当 $n \geq N$ 时, $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > r$, 从而, 当 $n \geq N$ 时

$$|x_n| = |x_N| \cdot \left| \frac{x_{N+1}}{x_N} \right| \cdot \left| \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}} \right| \cdots \left| \frac{x_n}{x_{n-1}} \right| > |x_N| \cdot r^{n-N},$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. 这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 相矛盾. 故 $-1 \leq b \leq 1$.

总的来说, 若 $a \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

若 $a = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在也可能不存在, 当存在时, 它必位于区间 $[-1, 1]$.

【93】 证明收敛的数列是有界的.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则对于正数 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 必有

$$|x_n - a| < 1,$$

从而 $|x_n| < |a| + 1 \quad (n > N)$.

令 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |a| + 1\}$,

则 $|x_n| \leq M, \quad (n = 1, 2, \dots),$

即 $\{x_n\}$ 有界.

【94】 证明收敛的数列或达到其上确界, 或达到其下确界, 或两者都达到. 举出这三类序列的例子.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(1) 若 $\{x_n\}$ 为常数数列, 即 $x_n = a (n = 1, 2, \dots)$, 则显然上、下确均达到.

(2) 若 $\{x_n\}$ 为不恒为常数的收敛数列, 则必存在某一正数 ε_0 , 使得 $\{x_n\}$ 中某些点位于区间 $[a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0]$ 之外. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 知位于 $[a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0]$ 之外的只有有限项. 如果在这有限项中有 x_{n_1} 使得 $x_{n_1} > a + \varepsilon_0$, 则 $\{x_n\}$ 取到上确界. 如果在这有限项中有 x_{n_2} 使得 $x_{n_2} < a - \varepsilon_0$, 则 $\{x_n\}$ 达到下确界. 如果在这有限项中即有 x_{n_1} 使

得 $x_{n_1} > a + \varepsilon_0$, 又有 x_{n_2} 使得 $x_{n_2} < a - \varepsilon_0$, 则 $\{x_n\}$ 既达到上确界又达到下确界.

例 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ 达到它的上确界 1;

$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots$ 达到它的下确界 -1 ;

$1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots$ 既达到它的上确界 1, 又达到它的下确界 -1 .

【95】 证明趋向于 $+\infty$ 的数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 一定达到其下确界.

证 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 则存在 N , 使得当 $n > N$ 时, $x_n > x_1$, 故 x_1, x_2, \dots, x_N 中的最小者即为 $\{x_n\}$ 的下确界.

求序列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 的最大项 (96 ~ 98).

【96】 $x_n = \frac{n^2}{2^n}$.

解 当 $n = 3$ 时, $n^2 > 2^n$; 当 $n \neq 3$ 时, $n^2 \leq 2^n$, 所以, 最大项为 $x_3 = \frac{9}{8}$.

【97】 $x_n = \frac{\sqrt{n}}{100 + n}$.

解 $x_n = \frac{\sqrt{n}}{100 + n} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{n} - \frac{10}{\sqrt[4]{n}}\right)^2 + 20} \leq \frac{1}{20}$,

而 $x_{100} = \frac{1}{20}$,

所以, 最大项为 $x_{100} = \frac{1}{20}$.

【98】 $x_n = \frac{1000^n}{n!}$.

解 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1000}{n+1}$.

当 $n+1 < 1000$ 时, $x_{n+1} > x_n$; 当 $n+1 > 1000$ 时, $x_{n+1} < x_n$.
所以最大项为

$$x_{999} = x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!}.$$

求序列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 的最小项 (99 ~ 100).

【99】 $x_n = n^2 - 9n - 100.$

解 因为

$$x_{n+1} - x_n = 2n - 8,$$

故当 $1 \leq n < 4$ 时 $x_{n+1} < x_n$; 当 $n > 4$ 时 $x_{n+1} > x_n$. 而 $x_4 = x_5$,
故最小项为 $x_4 = x_5 = -120$.

【100】 $x_n = n + \frac{100}{n}.$

解 $x_n = n + \frac{100}{n} = \left(\sqrt{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}\right)^2 + 20 \geq 20.$

而 $x_{10} = 20$, 所以最小项为 $x_{10} = 20$.

求出序列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ (101 ~ 110) 的 $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 和 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【101】 $x_n = 1 - \frac{1}{n}.$

解 $\inf\{x_n\} = 0, \sup\{x_n\} = 1,$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

【101.1】 $x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n}\right).$

解 $x_n = \begin{cases} 2 + \frac{3}{2k-1}, & \text{当 } n = 2k-1 \text{ 时,} \\ -\left(2 + \frac{3}{2k}\right), & \text{当 } n = 2k \text{ 时,} \end{cases}$

故 $\sup\{x_n\} = 2 + 3 = 5,$

$$\inf\{x_n\} = -\left(2 + \frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -2, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

$$\text{【102】 } x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

$$\text{解 } x_n = \begin{cases} -\frac{1}{2k-1}, & \text{当 } n = 2k-1 \text{ 时,} \\ \frac{1}{2k} + 1, & \text{当 } n = 2k \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 k 为自然数.

$$\text{所以 } \inf\{x_n\} = -1, \sup\{x_n\} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

$$\text{【103】 } x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}.$$

$$\text{解 } x_n = \begin{cases} 1 + (-1)^k \frac{2k}{2k+1} & \text{当 } n = 2k \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } n = 2k-1 \text{ 时} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 + \frac{4l}{4l+1} & \text{当 } n = 4l \text{ 时} \\ 1 - \frac{4l+2}{4l+3} & \text{当 } n = 4l+2 \text{ 时} \\ 1 & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{故 } \inf\{x_n\} = 0, \sup\{x_n\} = 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

$$\text{【104】 } x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

$$\text{解 } x_n = \begin{cases} 1 - 2 + 3, & \text{当 } n = 4k \text{ 时,} \\ 1 + 2 + 3, & \text{当 } n = 4k+1 \text{ 时,} \\ 1 - 2 - 3, & \text{当 } n = 4k+2 \text{ 时,} \\ 1 + 2 - 3, & \text{当 } n = 4k+3 \text{ 时,} \end{cases}$$

$$\text{故 } \inf\{x_n\} = -4, \sup\{x_n\} = 6,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -4, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 6.$$

【105】 $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}.$

解
$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{3k}{3k+2}, & \text{当 } n = 3k+1 \text{ 时,} \\ -\frac{1}{2} \frac{3k+1}{3k+3}, & \text{当 } n = 3k+2 \text{ 时,} \\ \frac{3k+2}{3k+4}, & \text{当 } n = 3(k+1) \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 $k = 0, 1, 2, \dots,$

故 $\inf\{x_n\} = -\frac{1}{2}, \sup\{x_n\} = 1,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{1}{2}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

【106】 $x_n = (-1)^n n.$

解 $\inf\{x_n\} = -\infty, \sup\{x_n\} = +\infty,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

【107】 $x_n = -n[2 + (-1)^n].$

解 $\inf\{x_n\} = -\infty, \sup\{x_n\} = -1,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

【108】 $x_n = n^{(-1)^n}.$

解
$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2k+1}, & \text{当 } n = 2k+1 \text{ 时,} \\ 2(k+1), & \text{当 } n = 2k+2 \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 $k = 0, 1, 2, \dots,$

故 $\inf\{x_n\} = 0, \sup\{x_n\} = +\infty,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

【109】 $x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}.$

解
$$x_n = \begin{cases} 1 + (-1)^k (2k+1), & n = 2k+1, \\ 1, & n = 2k+2, \end{cases}$$

其中 $k = 0, 1, 2, \dots,$

故 $\inf\{x_n\} = -\infty, \sup\{x_n\} = +\infty,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

【110】 $x_n = \frac{1}{n-10.2}$

解 当 n 从 1 到 10 时, x_n 由负数往下降;

当 n 从 11 到 $+\infty$ 时, x_n 由正数往下降, 故

$$\inf\{x_n\} = x_{10} = -5, \quad \sup\{x_n\} = x_{11} = 1.25,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 和 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ (111 ~ 115).

【111】 $x_n = \frac{n^2}{1+n} \cos \frac{2n\pi}{3}.$

$$\text{解 } x_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{(3k+1)^2}{1+(3k+1)^2}, & \text{当 } n = 3k+1 \text{ 时,} \\ -\frac{1}{2} \frac{(3k+2)^2}{1+(3k+2)^2}, & \text{当 } n = 3k+2 \text{ 时,} \\ \frac{(3k+3)^2}{1+(3k+3)^2}, & \text{当 } n = 3k+3 \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 $k = 0, 1, 2, \dots,$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{1}{2}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$

【112】 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}.$

$$\text{解 } x_n = \begin{cases} -\left(1 + \frac{1}{4k+1}\right)^{4k+1} + (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 4k+1, \\ \left(1 + \frac{1}{4k+2}\right)^{4k+2} + (-1)^k, & n = 4k+2, \\ -\left(1 + \frac{1}{4k+3}\right)^{4k+3} + (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 4k+3, \\ \left(1 + \frac{1}{4k+4}\right)^{4k+4}, & n = 4k+4, \end{cases}$$

其中 $k = 0, 1, 2, \dots,$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\left(e + \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = e + 1.$

【113】 $x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}.$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$

【114】 $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n \cdot (-1)^n}}.$

解 $x_n = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{2^{2k+1}}\right)^{\frac{1}{2k+1}}, & n = 2k+1, \\ (1 + 2^{2(k+1)})^{\frac{1}{2(k+1)}}, & n = 2(k+1), \end{cases}$

其中 $k = 0, 1, 2, \dots,$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$

【115】 $x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3}.$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$

求下列各序列的聚点(116 ~ 120).

【116】 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$, 聚点为 $0, 1$.

【117】 $1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4},$
 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots.$

解 因为对固定的 k

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{k},$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$

故序列的聚点为 $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots.$

$$\text{【118】 } \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

解 该序列正好包含 $(0,1)$ 中的全部有理数,故对于闭区间 $[0,1]$ 上的每点 x 在其任意的邻域内必有此数列中的无穷多个数,因此 x 必可作为某子列的极限,所以, x 是所述数列的聚点.因此 $[0,1]$ 中的任何点都是所述数列的聚点,而 $[0,1]$ 外的点都不是所述数列的聚点.

$$\text{【119】 } x_n = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n.$$

$$\text{解 } x_n = \begin{cases} 3\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) - 2, & \text{当 } n = 2k+1 \text{ 时,} \\ 3\left(1 - \frac{1}{2k+2}\right) + 2, & \text{当 } n = 2k+2 \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 $k = 0, 1, 2, \dots$,

故聚点为 1, 5.

$$\text{【120】 } x_n = \frac{1}{2}[(a+b) + (-1)^n(a-b)].$$

$$\text{解 } x_n = \begin{cases} a & n \text{ 为偶数} \\ b & n \text{ 为奇数} \end{cases}, \text{ 故聚点为 } a, b.$$

【121】 举出以已知数 a_1, a_2, \dots, a_p 作为聚点的数列的例子.

解 数列

$$a_1 + \frac{1}{2}, a_2 + \frac{1}{2}, \dots, a_p + \frac{1}{2}, a_1 + \frac{1}{3}, a_2 + \frac{1}{3}, \dots$$

$$a_p + \frac{1}{3}, \dots, a_1 + \frac{1}{n}, a_2 + \frac{1}{n}, \dots, a_p + \frac{1}{n}, \dots$$

以 a_1, a_2, \dots, a_p 为聚点.

【122】 举出数列的例子,对这个数列,已知数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 所有各项均为其聚点,已举出的序列一定还有哪些聚点?

解 数列

$$a_1 - 1, a_1 - \frac{1}{2}, a_2 - \frac{1}{2}, a_1 - \frac{1}{3}, a_2 - \frac{1}{3}, a_3 - \frac{1}{3},$$

$$a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{4}, \dots,$$

$$a_1 = \frac{1}{n}, a_2 = \frac{1}{n}, a_3 = \frac{1}{n}, \dots, a_n = \frac{1}{n}, \dots$$

是以 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 为其聚点的数列, 并且数列 $\{a_n\}$ 的聚点也为该数列的聚点.

【123】 列举下列序列的例子:

- (1) 无有限的聚点;
- (2) 有惟一的有限聚点, 但不收敛;
- (3) 有无限多的聚点;
- (4) 以每一实数作为聚点.

证 (1) 序列 $x_n = n$ 没有有限的聚点.

(2) 序列 $1, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \dots, \frac{1}{n}, n, \dots$, 有唯一聚点 0, 但序列不收敛.

(3) 117 题及 118 题的序列均有无限多的聚点.

(4) 所有有理数排列而成的序列.

【124】 证明序列 x_n 和 $y_n = x_n \sqrt[n]{n} (n = 1, 2, \dots)$ 有相同的聚点.

证 设 a 为 $\{x_n\}$ 的一聚点, 则存在一子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a.$$

则由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 知,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \sqrt[n_k]{n_k} = a,$$

即 a 也为 $\{y_n\}$ 的一聚点.

同理可证: 若 b 为 $\{y_n\}$ 的一聚点, 则 b 必为 $\{x_n\}$ 的一聚点.

【125】 证明有界序列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 必有其收敛的子序列 $x_{p_n} (n = 1, 2, \dots)$.

证 因为 $\{x_n\}$ 有界, 故存在有限实数 a, b 使得

$$a \leq x_n \leq b \quad (n = 1, 2, \dots).$$

将区间 $[a, b]$ 两等分,得区间 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$,其中至少有一个包含 $\{x_n\}$ 中的无限多项,将它记为 $[a_1, b_1]$ (若两者均包含 $\{x_n\}$ 中的无限多项,则任取其一作为 $[a_1, b_1]$),再将区间 $[a_1, b_1]$ 等分,又可得到 $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$,它包含 $\{x_n\}$ 中的无限多项.依此类推,我们得到一串区间:

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots,$$

其中每一 $[a_n, b_n]$ 均包含 $\{x_n\}$ 中的无限多项,且有

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0.$$

又由 a_n, b_n 的选取知

$$a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b,$$

即 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为单调有界数列.故 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均收敛且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \stackrel{\text{设}}{=} c,$$

c 是所有区间 $[a_n, b_n]$ ($n=1, 2, \cdots$)唯一的公共点,下面我们证明 c 是 $\{x_n\}$ 的聚点.现按下法选取 $\{x_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{p_k}\}$:在包含于 $[a_1, b_1]$ 内的 x_n 中任取一个作为 x_{p_1} ,然后在包含于 $[a_2, b_2]$ 内且在 x_{p_1} 后面的 x_n 中任取一个作 x_{p_2} ,如此类推(这是可能的,因为每个 $[a_k, b_k]$ 中均包含有 x_n 中的无穷多项),于是我们得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{p_k}\}$,满足

$$a_k \leq x_{p_k} \leq b_k.$$

因为 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = c,$

故 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = c,$

即 c 为 $\{x_n\}$ 的一个聚点.

【126】 证明,如果序列 x_n ($n=1, 2, \cdots$)无界,则存在子序列 x_{p_n} ,使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \infty$.

证 因为 x_n ($n=1, 2, \cdots$)无界,故存在某项 x_{p_1} 满足 $|x_{p_1}| > 1$.

由于数列 x_n ($n=p_1+1, p_2+2, \cdots$)也无界,故存在某项

x_{p_2} ($p_2 > p_1$) 使得 $|x_{p_2}| > 2$; 依此类推, 对于任意正整数 k 存在某项 x_{p_k} ($p_k > p_{k-1}$) 满足

$$|x_{p_k}| > k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

因此 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = \infty$.

【127】 假设序列 x_n ($n = 1, 2, \dots$) 收敛, 而序列 y_n ($n = 1, 2, \dots$) 发散, 则能否确认关于序列

$$(1) x_n + y_n; \quad (2) x_n y_n$$

的收敛性? 试举适当的例子说明.

解 (1) $x_n + y_n$ 一定发散, 事实上, 若 $x_n + y_n$ 收敛, 则

$$y_n = (x_n + y_n) - x_n$$

也收敛, 这与题设相矛盾.

(2) $x_n y_n$ 可能收敛, 也可能发散.

例: (a) $x_n = \frac{1}{n^2}$ ($n = 1, 2, \dots$) 收敛,

$$y_n = n \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ 发散,}$$

而 $x_n y_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 收敛.

(b) $x_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 收敛,

$$y_n = n^2 \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ 发散,}$$

$$x_n y_n = n \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ 发散.}$$

【128】 假设序列 x_n 和 y_n ($n = 1, 2, \dots$) 发散, 能否确认序列

$$(1) x_n + y_n; \quad (2) x_n y_n$$

也发散, 试举适当例子说明.

解 不能, 例如

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2},$$

$$y_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

都为发散数列, 但

$$x_n + y_n = 1, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$x_n y_n = 0, (n = 1, 2, \dots),$$

均为收敛序列.

【129】 假设: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 和 $y_n (n = 1, 2, \dots)$ 为任意序列, 能否确认 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$? 试举适当的例子说明.

解 不能, 例如设

$$x_n = \frac{1}{n}, y_n = n^2,$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

但 $x_n y_n = n$ 为发散序列.

【130】 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 由此能否得出或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$?

分析下列序列: $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}, y_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$
($n = 1, 2, \dots$).

解 不能, 例如设

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}, y_n = \frac{1-(-1)^n}{2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

但 x_n 及 y_n 均为发散的.

【131】 证明

$$(1) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$(2) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

并举出上述不等式中严格不等式成立的例子.

证 (1) 设 $\alpha = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ 根据定义, 存在 $\{x_n + y_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} + y_{n_k}) = \alpha = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n),$$

对于序列 $\{x_{n_k}\}$, 存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使得

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow \beta = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k},$$

显然 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$,

又由于 $y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) - x_{n_{k_i}} \rightarrow \alpha - \beta$,

所以 $\alpha - \beta$ 为 $\{y_n\}$ 的一个聚点, 从而

$$\alpha - \beta \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \alpha \geq \beta + \lim_{k \rightarrow \infty} y_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

下面再证右边的不等式.

设 $\alpha' = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 则根据定义, 存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \alpha',$$

对于序列 $\{y_{n_k}\}$, 必有子序列

$$y_{n_{k_i}} \rightarrow \beta' = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

由于 $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) = \alpha' + \beta'$,

故 $\alpha' + \beta'$ 是 $\{x_n + y_n\}$ 的一个聚点. 从而

$$\alpha' + \beta' \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n),$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \alpha' + \beta' \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

(2) 设 $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, 则根据定义, 存在 $\{y_n\}$ 的一个子序列 $\{y_{n_k}\}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \tau$.

对于序列 $\{x_{n_k}\}$ 存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使得

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow \gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k},$$

而显然 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$,

由于 $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) = \gamma + \tau$,

故 $\gamma + \tau$ 为 $\{x_n + y_n\}$ 的一个聚点, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \gamma + \tau \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

下面证明右边的不等式, 存在 $\{x_n + y_n\}$ 的一个子序列

$$x_{n_k} + y_{n_k},$$

使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} + y_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \stackrel{\Delta}{=} A$.

对于序列 $\{x_{n_k}\}$, 存在子序列

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow B = \varliminf_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

由于 $y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) - x_{n_{k_i}} \rightarrow A - B$,

故 $A - B$ 为 $\{y_n\}$ 的一个聚点, 从而

$$A - B \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

因此 $\varliminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = A \leq B + \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n$.

下面是不等号成立的例子.

$$\text{如设 } x_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2},$$

$$y_n = 1 + (-1)^n, n = 1, 2, \dots,$$

$$\begin{aligned} \text{则有 } \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n &= 0 < \varliminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \\ &= 1 < \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n = 2. \end{aligned}$$

如设

$$x_n = 1 + (-1)^n,$$

$$y_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}, n = 1, 2, \dots,$$

则有

$$\begin{aligned} \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n &= 1 < \varliminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \\ &= 2 < \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n = 3. \end{aligned}$$

【132】 假设 $x_n \geq 0$ 及 $y_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$ 证明

$$(1) \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$(2) \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

并举出上述不等式中产生严格不等式成立的例子.

证 (1) 先证右边的不等式, 设 $\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$, 则根据定义存在 $\{x_n\}$ 的一子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $\varliminf_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \alpha \geq 0$ 对于序列 $\{y_{n_k}\}$, 存在一子序列 $\{y_{n_{k_i}}\}$, 使得 $y_{n_{k_i}} \rightarrow \beta = \varliminf_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \geq 0$, 显然 $\beta \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n$ 由于

$x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}} \rightarrow \alpha\beta$, 故 $\alpha\beta$ 是 $\{x_n y_n\}$ 的一个聚点. 因此

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \alpha\beta \leq \alpha \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

再证左边的不等式, 若 $\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 则不等式显然成立. 故不妨设

$\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha > 0$, 于是存在正整数 N_0 , 使得当 $n > N_0$ 时, $x_n > 0$, 根

据定义, 存在 $\{x_n y_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k} y_{n_k}\}$ 使

$$x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow \varliminf_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \alpha' \geq 0,$$

对于序列 $\{x_{n_k}\}$, 存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$, 使得

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow \varliminf_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \beta' \geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha > 0,$$

而 $x_n > 0 \quad (n > N_0)$,

故 $y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} \cdot y_{n_{k_i}}) \cdot \frac{1}{x_{n_{k_i}}} \rightarrow \frac{\alpha'}{\beta'}$,

故 $\frac{\alpha'}{\beta'}$ 为 $\{y_n\}$ 的一聚点, 从而

$$\frac{\alpha'}{\beta'} \geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

所以 $\varliminf_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \alpha' \geq \beta' \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n \geq (\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n) (\varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n)$.

(2) 先证右边的不等式. 可设 $\{y_n\}$ 有界, 事实上, 若 $\{y_n\}$ 无界, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, 不等式显然成立. 设

$$A = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n),$$

则根据定义, 存在 $\{x_n y_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k} y_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} y_{n_k}) = A,$$

对于 $\{x_{n_k}\}$ 存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使得

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow B = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq 0.$$

若 $B = 0$, 则由于 $\{y_n\}$ 有界, 知

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}}) = 0,$$

从而 $A = 0$. 因此不等式显然成立.

故设 $B > 0$, 从而当 i 充分大时 ($i > i_0$)

$$x_{n_{k_i}} > 0,$$

$$\text{故 } y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} \cdot y_{n_{k_i}}) \cdot \frac{1}{x_{n_{k_i}}} \rightarrow \frac{A}{B}.$$

因此 $\frac{A}{B}$ 是 $\{y_n\}$ 的一个聚点,从而

$$\frac{A}{B} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\text{故 } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = A \leq B(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

再证左边的不等式,根据定义,存在 $\{y_n\}$ 的一个子列 $\{y_{n_k}\}$ 使得

$$y_{n_k} \rightarrow C = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \geq 0,$$

对于 $\{x_{n_k}\}$, 存在子列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使 $x_{n_{k_i}} \rightarrow D = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq 0$,

$$\text{而 } \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0,$$

且 $x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}} \rightarrow DC$, 故 DC 为 $\{x_n y_n\}$ 的一个聚点,从而

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \geq DC \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

下面是不等号成立的例子

如令 $\{x_n\}$ 为: $\frac{1}{3}, 3, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{3}, 3, \dots$

$\{y_n\}$ 为: $3, \frac{1}{9}, 3, \frac{1}{9}, 3, \frac{1}{9}, \dots$

$$\begin{aligned} \text{则有不等式 } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n &= \frac{1}{27} < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \\ &= \frac{1}{3} < (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n)(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) = 1, \end{aligned}$$

再令 $\{x_n\}$ 为: $3, \frac{1}{9}, 3, \frac{1}{9}, 3, \frac{1}{9}, \dots$

$\{y_n\}$ 为: $\frac{1}{3}, 3, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{3}, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \text{则有 } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n &= \frac{1}{3} < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \\ &= 1 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 9. \end{aligned}$$

【133】 证明:若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在,则对任何的序列 $y_n (n = 1, 2, \dots)$ 都有

$$(1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$(2) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (x_n \geq 0).$$

证 (1) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在,故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

利用 131 题结果,有

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \\ &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n), \end{aligned}$$

因此 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$

(2) 分三种情况讨论:

(i) 设 $y_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$

则由 132 题的结果知

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \\ &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n). \end{aligned}$$

故 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$

(ii) 设 $y_n \leq 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$

则 $-y_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$

于是由 132 题的结果有

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n \cdot y_n) &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \\ &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n), \end{aligned}$$

所以 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n),$

由上、下极限的定义,显然有等式

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n),$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

因此此时仍有 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$.

(iii) 设 $\{y_n\}$ 中有无穷多项是非负的, 设这些项构成的子列为 $\{y_{n_k}\} (y_{n_k} \geq 0, k = 1, 2, \dots)$ (如果 $\{y_n\}$ 中只有有限项是非负的, 则从某一项开始有 $y_n < 0$, 这时由(ii) 即知所要证的等式成立).

注意到 $x_n \geq 0$, 故有

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} y_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \cdot \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.\end{aligned}$$

【134】 证明: 若对于某个序列 $x_n (n = 1, 2, \dots) (x_n \geq 0)$, 任何序列 $y_n (n = 1, 2, \dots)$ 都使下列两个等式中至少有一个成立:

$$(1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\text{或 } (2) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

则序列 x_n 是收敛的.

证 若(1) 成立, 设

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

取 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \alpha,$$

取 $A > \max\{-\alpha + 1, 0\}$,

$$\text{令 } y_n = \begin{cases} -x_n, & \text{当 } n \neq n_k \text{ 时,} \\ A, & \text{当 } n = n_k \text{ 时,} \end{cases}$$

$$\text{则 } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \alpha + A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + A.$$

又由(1) 有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + A,$$

$$\text{从而 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

即 $\{x_n\}$ 收敛, 若(2) 成立, 取同样的 y_n , 注意到 $x_n \geq 0$. 则有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \alpha A = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) A.$$

$$\text{而由(2) 有 } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) A,$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$,

即 $\{x_n\}$ 收敛.

【135】 证明:若 $x_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 1$, 则序列 x_n 收敛.

证 由假设知

$$0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n < +\infty, 0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} < +\infty.$$

利用 132 题的结果,有

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n \cdot \frac{1}{x_n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(x_n \cdot \frac{1}{x_n} \right) = 1, \end{aligned}$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 1 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}$,

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

即 x_n 收敛.

【136】 证明:若序列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 有界,且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0,$$

则这个序列的聚点密布在下极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 和上极限 $L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ 之间,亦即在区间 $[l, L]$ 中的任意一个数都是该序列的聚点.

证 由定义, l, L 都是 $\{x_n\}$ 的聚点, 设 $a \in (l, L)$. 我们来证明 a 是 x_n 的聚点. 我们首先证明论断: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 及任意给定的正整数 N , 必存在正整数 $\bar{n} > N$

使得 $|\bar{x}_n - a| < \varepsilon$,

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$,

则必有正整数 N' , 使得当 $n > N'$ 时

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon,$$

令 $N_0 = \max\{N, N'\}$, 则序列 $x_n (n = N_0 + 1, N_0 + 2, \dots)$ 中必至

少有两项 $x_{n'}, x_{n''}$ 存在, 使 $x_{n'} < a, x_{n''} > a$ (因为否则的话, 如无小于 a 的项, 则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq a,$$

这与 $l < a$ 矛盾, 如无大 a 的项, 则必有 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq a$, 这与 $a < L$ 矛盾), 不妨设 $n' < n''$. 令满足 $n' \leq n \leq n''$ 且使 $x_n < a$ 的正整数 n 中之最大者为 \bar{n} , 显然 $\bar{n} \leq n'' - 1$ 且

$$x_{\bar{n}} < a, x_{\bar{n}+1} > a,$$

故 $\bar{n} > N, \bar{n} > N'$,

并且 $|x_{\bar{n}} - a| < x_{\bar{n}+1} - x_{\bar{n}} < \varepsilon$,

论断的结论成立.

现取 $\varepsilon_1 = 1, N_1 = 1$, 则存在 $x_{n_1} (n_1 > 1)$ 使 $|x_{n_1} - a| < 1$, 再取 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}, N_2 = n_1$, 则存在 $x_{n_2} (n_2 > n_1)$ 使得

$$|x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}.$$

又取 $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}, N_3 = n_2$, 则存在 $x_{n_3} (n_3 > n_2)$ 使

$$|x_{n_3} - a| < \frac{1}{3},$$

这样继续下去, 则得 x_n 的一个子列 x_{n_k} 满足

$$|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k},$$

故 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$, 即 a 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点.

【137】 假设数列 $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ 满足条件

$$0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n \quad (m, n = 1, 2, \dots),$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ 存在.

证 由于

$$x_n \leq x_{n-1} + x_1 \leq x_{n-2} + 2x_1 \leq \dots \leq nx_1,$$

故 $0 \leq \frac{x_n}{n} \leq x_1$, 即数列 $\left\{ \frac{x_n}{n} \right\}$ 有界. 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = a,$$

则 $0 \leq a \leq x_1$. 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N > 1$, 使

$$\frac{x_N}{N} < a + \varepsilon,$$

对任何正整数 $n > N$ 有 $n = qN + r$.

其中 q 为正整数, $0 \leq r < N$, 于是

$$\begin{aligned} x_n &= x_{qN+r} \leq x_{qN} + x_r \\ &\leq x_{(q-1)N} + x_N + rx_1 \leq \cdots \\ &\leq qx_N + rx_1 \leq qx_N + Nx_1, \end{aligned}$$

$$\text{从而 } \frac{x_n}{n} \leq \frac{qx_N}{n} + \frac{Nx_1}{n} \leq \frac{x_N}{N} + \frac{Nx_1}{n} < a + \varepsilon + \frac{Nx_1}{n},$$

由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq a + \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n},$$

$$\text{因此 } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ 存在.

【138】 证明: 如果序列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 收敛, 则算术平均值的序列

$$\xi_n = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) (n = 1, 2, \dots)$$

也收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$,

反之则结论不正确, 请举例说明.

证 法一: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得

当 $n > N$ 时,

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

即 $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

从而当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned}\xi_n &= \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ &\leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N + (n - N)(a + \varepsilon)}{n},\end{aligned}$$

因此 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq a + \varepsilon$.

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq a,$$

同理可证

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n \geq a.$$

因此 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a$.

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a$

法二: 令

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

则 $\xi_n = \frac{S_n}{n} = \frac{S_N}{n} + \frac{x_{N+1} + \cdots + x_n}{n - N} \cdot \left(1 - \frac{N}{n}\right).$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 使得当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

即 $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad (n = N + 1, N + 2, \cdots),$

故 $\frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \cdots + x_n}{n - N} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$

即 $\frac{x_{N+1} + \cdots + x_n}{n - N} = a + \alpha, |\alpha| < \varepsilon.$

这样 $\frac{S_n}{n} = \frac{S_N}{n} + (a + \alpha)\left(1 - \frac{N}{n}\right),$

因此 $\left| \frac{S_n}{n} - a \right| \leq \frac{|S_N|}{n} + |a| + (|a| + |a|) \frac{N}{n},$

对于固定的 N , 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_N|}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N}{n} = 0,$

故存在 $N' > N$ 使得当 $n > N'$ 时, 有

$$\frac{|S_N|}{n} < \epsilon, \frac{N}{n} < \frac{\epsilon}{|a| + \epsilon}.$$

于是, 当 $n > N'$ 时, 恒有 $\left| \frac{S_n}{n} - a \right| < 3\epsilon.$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = a,$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$

但反之不然, 例如设

$$x_n = (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

则 $\xi_n = \begin{cases} 0, & \text{若 } n \text{ 为偶数,} \\ -\frac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数,} \end{cases}$

ξ_n 收敛于 0, 但 x_n 却发散.

【139】 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty.$$

证 法一: 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 故对于任给的 $M > 0$ 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, $x_n > M$. 设

$$\xi_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

则当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned} \xi_n &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{n} + \frac{x_{N+1} + \cdots + x_n}{n} \\ &> \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{n} + \frac{(n-N)M}{n}. \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 两边取下极限, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \geq M$.

由 M 的任意性, 我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = +\infty$.

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$.

法二: 设 $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$,

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

故对于任给的 $M > 0$, 存在自然数 N , 使当 $n > N$ 时, $x_n > 3M$

故 $\frac{S_n}{n} = \frac{S_N}{n} + \frac{S_n - S_N}{n - N} \left(1 - \frac{N}{n}\right) > \frac{S_N}{n} + 3M \left(1 - \frac{N}{n}\right)$,

而对于此固定的 N

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_N}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{N}{n}\right) = 1,$$

故可取自然数 $N' > N$, 使得当 $n > N'$ 时,

$$\frac{|S_N|}{n} < \frac{M}{2}, 1 - \frac{N}{n} > \frac{1}{2}.$$

于是当 $n > N'$ 时, $\frac{S_n}{n} > M$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$.

【140】 证明: 如果序列 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 收敛, 及 $x_n > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 因 $x_n > 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$,

故 $a \geq 0$. 先考虑 $a > 0$ 时的情况, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \ln a$.

于是, 由 138 题的结论有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n) = \ln a,$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} (\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n)} = e^{\ln a} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$

若 $a = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\ln x_n) = +\infty$.

由 139 题的结论, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (-\ln x_1 - \ln x_2 - \cdots - \ln x_n) = +\infty,$$

因此
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{n}(-\ln x_1 - \ln x_2 - \cdots - \ln x_n)} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

【141】 证明: 若 $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \cdots$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在,

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

证 设 $y_1 = x_1$,

$$y_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \cdots),$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在, 设为 a , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在且为 a , 故由 140 题结果有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdots y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

【142】 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

证 设 $x_n = \frac{n^n}{n!}$ ($n = 1, 2, \cdots$),

则
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

所以, 由 141 题结果有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = e.$$

【143】 证明(施托尔茨定理): 若

(1) $y_{n+1} > y_n$ ($n = 1, 2, \cdots$);

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ 存在,

则
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

证 法一: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a$,

由此, 并注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, 知对于给定的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N ,

使得当 $n > N$ 时, 恒有 $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - a \right| < \varepsilon$, 且 $y_n > 0$.

即

$$a - \varepsilon < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < a + \varepsilon \quad (n = N+1, N+2, \dots).$$

又因为 $y_{n+1} > y_n$, 所以有

$$(a - \varepsilon)(y_{N+2} - y_{N+1}) < x_{N+2} - x_{N+1} < (a + \varepsilon)(y_{N+2} - y_{N+1})$$

$$(a - \varepsilon)(y_{N+3} - y_{N+2}) < x_{N+3} - x_{N+2} < (a + \varepsilon)(y_{N+3} - y_{N+2})$$

...

$$(a - \varepsilon)(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n < (a + \varepsilon)(y_{n+1} - y_n).$$

从而

$$(a - \varepsilon)(y_{n+1} - y_{N+1}) < x_{n+1} - x_{N+1} < (a + \varepsilon)(y_{n+1} - y_{N+1}),$$

即
$$(a - \varepsilon) \left(1 - \frac{y_{N+1}}{y_{n+1}} \right) + \frac{x_{N+1}}{y_{n+1}}$$

$$< \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} < (a + \varepsilon) \left(1 - \frac{y_{N+1}}{y_{n+1}} \right) + \frac{x_{N+1}}{y_{n+1}}.$$

令 $n \rightarrow \infty$ 分别取上, 下极限, 并注意到 $y_n \rightarrow +\infty$, 我们有

$$a - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq a + \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 我们有 $a \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = a$,

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$.

法二: 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a$, 且 $y_n \rightarrow +\infty$, 所以对任给的 $\varepsilon >$

0, 存在自然数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{且} \quad y_n > 0$$

即
$$a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < a + \frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为 $y_{n+1} > y_n$, 所以 $y_{n+1} - y_n > 0$.

故
$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+2} - y_{N+1}) < x_{N+2} - x_{N+1}$$

$$< \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+2} - y_{N+1})$$

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+3} - y_{N+2}) < x_{N+3} - x_{N+2}$$

$$< \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+3} - y_{N+2})$$

...

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n$$

$$< \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n+1} - y_n).$$

从而
$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n+1} - y_{N+1}) < x_{n+1} - x_{N+1}$$

$$< \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n+1} - y_{N+1}),$$

即
$$a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n+1} - x_{N+1}}{y_{n+1} - y_{N+1}} < a + \frac{\varepsilon}{2},$$

所以当 $n > N$ 时, $\left| \frac{x_{n+1} - x_{N+1}}{y_{n+1} - y_{N+1}} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$

另外, 有(当 $n > N+1$ 时)

$$\frac{x_n}{y_n} - a = \frac{x_{N+1} - ay_{N+1}}{y_n} + \left(1 - \frac{y_{N+1}}{y_n}\right) \cdot \left(\frac{x_n - x_{N+1}}{y_n - y_{N+1}} - a\right),$$

所以
$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| \leq \left| \frac{x_{N+1} - ay_{N+1}}{y_n} \right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

而对于固定的 N , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{N+1} - ay_{N+1}}{y_n} = 0.$

所以存在自然 $N' > N+1$ 使得当 $n > N'$ 时,

$$\left| \frac{x_{N+1} - ay_{N+1}}{y_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此当 $n > N'$ 时

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| < \epsilon,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$

注 本题中,若将条件(3)换为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty \quad (\text{或 } -\infty),$$

结论仍成立,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty \quad (\text{或 } -\infty).$$

详见菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第一章第二节.

【144】 求值:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{a^n} \quad (a > 1); (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lg n}{n}.$$

解 (1) 设 $x_n = n^2$,

$$y_n = a^n \quad (a > 1),$$

则 $y_{n+1} > y_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty.$

而 $\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{a^{n+1} - a^n} = \frac{2n+1}{a^n(a-1)},$

再设 $u_n = 2n+1, y_n = a^n,$

则 $\frac{u_{n+1} - u_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{2(n+1) - 2n}{a^{n+1} - a^n} = \frac{2}{a^n(a-1)} \rightarrow 0,$

根据 143 题结论有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{y_{n+1} - y_n} = 0,$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{a^n(a-1)} = 0.$$

(2) 设 $x_n = \lg n, y_n = n,$

则 $y_{n+1} > y_n \quad y_n \rightarrow \infty,$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0,$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = 0.$

注: 143 题的结果常用来处理“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型的待定式 $\frac{x_n}{y_n}$ 的极限.

【145】 证明: 若 p 为自然数, 则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}.$$

证 (1) 设 $x_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p, y_n = n^{p+1},$

则 $y_{n+1} > y_n \quad y_n \rightarrow +\infty,$

且有
$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} \\ &= \frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p + C_{p+1}^2 n^{p-1} + \cdots + 1} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}{(p+1) + O\left(\frac{1}{n}\right)} \rightarrow \frac{1}{p+1}, \end{aligned}$$

其中 $O\left(\frac{1}{n}\right)$ 为 $\frac{1}{n}$ 的同阶无穷小. 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} O\left(\frac{1}{n}\right) \cdot n = A \neq 0.$

故
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

(2) 设 $x_n = (p+1)(1^p + 2^p + \cdots + n^p) - n^{p+1}$,

$$y_n = (p+1)n^p,$$

则

$$y_{n+1} > y_n \quad y_n \rightarrow +\infty,$$

且

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \frac{(p+1)(n+1)^p + [n^{p+1} - (n+1)^{p+1}]}{(p+1)[(n+1)^p - n^p]} \\ &= \frac{\frac{p(p+1)}{2}n^{p-1} + O(n^{p-2})}{p(p+1)n^{p-1} + O(n^{p-2})} \\ &= \frac{\frac{p(p+1)}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)}{p(p+1) + O\left(\frac{1}{n}\right)} \rightarrow \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

其中 $O(n^{p-2})$ 表示 n^{p-2} 的同阶无穷大, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{O(n^{p-2})}{n^{p-2}} = A \quad (0 < A < +\infty),$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2},$

(3) 设 $x_n = 1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p,$

$$y_n = n^{p+1},$$

则

$$y_{n+1} > y_n \text{ 且 } y_n \rightarrow +\infty.$$

而

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \frac{(2n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} \\ &= \frac{(2n+1)^p}{(p+1)n^p + O(n^{p-1})} \\ &= \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^p}{(p+1) + O\left(\frac{1}{n}\right)} \rightarrow \frac{2^p}{p+1}, \end{aligned}$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}.$

【146】 证明序列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

收敛. 因此下式成立:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \epsilon_n,$$

式中 $C = 0.577216\cdots$ 称作欧拉常数, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\epsilon_n \rightarrow 0$.

解 由(75)题的结论有 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$,

故 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$,

则 $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$.

令 $n = 1, 2, \cdots$ 得

$$\ln 2 - \ln 1 < 1$$

$$\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$$

...

$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

相加之得 $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

于是
$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)$$

$$> \frac{1}{n+1} > 0.$$

即 $\{x_n\}$ 是一个下方有界的序列. 其中

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= -\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln n \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

而 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$,

故 $x_n - x_{n+1} > 0$.

即 $\{x_n\}$ 是单调减少的数列. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设为 C , 即

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \\ &= 0.577216 \cdots \end{aligned}$$

所以 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n$,

其中 $\varepsilon_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

【147】 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$.

解 因为 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n$,

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} = C + \ln(2n) + \varepsilon_{2n},$$

其中 C 为欧拉常数.

$$\varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \varepsilon_{2n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

所以
$$\begin{aligned} &\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= \ln(2n) - \ln n + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n \\ &= \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n \rightarrow \ln 2 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$.

【148】 数列 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是由下列各式:

$$x_1 = a, x_2 = b, x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad (n = 3, 4, \cdots)$$

确定. 求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 由于

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{x_n + x_{n-1}}{2} - x_n = (-1) \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \\ &= (-1)^2 \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{2^2} = \cdots \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (x_2 - x_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b - a),$$

故

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) + x_1 \\ &= (b-a) \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} + a \\ &= (b-a) \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + a, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b-a}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + a = \frac{a+2b}{3}.$$

【149】 假设数列 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 由下列各式:

$$x_0 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) (n=0, 1, 2, \dots)$$

确定. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

证

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x_n} - \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right)^2 + 1 \geq 1 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

所以

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_n} - x_n \right) \leq 0.$$

即 $\{x_n\}$ 是单调减少的有界数列, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设为 l , 在等式 x_{n+1}

$$= \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \text{ 两边取极限, 得 } l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{1}{l} \right)$$

解之得 $l = 1$ (舍去负值),

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

【150】 证明: 由下列各式

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

确定的序列 x_n 和 y_n 有共同的极限 $\mu(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

(数 a 和 b 的算术平均数减几何平均数).

证 分两种情况讨论

(1) a 与 b 中至少有一个为零. 不妨设 $a = 0$, 则显然有

$$x_n = 0 (n = 1, 2, \cdots), y_{n+1} = \frac{y_n}{2}.$$

从而, 递推得 $y_n = \frac{b}{2^{n-1}} \quad (n = 1, 2, \cdots)$,

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

(2) 设 $a \neq 0, b \neq 0$. 这时, 必须 $a > 0, b > 0$, 否则, 若 $ab < 0$, 则 $x_2 = \sqrt{ab}$ 没有意义.

若 $a < 0, b < 0$. 则 $x_2 = \sqrt{ab} > 0, y_2 = \frac{a+b}{2} < 0$,

从而 $x_3 = \sqrt{x_2 y_2}$ 没有意义. 因此, 必须有 $a > 0, b > 0$.

不妨设 $a \leq b$. 由于两正数的等比中项不超过它们的等差中项, 并且都界于原来两数之间, 故有 $a \leq x_2 \leq y_2 \leq b$,

同样有 $a \leq x_2 \leq x_3 \leq y_3 \leq y_2 \leq b$,

一般地 $a \leq x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \leq b \quad (n = 2, 3, \cdots)$,

即 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均为单调有界数列, 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B,$$

对等式 $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$,

两边取极限, 得 $B = \frac{A+B}{2}$.

从而 $A = B$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 证毕.

§ 3. 函数的概念

1. 函数的定义

若对于集合 $X = \{x\}$ 中的每一个 x , 均有一个确定的实数 $y \in Y = \{y\}$ 与之对应, 则变量 y 称为变量 x 在已知变域 $X = \{x\}$ 的单值函数, 记作 $y = f(x)$.

集合 X 为函数 $f(x)$ 的定义域或存在域; Y 称为这个函数的值域, 在最简单的情况下, 集合 X 可能的情况有: 开区间 $(a, b): a <$

$x < b$;

半开区间 $(a, b]$: $a < x \leq b$ 或 $[a, b)$: $a \leq x < b$;

闭区间(线段) $[a, b]$: $a \leq x \leq b$. (其中 a 和 b 为某实数或符号 $-\infty$ 和 $+\infty$).

若对于 X 中的每个值 x 有若干个 $y = f(x)$ 与之对应, 则 y 称为 x 的多值函数.

2. 反函数

如果把 x 理解为满足方程式 $f(x) = y$ 的任何数值(式中 y 为属于函数 $f(x)$ 的值域 Y 中的一个固定数), 则这个对应关系在集 Y 中可确定某函数 $x = f^{-1}(y)$, 称之为函数 $f(x)$ 的反函数. 一般来说, 它是多值的. 若函数 $y = f(x)$ 是严格单调的, 即当 $x_2 > x_1$ 时, $f(x_2) > f(x_1)$ [或相应地 $f(x_2) < f(x_1)$], 则反函数 $x = f^{-1}(y)$ 是单值且严格单调的函数.

求出下列函数的存在域(151 ~ 165).

【151】 $y = \frac{x^2}{1+x}$.

解 当 $1+x \neq 0$ 时, 即 $x \neq -1$ 时, 函数才有意义, 故函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

【152】 $y = \sqrt{3x-x^3}$.

解 当 $3x-x^3 \geq 0$ 时, 函数才有意义, 解之得函数的定义域为 $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}]$.

【153】 $y = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

解 当 $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ 时, 函数才有意义, 解之得函数的定义域为 $[-1, 1)$.

【154】 (1) $y = \log(x^2-4)$;

(2) $y = \log(x+2) + \log(x-2)$.

解 (1) 当 $x^2-4 > 0$ 时, 函数才有意义, 解之得函数的定义

域为 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

(2) 当 $x+2 > 0$ 且 $x-2 > 0$ 时, 函数才有意义, 解之得函数的定义域为 $(2, +\infty)$.

【155】 $y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

解 当 $x \geq 0$ 且 $\sin \sqrt{x} \geq 0$ 时, 函数才有意义, 解之得

$$(2k\pi)^2 \leq x \leq (2k+1)^2\pi^2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

因此函数的定义域为满足不等式

$$4k^2\pi^2 \leq x \leq (2k+1)^2\pi^2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

的实数集合.

【156】 $y = \sqrt{\cos x^2}$.

解 当 $\cos x^2 \geq 0$ 时, 函数才有意义, 即 $0 \leq x^2 \leq \frac{\pi}{2}$

及 $2k\pi + \frac{3\pi}{2} \leq x^2 \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$

因此, 函数的定义域为满足不等式 $|x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

及 $\sqrt{2k\pi + \frac{3\pi}{2}} \leq |x| \leq \sqrt{2k\pi + \frac{5\pi}{2}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$

的实数 x 的集合.

【157】 $y = \lg\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$.

解 当 $\sin \frac{\pi}{x} > 0$ 时, 函数才有意义. 解之得

$$2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

当 $k = 0$ 时, 得 $1 < x < +\infty$;

当 $k = 1, 2, \dots$ 时, 得 $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$;

当 $k = -1, -2, \dots$ 时, 得 $\frac{1}{2k} < x < \frac{1}{2k+1}$,

因此,函数的定义域为

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right) \cup \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)\right] \cup (1, +\infty).$$

【158】 $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}.$

解 当 $x \geq 0$, 且 $\sin \pi x \neq 0$ 时, 函数才有意义, 解之得

$$x > 0 \quad \text{且} \quad x \neq n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

因此函数的存在域是不为整数的所有正实数所成的集合

【159】 $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}.$

解 当 $\left|\frac{2x}{1+x}\right| \leq 1$ 时, 函数才有意义, 解之得

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1,$$

即 $-1 \leq 2 - \frac{2}{1+x} \leq 1,$

$$-3 \leq -\frac{2}{1+x} \leq -1,$$

$$\frac{3}{2} \geq \frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{2},$$

所以 $\frac{2}{3} \leq 1+x \leq 2.$

因此函数的定义域为 $\left[-\frac{1}{3}, 1\right].$

【160】 $y = \arccos(2\sin x).$

解 当 $|2\sin x| \leq 1$ 时, 函数才有意义, 解之得

$$k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

为函数的存在域.

【161】 $y = \lg[\cos(\lg x)].$

解 当 $\cos(\lg x) > 0$ 时, 函数才有意义. 所以

$$\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi < \lg x < \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

从而函数的定义域为满足不等式

$$10^{(2k-\frac{1}{2})\pi} < x < 10^{(2k+\frac{1}{2})\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

的实数 x 的集合.

【162】 $y = (x + |x|) \sqrt{x \sin^2 \pi x}.$

解 当 $x \sin^2 \pi x \geq 0$ 时, 函数才有意义. 解之得, 函数的定义域为 $[0, +\infty) \cup \{-n\}_{n=1}^{+\infty}$.

【163】 $y = \cot \pi x + \arccos(2^x).$

解 当 $\sin \pi x \neq 0$ 及 $0 \leq 2^x \leq 1$ 时, 函数才有意义, 解之得 $x \neq k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),

及 $x \leq 0$. 因此, 函数的定义域为满足

$$x < 0 \text{ 且 } x \neq -n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

的实数 x 的集合.

【164】 $y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x).$

解 当 $-1 \leq 1-x \leq 1$, 即 $0 \leq x \leq 2$ 时, 第一个函数才有意义.

当 $\lg x > 0$, 即 $x > 1$ 时, 第二个函数才有意义. 因此, 定义域为 $1 < x \leq 2$.

【165】 $y = (2x)!$

解 当 $2x = n$ ($n = 1, 2, \dots$) 时, 函数才有定义, 所以, 定义域为集合 $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots, \frac{n}{2}, \dots$.

【165. 1】 $y = \log_2 \log_3 \log_4 x.$

解 当 $\log_3 \log_4 x > 0$ 时, 函数才有意义, 解之得 $x > 4$, 所以, 函数的定义域为 $(4, +\infty)$.

【165. 2】 $y = \sqrt[4]{\lg \tan x}.$

解 当 $\lg \tan x \geq 0$ 时, 函数才有意义, 解之得

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

因此, 函数的定义域为 $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \left[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right).$

【165. 3】 $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x} \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$

解 当 $\sin 2x \geq 0$, 且 $\sin 3x \geq 0$ 时, 函数才有意义, 解之得 $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$.

求下列函数的存在域和值域(165 ~ 170).

【166】 $y = \sqrt{2+x-x^2}.$

解 当 $2+x-x^2 \geq 0$ 时, 函数才有意义, 解之得函数的定义域为 $[-1, 2]$, 又因

$$y = \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{3}{2},$$

所以, 函数的值域为 $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

【167】 $y = \lg(1 - 2\cos x).$

解 当 $1 - 2\cos x > 0$ 时, 函数才有意义. 解之得函数的定义域为

$$E = \left\{x \mid 2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{3} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)\right\}.$$

又因为

$$\max_{x \in E} (1 - 2\cos x) = 1 - (-2) = 3,$$

$$\inf_{x \in E} (1 - 2\cos x) = 0.$$

所以, 函数的值域为 $(-\infty, \lg 3)$.

【168】 $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$

解 当 $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$ 时, 函数有意义, 而对任何实数, 上不等式均成立, 因此函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 函数的值域为 $[0, \pi]$.

【169】 $y = \arcsin \left(\lg \frac{x}{10}\right).$

解 当 $\left| \lg \frac{x}{10} \right| \leq 1$ 时, 函数才有意义. 解之得 $1 \leq x \leq 100$,
故函数的定义域为 $[1, 100]$, 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

【170】 $y = (-1)^x$.

解 定义域为 $E = \left\{ x \mid x = \frac{p}{2q+1}, p, q \text{ 为整数} \right\}$, 值域为集合 $\{-1, 1\}$.

【171】 在三角形 ABC 中, (底 $AC = b$, 高 $BD = h$) (图 1) 内接一个矩形 $KLMN$ (高 $NM = x$), 把矩形 $KLMN$ 的周长 P 及其面积 S 表示成 x 的函数. 并作函数 $P = P(x)$ 及 $S = S(x)$ 的图形.

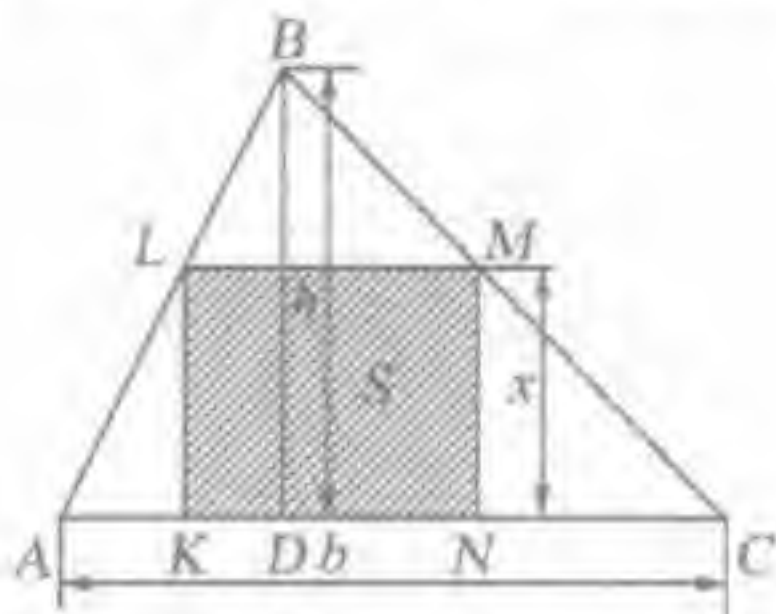


图 1

解 因为 $\frac{LM}{b} = \frac{h-x}{h}$,

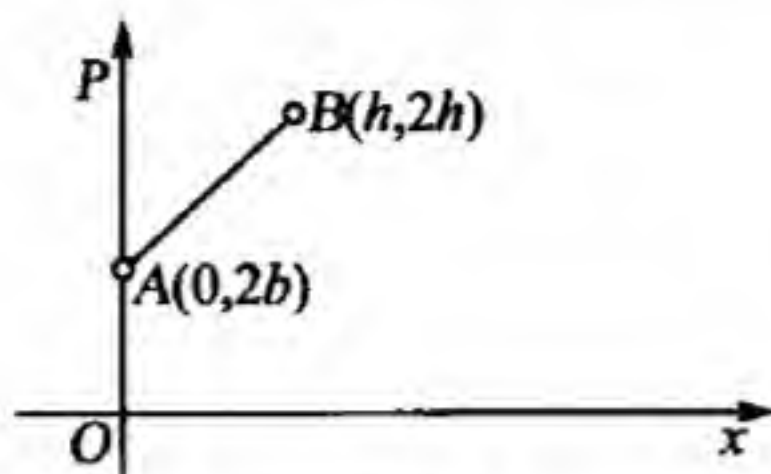
所以 $LM = b\left(1 - \frac{x}{h}\right)$,

故周长 $p = p(x) = 2LM + 2MN$

$$= 2b\left(1 - \frac{x}{h}\right) + 2x$$

$$= 2\left(1 - \frac{b}{h}\right)x + 2b \quad 0 < x < h.$$

当 $b < h$ 时, $p(x)$ 的图像为 171 题图 2 中的直线段 AB (不含 A, B 两点).



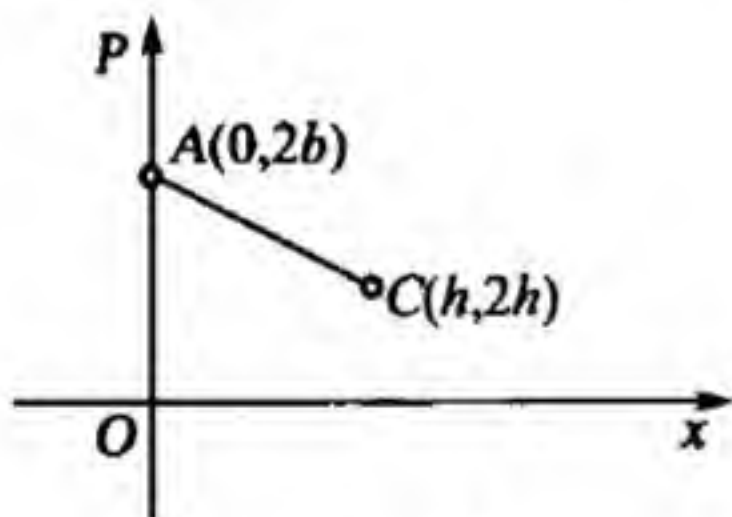
171 题图 2

当 $b > h$ 时, $p(x)$ 的图像为 171 题图 3 中的直线段 AC (不包含 A, C 两点)

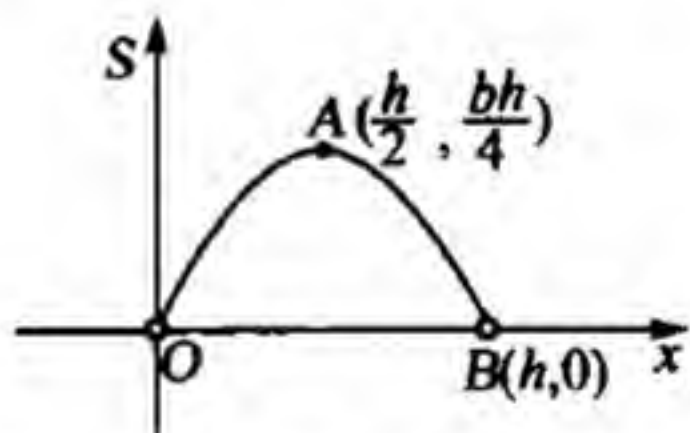
$$\text{面积 } S = S(x) = LM \cdot MN$$

$$= b \left(1 - \frac{x}{h} \right) x \quad (0 < x < h).$$

$S(x)$ 的图形为 171 题图 4 中的一段抛物线 \widehat{OAB} (不包含 O, B 两点).



171 题图 3



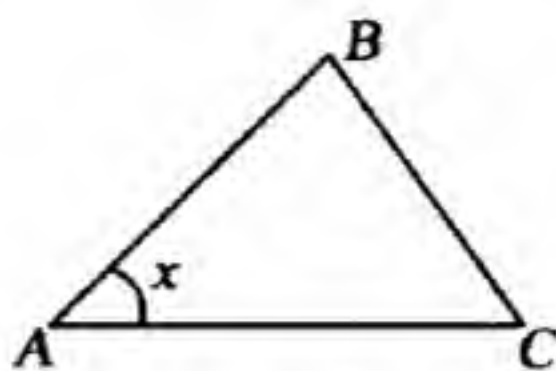
171 题图 4

【172】 在三角形 ABC 中, 边 $AB = 6$ 厘米, 边 $AC = 8$ 厘米, 角 $BAC = x$, 把 $BC = a$ 和面积 $ABC = S$ 表示成变量 x 的函数, 并作函数 $a = a(x)$ 及 $S = S(x)$ 的图形.

解 由余弦定理得

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \cos x} \\ &= \sqrt{100 - 96 \cos x} \quad (0 < x < \pi). \end{aligned}$$

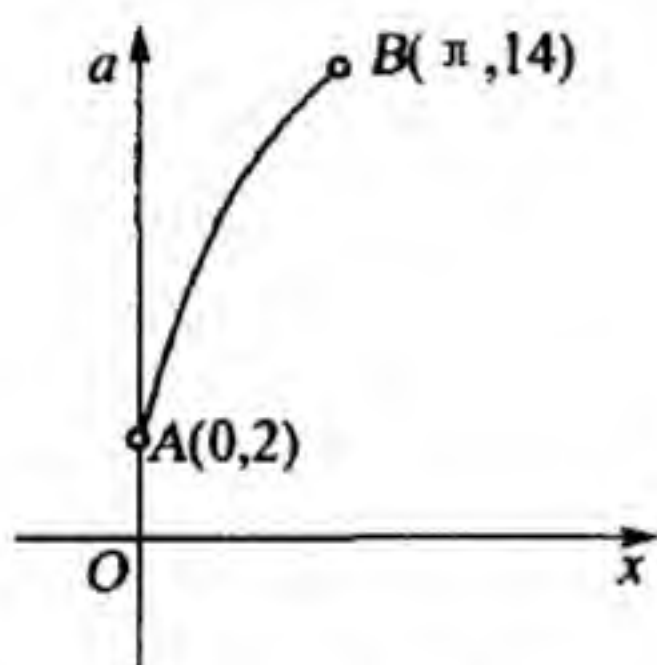
它的图形如 172 题图 2 所示, 为曲线弧 \widehat{AB} (不包含 A, B 两点), 三角形的面积为



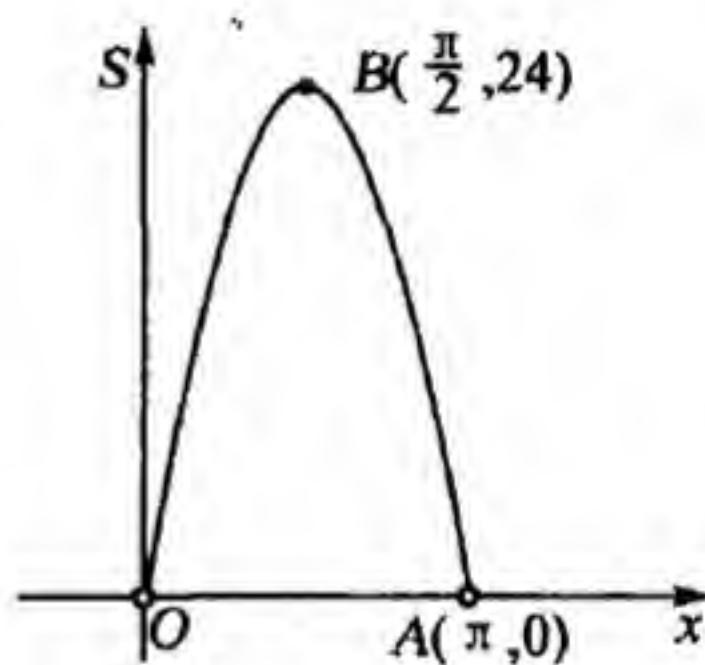
172 题图 1

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin x = 24 \sin x \quad (0 < x < \pi),$$

它的图形如 172 题图 3 所示, 为弧 \widehat{OBA} (不包含 O, A 两点).

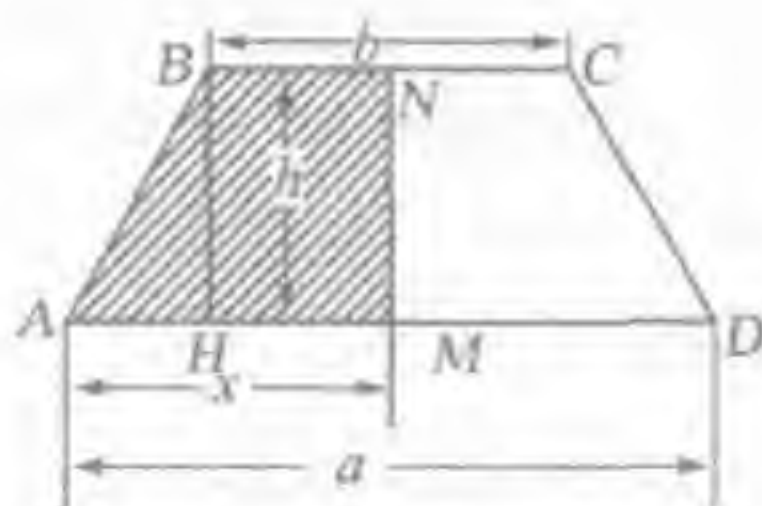


172 题图 2



172 题图 3

【173】 在等腰梯形 $ABCD$ 中(图 2) 底 $AD = a, BC = b (a > b)$, 高 $HB = h$, 引直线 $MN \parallel BH$ 和与顶点 A 相隔的距离 $AM = x$. 把图形 $ABNMA$ 的面积 S 表示成变量 x 的函数, 作出函数 $S = S(x)$ 的图形.



173 题图 1

解 $AH = \frac{1}{2}(a - b).$

分三种情况讨论:

(1) 当 $0 \leq x \leq \frac{a-b}{2}$ 时, 即 MN 在 $\triangle ABH$ 内, 此时

$$\frac{MN}{h} = \frac{x}{\frac{a-b}{2}},$$

即 $MN = \frac{2hx}{a-b}.$

于是 $S = \frac{1}{2}MN \cdot x = \frac{h}{a-b}x^2.$

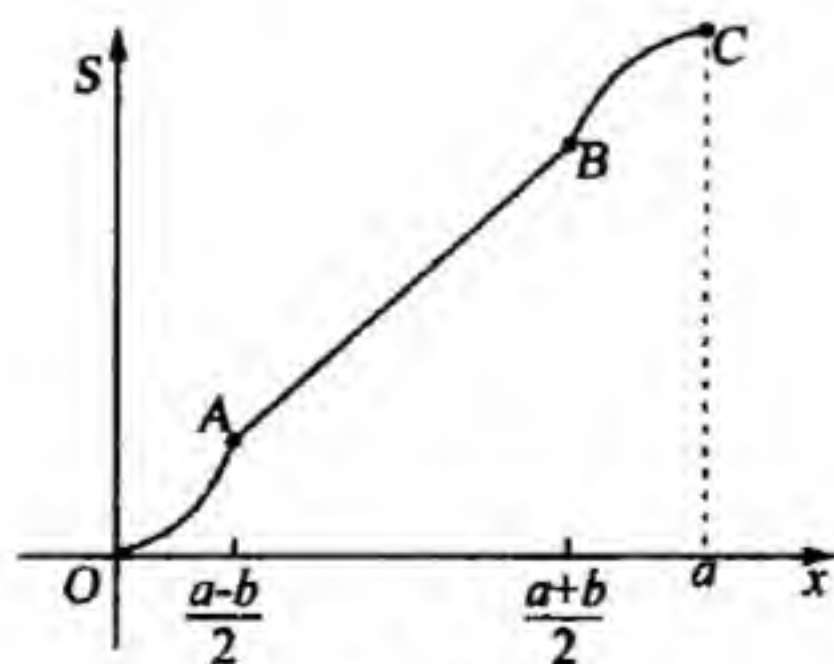
(2) 当 $\frac{a-b}{2} < x < \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2}$ 时, 面积

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}h \cdot \frac{a-b}{2} + h\left(x - \frac{a-b}{2}\right) \\ &= h\left(x - \frac{a-b}{4}\right). \end{aligned}$$

(3) 当 $\frac{a+b}{2} \leq x \leq a$ 时,

$$\begin{aligned} S &= \frac{h(a+b)}{2} - \frac{h}{a-b}(a-x)^2 \\ &= h\left[\frac{a+b}{2} - \frac{(a-x)^2}{a-b}\right]. \end{aligned}$$

S 的图形如 173 题图 2



173 题图 2

图中各点的位置如下:

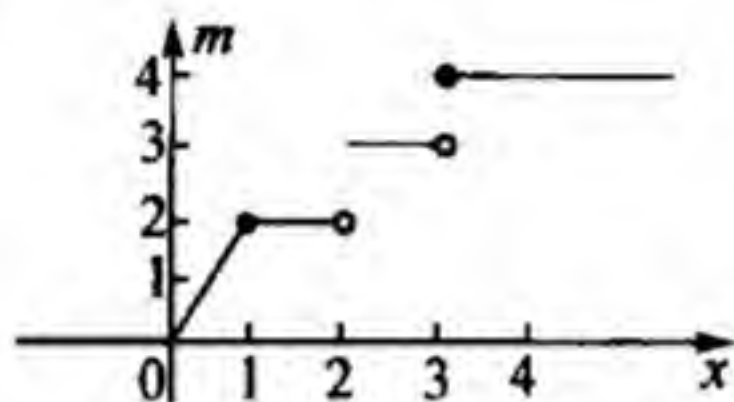
$$A\left(\frac{a-b}{2}, \frac{h(a-b)}{4}\right); \quad B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{h(a+3b)}{4}\right);$$

$$C\left(a, \frac{h(a+b)}{2}\right); \quad \tan \alpha = h.$$

【174】 在 Ox 轴上的区间 $0 \leq x \leq 1$ 内, 有等于 2 克的质量均匀分布着, 而在此轴的点 $x = 2$ 和点 $x = 3$ 上各集中了一克质量, 写出函数的解析公式 $m = m(x) (-\infty < x < +\infty)$, 其中 $m(x)$ 是位于区间 $(-\infty, x)$ 的质量的值, 并作出这个函数的图形.

$$\text{解 } m(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ 2x, & x \in (0, 1], \\ 2, & x \in (1, 2), \\ 3, & x \in [2, 3), \\ 4, & x \in [3, +\infty). \end{cases}$$

$m(x)$ 的图形如 174 题图所示



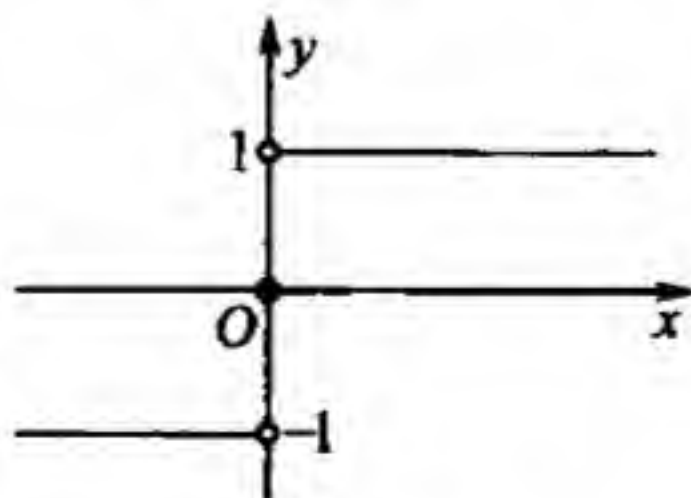
174 题图

【175】 函数 $y = \operatorname{sgn} x$, 用下列方式定义:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{若 } x < 0; \\ 0, & \text{若 } x = 0; \\ 1, & \text{若 } x > 0. \end{cases}$$

作出这个函数的图形. 证明 $|x| = x \operatorname{sgn} x$.

解 函数 $\operatorname{sgn} x$ 的图形如 175 题图所示



175 题图

当 $x < 0$ 时, $|x| = -x = x \operatorname{sgn} x$;

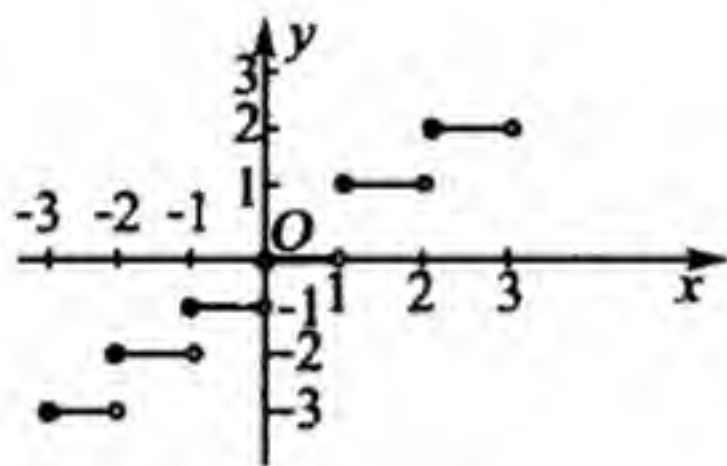
当 $x = 0$ 时, $|x| = 0 = x \operatorname{sgn} x$;

当 $x > 0$ 时, $|x| = x = x \operatorname{sgn} x$;

因此 $|x| = x \operatorname{sgn} x$.

【176】 函数 $y = [x]$ (数 x 的整数部分) 由以下方法定义: 如果 $x = n + r$, 其中 n 为整数且 $0 \leq r < 1$, 则 $|x| = n$. 作出这个函数的图形.

解 当 $x \in [n, n+1)$ 时 (n 为整数) $y = n$, 函数的图形如 176 题图所示.



176 题图

【177】 设 $y = \pi(x)$ ($x \geq 0$) 表示不超过数 x 的素数数目, 对于自变数 $0 \leq x \leq 20$ 的值, 作出此函数的图形.

解 当 $0 \leq x < 2$ 时, $\pi(x) = 0$;

当 $2 \leq x < 3$ 时, $\pi(x) = 1$;

当 $3 \leq x < 5$ 时, $\pi(x) = 2$;

当 $5 \leq x < 7$ 时, $\pi(x) = 3$;

当 $7 \leq x < 11$ 时, $\pi(x) = 4$;

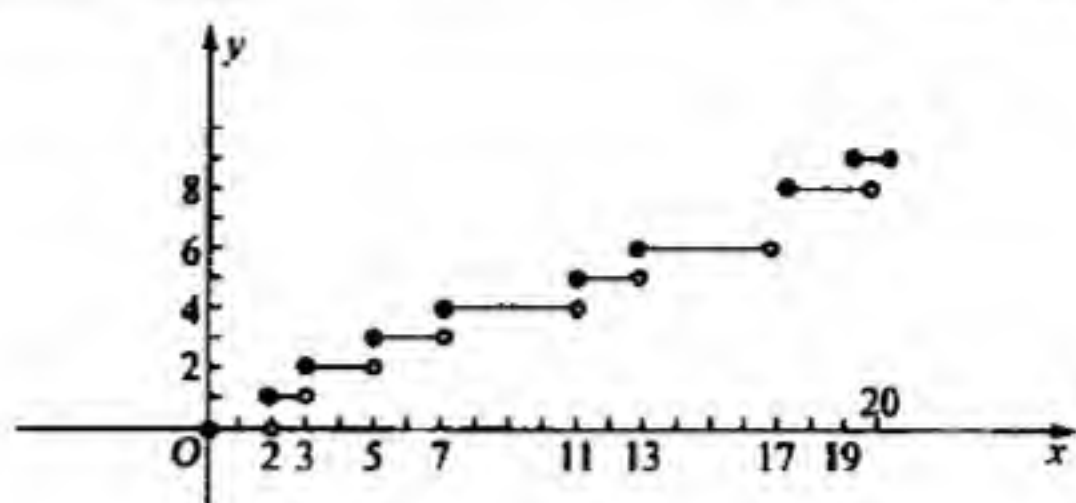
当 $11 \leq x < 13$ 时, $\pi(x) = 5$;

当 $13 \leq x < 17$ 时, $\pi(x) = 6$;

当 $17 \leq x < 19$ 时, $\pi(x) = 7$;

当 $19 \leq x \leq 20$ 时, $\pi(x) = 8$.

如图所示.



177 题图

函数 $y = f(x)$ 把 E_x 集映到怎样的集 E_y 上, 若(178 ~ 182).

【178】 $y = x^2, E_x = \{-1 \leq x \leq 2\}$.

解 $E_y = \{0 \leq y \leq 4\}$.

【179】 $y = \lg x, E_x = \{10 < x < 1000\}$.

解 $E_y = \{1 < y < 3\}$.

【180】 $y = \frac{1}{\pi} \arctan x, E_x = \{-\infty < x < +\infty\}$.

解 $E_y = \left\{-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}\right\}$.

【181】 $y = \cot \frac{\pi x}{4}, E_x = \{0 < |x| \leq 1\}$.

解 $E_y = \{1 < |y| < +\infty\}$.

【182】 $y = |x|, E_x = \{1 \leq |x| \leq 2\}$.

解 $E_y = \{1 \leq y \leq 2\}$.

变量 x 跑过区间 $0 < x < 1$, 变量 y 跑过怎样的集, 若(183 ~ 188).

【183】 $y = a + (b - a)x$.

解 当 x 从 0 变到 1 时, y 从 a 变到 b . 所以 y 的变化集合为区间 (a, b) (当 $a < b$ 时) 或 (b, a) (当 $b < a$ 时).

【184】 $y = \frac{1}{1-x}$.

解 当 x 跑过区间 $0 < x < 1$ 时, y 跑过区间 $(1, +\infty)$.

【185】 $y = \frac{x}{2x-1}$.

解 $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1}.$

当 x 从 0 变到 $\frac{1}{2}$ 时, y 从 0 变到 $-\infty$; 当 x 从 $\frac{1}{2}$ 变到 1 时, y 从 $+\infty$ 变到 1. 于是 y 的变化区间为 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

【186】 $y = \sqrt{x-x^2}.$

解 $y = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2},$

y 在 $x = \frac{1}{2}$ 取到最大值 $\frac{1}{2}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $y \rightarrow 0$, 且 $y > 0$, 故 y 的变化区间为 $0 < y \leq \frac{1}{2}.$

【187】 $y = \cot \pi x.$

解 当 x 从 0 变至 1 时, y 从 $+\infty$ 变至 $-\infty$. 于是, y 的变化范围为 $(-\infty, +\infty)$.

【188】 $y = x + [2x].$

解 当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $0 < y < \frac{1}{2};$

当 $\frac{1}{2} \leq x < 1$ 时, $\frac{3}{2} \leq y < 2,$

因此, y 的变化范围为 $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right).$

【189】 若 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$, 求 $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4).$

解 因为 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3),$

故 $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 0,$

$f(4) = 4! = 24.$

【190】 若 $f(x) = \lg x^2$, 求 $f(-1), f(-0.001), f(100).$

解 $f(-1) = \lg 1 = 0;$

$f(-0.001) = \lg 0.000001 = -6;$

$f(100) = 2\lg 100 = 4.$

【191】 若 $f(x) = 1 + [x]$, 求 $f(0.9), f(0.99), f(0.999), f(1)$.

解 $f(0.9) = f(0.99) = f(0.999) = 1,$
 $f(1) = 2.$

【192】 若 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{当 } -\infty < x \leq 0 \text{ 时,} \\ 2^x, & \text{当 } 0 < x < +\infty \text{ 时.} \end{cases}$

求 $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$.

解 $f(-2) = 1 - 2 = -1;$
 $f(-1) = 1 - 1 = 0;$
 $f(0) = 1 + 0 = 1;$
 $f(1) = 2^1 = 2;$
 $f(2) = 2^2 = 4.$

【193】 若 $f(x) = \frac{1-x}{1+x},$

求 $f(0), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}.$

解 $f(0) = 1;$
 $f(-x) = \frac{1+x}{1-x};$
 $f(x+1) = \frac{-x}{2+x};$
 $f(x)+1 = \frac{1-x}{1+x} + 1 = \frac{2}{1+x};$
 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1};$
 $\frac{1}{f(x)} = \frac{1+x}{1-x}.$

【194】 若

(1) $f(x) = x - x^3;$

(2) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x};$

$$(3) f(x) = (x + |x|)(1-x).$$

求使以下各式成立的 x 值

$$(a) f(x) = 0; \quad (b) f(x) > 0; \quad (c) f(x) < 0.$$

解 (1) (a) 由 $x - x^3 = 0$ 得 $x = 0, \pm 1$.

$$(b) x - x^3 > 0,$$

$$\text{即 } x(1-x)(1+x) > 0.$$

解之得 $-\infty < x < -1$ 和 $0 < x < 1$.

$$(c) x - x^3 < 0,$$

$$\text{即 } x(1-x)(1+x) < 0.$$

解之得 $-1 < x < 0$ 和 $1 < x < +\infty$.

$$(2) (a) \sin \frac{\pi}{x} = 0,$$

$$\text{解之得 } \frac{\pi}{x} = k\pi \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$\text{所以 } x = \frac{1}{k} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$(b) \sin \frac{\pi}{x} > 0,$$

$$2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

所以当 $k = 0$ 时, $1 < x < +\infty$.

$$\text{当 } k = 1, 2, \dots \text{ 时, } \frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}.$$

$$\text{当 } k = -1, -2, \dots \text{ 时, } \frac{1}{2k} < x < \frac{1}{2k+1}.$$

$$(c) \sin \frac{\pi}{x} < 0, \text{ 则}$$

$$(2k+1)\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+2)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$\text{当 } k = -1 \text{ 时, } -\infty < x < -1.$$

$$\text{当 } k = 0, 1, 2, \dots \text{ 时, } \frac{1}{2k+2} < x < \frac{1}{2k+1}.$$

$$\text{当 } k = -2, -3, \dots \text{ 时, } \frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k+2}.$$

$$(3) (a) (x+|x|)(1-x) = 0$$

解之得 $x \leq 0$ 和 $x = 1$.

$$(b) (x+|x|)(1-x) > 0, \text{推得 } 0 < x < 1.$$

$$(c) (x+|x|)(1-x) < 0.$$

因为当 $x \leq 0$ 时, $x+|x|=0$, 所以必须 $x > 0$; 其次因为当 $x > 0$ 时, $x+|x| > 0$. 所以 $1-x < 0$, 故 $x > 1$. 因此, 当 $x > 1$ 时, $f(x) < 0$.

【195】 若(1) $f(x) = ax + b$; (2) $f(x) = x^2$; (3) $f(x) = a^x$. 求 $\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

$$\text{解 } (1) \varphi(x) = \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} = a.$$

$$(2) \varphi(x) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h.$$

$$(3) \varphi(x) = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x(a^h - 1)}{h}.$$

【196】 令 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 证明:

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } & f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \\ &= a(x+3)^2 + b(x+3) + c \\ &\quad - 3[a(x+2)^2 + b(x+2) + c] \\ &\quad + 3[a(x+1)^2 + b(x+1) + c] - (ax^2 + bx + c), \\ &= ax^2 + 6ax + 9a + bx + 3b + c \\ &\quad - 3ax^2 - 12ax - 12a - 36x - 6 - 3c \\ &\quad + 3ax^2 + 6ax + 3a + 3bx + c - ax^2 - bx - c \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此 $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0$.

【197】 若 $f(0) = -2$ 和 $f(3) = 5$, 求线性整函数:

$$f(x) = ax + b,$$

$f(1)$ 和 $f(2)$ 等于多少(线性插值法)?

解 因为

$$f(0) = b = -2, f(3) = 3a + b = 5,$$

所以 $a = \frac{7}{3}, b = -2$.

于是, 所求的线性整函数为 $f(x) = \frac{7}{3}x - 2$.

故 $f(1) = \frac{1}{3}, f(2) = \frac{8}{3}$.

【198】 设: $f(-2) = 0, f(0) = 1, f(1) = 5$ 求二次有理整函数:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

$f(-1)$ 和 $f(0.5)$ 等于多少(二次插值法)?

解 因为 $f(-2) = 4a - 2b + c = 0$,

$$f(0) = c = 1, f(1) = a + b + c = 5,$$

所以 $a = \frac{7}{6}, b = \frac{17}{6}, c = 1$.

于是所求的二次有理函数为 $f(x) = \frac{7}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1$.

故 $f(-1) = -\frac{2}{3}, f(0.5) = \frac{65}{24}$.

【199】 若 $f(-1) = 0, f(0) = 2, f(1) = -3, f(2) = 5$.
求三次有理整函数: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

解 因为 $f(-1) = -a + b - c + d = 0$,

$$f(0) = d = 2,$$

$$f(1) = a + b + c + d = -3,$$

$$f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 5,$$

可得 $a = \frac{10}{3}, b = -\frac{7}{2}, c = -\frac{29}{6}, d = 2$.

于是, 所求三次有理函数为

$$f(x) = \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{29}{6}x + 2.$$

【200】 若 $f(0) = 15, f(2) = 30, f(4) = 90$, 求形式为 $f(x) = a + bc^x$ 的函数.

解 因为

$$f(0) = a + b = 15,$$

$$f(2) = a + bc^2 = 30,$$

$$f(4) = a + bc^4 = 90,$$

所以 $a = 10, b = 5, c = 2$ (—2 不合适, 舍去)

于是所求函数为 $f(x) = 10 + 5 \times 2^x$.

【201】 证明: 若对于线性函数

$$f(x) = ax + b,$$

自变量的值 $x = x_n (n = 1, 2, \dots)$ 形成等差级数, 则对应的函数值 $y_n = f(x_n), (n = 1, 2, \dots)$ 亦形成等差级数.

证 $\{x_n\}$ 是一公差为 d 的等差级数, 则

$$x_{n+1} = x_n + d \quad (n = 1, 2, \dots).$$

于是 $y_{n+1} - y_n = (ax_{n+1} + b) - (ax_n + b)$
 $= a(x_{n+1} - x_n) = ad,$

即 $\{y_n\}$ 是一公差为 ad 的等差级数.

【202】 证明: 若指数函数

$$f(x) = a^x \quad (a > 0),$$

自变数的值 $x = x_n (n = 1, 2, \dots)$ 形成等差级数, 则对应的函数值 $y_n = f(x_n), (n = 1, 2, \dots)$ 组成等比级数.

证 设 $\{x_n\}$ 是一公差为 d 的等差级数.

则 $x_{n+1} - x_n = d,$

所以 $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{a^{x_{n+1}}}{a^{x_n}} = a^{x_{n+1} - x_n} = a^d,$

即 $\{y_n\}$ 为一公比为 a^d 的等比级数.

【203】 设当 $0 < u < 1$ 时函数 $f(u)$ 有定义, 求以下函数的定义域:

$$(1) f(\sin x); \quad (2) f(\ln x); \quad (3) f\left(\frac{[x]}{x}\right).$$

解 (1) 因为 $0 < \sin x < 1$, 所以

$$2k\pi < x < (2k+1)\pi \text{ 且 } x \neq \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

即函数的定义域为

$$\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right) \right].$$

(2) 因为 $0 < \ln x < 1$, 所以 $1 < x < e$, 即函数的定义域为 $(1, e)$.

(3) 因为 $0 < \frac{[x]}{x} < 1$, 所以

$$x > 0 \text{ 且 } x \neq n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

因此函数的定义域为 $\bigcup_{n=0}^{+\infty} (n, n+1)$.

【204】 设 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ ($a > 0$), 证明:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y).$$

证 $f(x+y) + f(x-y)$

$$= \frac{1}{2}(a^{x+y} + a^{-(x+y)}) + \frac{1}{2}(a^{x-y} + a^{-(x-y)})$$

$$= \frac{1}{2}(a^x \cdot a^y + a^{-x} \cdot a^{-y}) + \frac{1}{2}(a^x \cdot a^{-y} + a^{-x} \cdot a^y)$$

$$= \frac{1}{2}a^x(a^y + a^{-y}) + \frac{1}{2}a^{-x}(a^y + a^{-y})$$

$$= \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})(a^y + a^{-y})$$

$$= 2f(x) \cdot f(y).$$

【205】 假设 $f(x) + f(y) = f(z)$, 求出 z . 若:

(1) $f(x) = ax$;

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$;

(3) $f(x) = \arctan x$ ($|x| < 1$);

(4) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$.

解 (1) $f(x) + f(y) = ax + ay = a(x + y)$,
 而 $f(z) = az$.
 由 $f(x) + f(y) = f(z)$,
 得 $z = x + y$.

(2) 由 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$,
 得 $z = \frac{xy}{x + y}$.

(3) 由 $\arctan x + \arctan y = \arctan z$,
 得 $z = \tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{x + y}{1 - xy}$.

(4) 由 $\log \frac{1+x}{1-x} + \log \frac{1+y}{1-y} = \log \frac{1+z}{1-z}$,
 得 $\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = \frac{1+z}{1-z} = -1 + \frac{2}{1-z}$.

所以 $z = \frac{x+y}{1+xy}$.

求出 $\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\psi(x)]$, $\varphi[\psi(x)]$ 和 $\psi[\varphi(x)]$. (206 ~ 208), 设:

【206】 $\varphi(x) = x^2$ 和 $\psi(x) = 2^x$.

解 $\varphi(\varphi(x)) = (x^2)^2 = x^4$,
 $\psi(\psi(x)) = 2^{2^x}$,
 $\varphi(\psi(x)) = (2^x)^2 = 4^x$,
 $\psi(\varphi(x)) = 2^{x^2}$.

【207】 $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$ 和 $\psi(x) = \frac{1}{x}$.

解 $\varphi(\varphi(x)) = \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn} x) = \operatorname{sgn} x$,
 $\psi(\psi(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \quad (x \neq 0)$,

$\varphi(\psi(x)) = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0)$,

$$\psi(\varphi(x)) = \frac{1}{\operatorname{sgn} x} = \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0).$$

【208】 $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \leq 0 \text{ 时,} \\ x & \text{当 } x > 0 \text{ 时.} \end{cases}$ 和 $\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \leq 0 \text{ 时,} \\ -x^2 & \text{当 } x > 0 \text{ 时.} \end{cases}$

解 $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x); \psi(\psi(x)) = 0$ (因为 $-x^2 < 0$);
 $\varphi(\psi(x)) = 0; \psi(\varphi(x)) = \psi(x).$

【209】 若 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 求 $f[f(x)], f\{f[f(x)]\}.$

解 $f[f(x)] = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = 1 - \frac{1}{x},$

$$f\{f[f(x)]\} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x.$$

【210】 设 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n\text{次}}$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求

$$f_n(x).$$

解 因为 $f_2(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

假设当 $n = k$ 时, $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}.$

则当 $n = k+1$ 时,

$$f_{k+1}(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

从而由数学归纳法知, 对任何自然数 n 均有:

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

【211】 若 $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$, 求 $f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{因为 } f(x+1) &= x^2 - 3x + 2 \\ &= (x+1)^2 - 5(x+1) + 6, \end{aligned}$$

所以 $f(x) = x^2 - 5x + 6.$

【212】 若 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} (|x| \geq 2)$, 求 $f(x)$.

$$\text{解} \quad \text{因为 } f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2,$$

所以 $f(x) = x^2 - 2.$

【213】 若 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} (x > 0)$, 求 $f(x)$.

$$\text{解} \quad \text{令 } \frac{1}{x} = t, \text{ 则 } x = \frac{1}{t}. \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} \quad (t > 0) \\ &= \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t}, \end{aligned}$$

因此 $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x}.$

【213. 1】 若 $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$, 求 $f(x)$.

$$\text{解} \quad \text{令 } \frac{x}{x+1} = t,$$

即 $1 - \frac{1}{x+1} = t,$

$$x = \frac{1}{1-t} - 1 = \frac{t}{1-t},$$

所以 $f(t) = \left(\frac{t}{1-t}\right)^2,$

因此 $f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}.$

证明下列函数在所示区间内是单调递增函数(214 ~ 217).

【214】 $f(x) = x^2 \quad (0 \leq x < +\infty)$.

证 当 $x_2 > x_1 \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^2 - x_1^2 \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0, \end{aligned}$$

即 $f(x_2) > f(x_1)$.

故 $f(x) = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 内是单调增加函数.

【215】 $f(x) = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

证 当 $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ 时,

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2},$$

所以 $\cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$,

$$\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0,$$

故 $f(x_2) - f(x_1) = \sin x_2 - \sin x_1$
 $= 2 \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0,$

因此, $f(x) = \sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内是单调增加的函数.

【216】 $f(x) = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

证 因为

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \tan x_2 - \tan x_1 \\ &= \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \sin x_1 \cos x_2}{\cos x_1 \cdot \cos x_2} \\ &= \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cos x_2}, \end{aligned}$$

而当 $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\sin(x_2 - x_1) > 0; \cos x_1 > 0; \cos x_2 > 0.$$

所以 $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

因此 $f(x) = \tan x$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内是单调增加的函数.

【217】 $f(x) = 2x + \sin x \quad (-\infty < x < +\infty)$.

证 因为

$$f(x_2) - f(x_1) = 2(x_2 - x_1) + \sin x_2 - \sin x_1,$$

而

$$\begin{aligned} & |\sin x_2 - \sin x_1| \\ &= 2 \left| \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{x_2 - x_1}{2} \right| = |x_2 - x_1| \end{aligned}$$

所以当 $x_1 < x_2$ 时,

$$-(x_2 - x_1) < \sin x_2 - \sin x_1 < x_2 - x_1$$

故

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= 2(x_2 - x_1) + \sin x_2 - \sin x_1 \\ &> (x_2 - x_1) > 0. \end{aligned}$$

即 $f(x) = 2x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的函数.

证明下列各函数在所示区间内是单调递减函数(218 ~ 220).

【218】 $f(x) = x^2 \quad (-\infty < x \leq 0)$.

证 因为当 $x_1 < x_2 \leq 0$ 时,

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0,$$

所以 $f(x) = x^2$ 在 $-\infty < x \leq 0$ 内是单调减少的函数.

【219】 $f(x) = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi)$.

证 因为

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \cos x_2 - \cos x_1 \\ &= -2 \sin \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2}, \end{aligned}$$

当 $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$ 时,

$$0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \pi; 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

于是 $\sin \frac{x_1 + x_2}{2} > 0; \sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0,$

从而 $f(x_2) - f(x_1) < 0.$

即 $f(x) = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 内是单调减少的函数.

【220】 $f(x) = \cot x \quad (0 < x < \pi).$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad f(x_2) - f(x_1) &= \frac{\cos x_2}{\sin x_2} - \frac{\cos x_1}{\sin x_1} \\ &= \frac{\cos x_2 \sin x_1 - \cos x_1 \sin x_2}{\sin x_1 \cdot \sin x_2} = \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\sin x_1 \sin x_2}. \end{aligned}$$

当 $0 < x_1 < x_2 < \pi$ 时,

$$\sin(x_1 - x_2) < 0,$$

$$\sin x_1 > 0, \sin x_2 > 0.$$

从而 $f(x_2) - f(x_1) < 0,$

即 $f(x) = \cot x$ 在 $0 < x < \pi$ 内是单调减少的函数.

【221】 研究下列函数的单调性:

$$(1) f(x) = ax + b; \quad (2) f(x) = ax^2 + bx + c;$$

$$(3) f(x) = x^3; \quad (4) f(x) = \frac{ax + b}{cx + d};$$

$$(5) f(x) = a^x \quad (a > 0).$$

解 (1) 当 $x_1 < x_2$ 时,

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1),$$

所以当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 是减函数, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 是增函数.

$$(2) f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

我们讨论两种情况:

情况 1. $a > 0$ 时, 函数在 $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ 内单调减少, 在

$(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 内单调增加.

情况 2. $a < 0$ 时, 函数在 $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ 内单调增加, 在 $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 内单调减少.

(3) 当 $x_1 < x_2$ 时,

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^3 - x_1^3 \\ &= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) > 0, \end{aligned}$$

因此, $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

(4) 若 $c = 0$, 则 $f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$. 与(1)一样讨论.

$$\text{若 } c \neq 0, \text{ 则 } f(x) = \frac{a}{c} + \frac{b - a\frac{d}{c}}{cx + d},$$

情况 1. 当 $b > a\frac{d}{c}$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{d}{c})$ 及 $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ 内单调减少.

情况 2. 当 $b < a\frac{d}{c}$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{d}{c})$ 及 $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ 内单调增加.

$$(5) \text{ 因为 } \frac{f(x_2)}{f(x_1)} = a^{x_2 - x_1},$$

所以当 $x_1 < x_2$ 时, 若 $0 < a < 1$, 则

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} < 1,$$

即 $f(x_2) < f(x_1)$,

若 $a > 1$, 则

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} > 1,$$

即 $f(x_2) > f(x_1)$,

因此当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的减函数. 当 $a > 1$

时, $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的增函数.

【222】 不等式能否逐项取对数?

解 不一定可以, 只有当底数大于 1 时才可以. 因为, 当底大于 1 时, 对数函数为增函数.

若底数介于 0 与 1 之间时, 对数函数为减函数, 所以, 此时不能逐项取对数.

【223】 设 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 和 $f(x)$ 为单调递增函数, 证明: 若

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x),$$

$$\text{则 } \varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)].$$

证 因为对 x_0 有

$$\varphi(x_0) \leq f(x_0) \leq \psi(x_0),$$

由此及 $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ 为单调增加的, 我们有

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi(x_0)) &\leq f(\varphi(x_0)) \leq f(f(x_0)) \\ &\leq \psi(f(x_0)) \leq \psi(\psi(x_0)). \end{aligned}$$

由 x_0 的任意性, 我们有

$$\varphi(\varphi(x)) \leq f(f(x)) \leq \psi(\psi(x)).$$

求反函数 $x = \varphi(y)$ 及其存在域, 如果 (224 ~ 230).

【224】 $y = 2x + 3 \quad (-\infty < x < +\infty).$

解 反函数为 $x = \frac{y-3}{2}$, 其定义域为 $-\infty < y < +\infty$.

【225】 $y = x^2$;

$$(1) -\infty < x \leq 0; \quad (2) 0 \leq x < +\infty.$$

解 (1) $x = -\sqrt{y} \quad 0 \leq y < +\infty$;

$$(2) x = \sqrt{y} \quad 0 \leq y < +\infty.$$

【226】 $y = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \neq -1).$

解 $x = \frac{1-y}{1+y} \quad y \neq -1.$

【227】 $y = \sqrt{1-x^2}$

$$(1) -1 \leq x \leq 0; \quad (2) 0 \leq x \leq 1.$$

解 (1) $x = -\sqrt{1-y^2} \quad 0 \leq y \leq 1;$

(2) $x = \sqrt{1-y^2} \quad 0 \leq y \leq 1.$

【228】 $y = \operatorname{sh} x$

其中 $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (-\infty < x < +\infty).$

解 由 $2y = e^x - e^{-x},$

即 $(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0,$

所以 $e^x = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1},$

即 $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad (-\infty < y < +\infty).$

【229】 $y = \operatorname{th} x$

其中 $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (-\infty < x < +\infty).$

解 由于 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},$

所以 $e^{2x} = \frac{1+y}{1-y},$

两边取对数得 $x = \operatorname{arcthy} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}.$

注意到 $e^{2x} > 0$, 所以 $\frac{1+y}{1-y} > 0$. 即 $-1 < y < 1$, 因此定义域为 $-1 < y < 1$.

【230】 $y = \begin{cases} x & \text{若 } -\infty < x < 1; \\ x^2 & \text{若 } 1 \leq x \leq 4; \\ 2^x & \text{若 } 4 < x < +\infty. \end{cases}$

解 $x = \begin{cases} y & \text{若 } -\infty < y < 1, \\ \sqrt{y} & \text{若 } 1 \leq y \leq 16, \\ \log_2 y & \text{若 } 16 < y < +\infty. \end{cases}$

【231】 函数 $f(x)$ 定义于对称区间 $(-l, l)$.

若 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

确定下列已知函数中哪些为偶函数, 哪些为奇函数?

(1) $f(x) = 3x - x^3$;

(2) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;

(3) $f(x) = a^x + a^{-x} \quad (a > 0)$;

(4) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

(5) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

解 (1) 因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x) - (-x)^3 = -(3x - x^3) \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

故 $f(x) = 3x - x^3$ 为奇函数.

(2) 因为

$$f(-x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = f(x),$$

所以 $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$ 为偶函数.

(3) 因为

$$f(-x) = a^{-x} + a^{-(-x)} = a^{-x} + a^x = f(x),$$

所以 $f(x) = a^x + a^{-x}$ 为偶函数.

(4) 因为

$$f(-x) = \ln \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = -\ln \frac{1-x}{1+x} = -f(x),$$

所以 $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ 为奇函数.

(5) 因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) \\ &= \ln \frac{(-x + \sqrt{1+x^2})(x + \sqrt{1+x^2})}{(x + \sqrt{1+x^2})} \\ &= -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

【232】 证明:在对称区间 $(-l, l)$ 定义的任何函数 $f(x)$ 均可以表示为是偶函数和奇函数的和.

证 因为 $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$,

容易验证 $\frac{f(x) + f(-x)}{2}$ 为偶函数, $\frac{f(x) - f(-x)}{2}$ 为奇函数,

【233】 如果存在数 $T > 0$ (函数的周期——在广义上!) 使得当 $x \in E$ 时, $f(x \pm T) = f(x)$. 则函数 $f(x)$ 称为周期函数.

说明下列已知函数中哪些是周期函数, 并确定它们的最小周期.

(1) $f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$;

(2) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$;

(3) $f(x) = 2\tan \frac{x}{2} - 3\tan \frac{x}{3}$;

(4) $f(x) = \sin^2 x$; (5) $f(x) = \sin x^2$;

(6) $f(x) = \sqrt{\tan x}$; (7) $f(x) = \tan \sqrt{x}$;

(8) $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$.

解 (1) 因为

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{\lambda}\right) &= A\cos\lambda\left(x + \frac{2\pi}{\lambda}\right) + B\sin\lambda\left(x + \frac{2\pi}{\lambda}\right) \\ &= A\cos\lambda x + B\sin\lambda x = f(x), \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 为周期函数, 最小周期为 $\frac{2\pi}{\lambda}$ ($\lambda > 0$).

(2) $f(x)$ 为周期函数, 最小周期为 2π .

(3) $f(x)$ 为周期函数, 最小周期为 6π .

(4) $f(x) = \sin^2 x$ 为周期函数, 最小周期为 π .

(5) 对任何正实数 a , 均存在 x , 使

$$\sin(x+a)^2 \neq \sin x^2,$$

事实上, 若 $a \neq \sqrt{n\pi}$ ($n = 1, 2, \dots$).

则当 $x = 0$ 时, 便有 $\sin a^2 \neq 0 = \sin 0$.

若 $a = \sqrt{n\pi}$ (n 为一自然数),

则当 $x \neq \frac{(2k-n)\pi}{\sqrt{n\pi}}$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) 时,

$$\sin(x+a)^2 \neq \sin x^2.$$

因此 $f(x) = \sin x^2$ 不是周期函数.

(6) $f(x) = \sqrt{\tan x}$ 为周期函数, 最小周期为 π .

(7) 对任何正实数 a , 均存在 x , 使

$$\tan \sqrt{x+a} \neq \tan \sqrt{x},$$

事实上, 若 $a \neq (k\pi)^2$ ($k = 1, 2, \dots$),

则取 $x = 0$, 便有 $\tan \sqrt{a} \neq 0 = \tan 0$,

若 $a = (k\pi)^2$ (k 为一自然数),

则取 $x = a = (k\pi)^2$, 显然

$$\tan \sqrt{(k\pi)^2 + (k\pi)^2} = \tan(\sqrt{2}k\pi) \neq 0 = \tan \sqrt{(k\pi)^2},$$

因此, $f(x) = \tan \sqrt{x}$ 不是周期函数.

(8) 因为对任何正实数 a , 都有

$$f(0+a) = \sin a + \sin(a\sqrt{2}) \neq 0 = f(0),$$

故 $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$ 不是周期函数.

【234】 证明: 对于狄利克雷函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0 & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

任何有理数都是其周期.

证 设 a 为任意有理数, 则当 x 为有理数时, $x+a$ 也为有理数; 当 x 为无理数时, $x+a$ 也为无理数. 故

$$\chi(x+a) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时,} \end{cases}$$

因此 $\chi(x+a) = \chi(x)$.

即 $\chi(x)$ 是任何有理数为周期的周期函数.

【235】 证明: 在公共集上定义且其周期可公度的两个周期

函数的和及其乘积也是周期函数.

证 设 $f_1(x), f_2(x)$ 为定义在集合 E 上的周期函数, T_1, T_2 分别是它们的周期, 又设 T 为 T_1, T_2 的公约数, 即

$$T_1 = n_1 T, T_2 = n_2 T,$$

其中 n_1, n_2 为正整数, 于是

$$f_1(x + n_2 T_1) = f_1(x), f_2(x + n_1 T_2) = f_2(x),$$

设 $g_1(x) = f_1(x) + f_2(x), g_2(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$

则 $n_1 n_2 T$ 分别为 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 的周期. 事实上

$$\begin{aligned} g_1(x + n_1 n_2 T) &= f_1(x + n_2 T_1) + f_2(x + n_1 T_2) \\ &= f_1(x) + f_2(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(x + n_1 n_2 T) &= f_1(x + n_2 T_1) \cdot f_2(x + n_1 T_2) \\ &= f_1(x) \cdot f_2(x). \end{aligned}$$

【235. 1】 若 $f(x+T) = -f(x) (T > 0)$, 函数 $f(x)$ 被称为负周期函数, 证明函数 $f(x)$ 为以 $2T$ 为周期的周期函数.

$$\begin{aligned} \text{证 } f(x+2T) &= f[(x+T)+T] = -f(x+T) \\ &= -[-f(x)] = f(x), \end{aligned}$$

即 $f(x)$ 是以 $2T$ 为周期的周期函数.

【236】 证明: 若对于函数 $f(x) (-\infty < x < +\infty)$ 有等式

$$f(x+T) = kf(x), \quad (\text{其中 } k \text{ 和 } T \text{ 为正的常数})$$

则 $f(x) = a^x \varphi(x)$ (其中 a 为常数, 而 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的周期函数).

证 已知 $k > 0, T > 0$, 令 $a = k^{\frac{1}{T}} > 0$, 则 $a^T = k$, 于是

$$f(x+T) = a^T f(x),$$

定义 $\varphi(x) = a^{-x} f(x),$

则 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 事实上

$$\begin{aligned} \varphi(x+T) &= a^{-(x+T)} f(x+T) = a^{-x} \cdot a^{-T} \cdot a^T f(x) \\ &= a^{-x} f(x) = \varphi(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x) = a^x \varphi(x),$

其中 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

§ 4. 函数的图示法

1. 作出函数 $y = f(x)$ 的图形可用下述方法:

(1) 确定函数的存在域 $X = \{x\}$;

(2) 从 X 中选出充分密集的自变数值 x_1, x_2, \dots, x_n , 并作出函数 $y_i = f(x_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 的对应数值表;

(3) 在坐标平面 Oxy 上作出一系列的点 $M_i(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$, 并用线将其连接起来, 此连线的性质即可认为是许多中间点的位置.

2. 为了获得函数的正确图形, 应该研究这个函数的一般性质.

首先必须: (1) 解方程 $f(x) = 0$, 求出函数图形与 Ox 轴的交点(函数值为零的点);

(2) 确定函数为正数或为负数时, 自变数的变化域;

(3) 尽可能地说明函数单调(递增或递减)的区间;

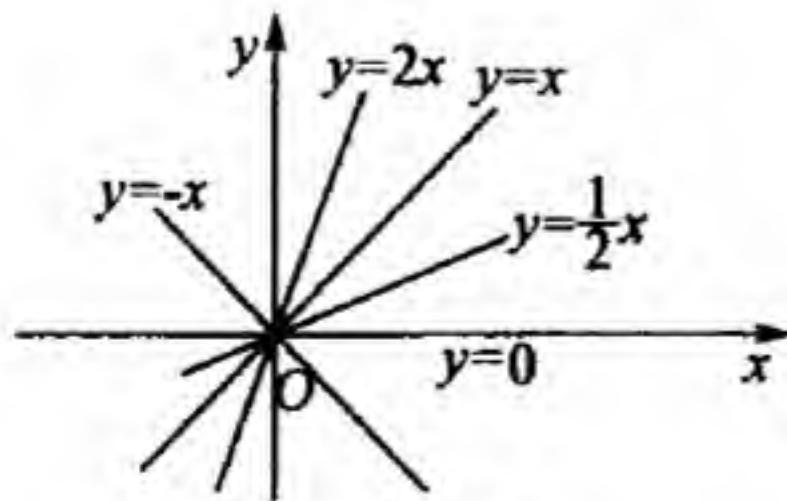
(4) 研究当自变数无限接近于函数存在域的边界点时函数的情况.

在这一节要求读者知道最简单的初等函数——幂函数、指数函数、三角函数等的性质.

利用这些性质, 无须作大量的计算工作, 就可画出许多函数的简图, 其他的图形有时就是这些最简单图形的组合(和或乘积等).

【237】 作出线性函数 $y = ax$ 在 $a = 0; \frac{1}{2}; 1; 2; -1$ 时, 的图形.

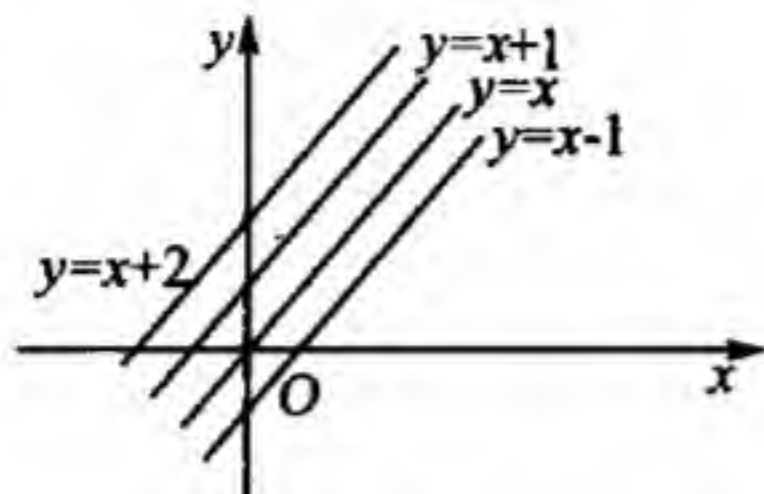
解



237 题图

【238】 作出线性函数 $y = x + b$, 当 $b = 0, 1, 2, -1$ 时的图形.

解

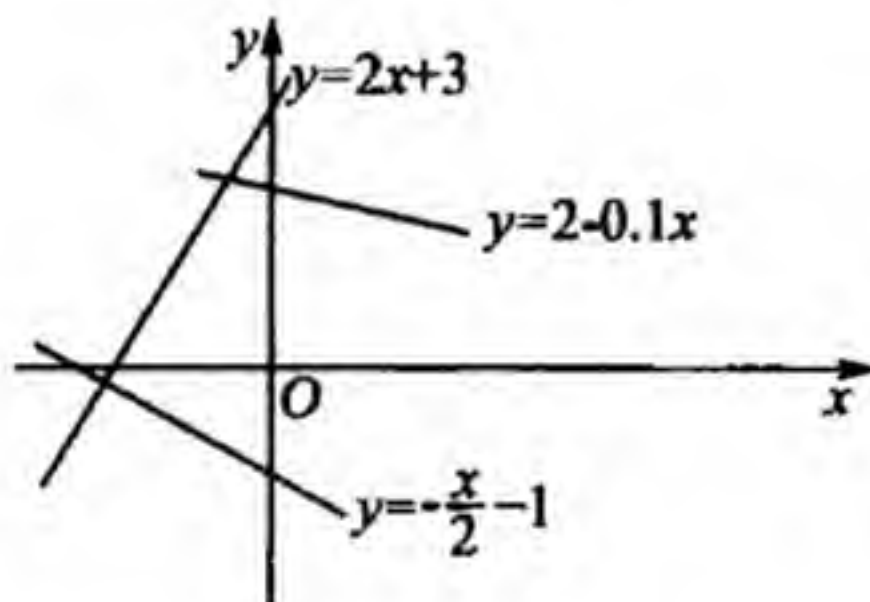


238 题图

【239】 作出线性函数的图形:

(1) $y = 2x + 3$; (2) $y = 2 - 0.1x$; (3) $y = -\frac{x}{2} - 1$.

解



239 题图

【240】 铁的线性温度膨胀系数 $\alpha = 1.2 \times 10^{-6}$, 作出适当尺度的函数图

$$l = f(T) \quad (-40^\circ \leq T \leq 100^\circ),$$

其中 T 表示温度(以度计), l 表示当温度为 T 时铁棒的长度. 设当 $T = 0^\circ$ 时, $l = 100$ 厘米.

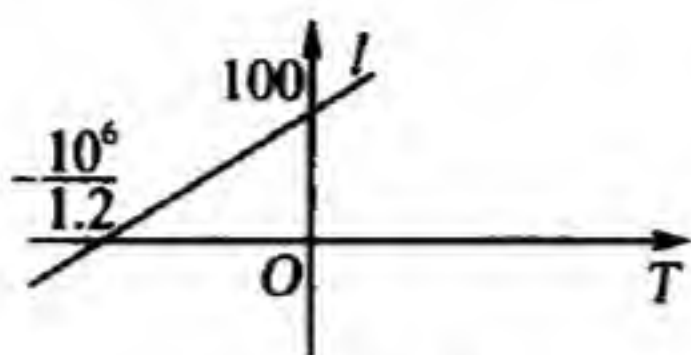
解 铁棒的长度与温度的关系为

$$l = l_0(1 + \alpha T).$$

当 $T = 0$ 时, $l = 100$, 代入上式得 $l_0 = 100$, 于是

$$l = 100(1 + 1.2 \times 10^{-6} T).$$

如 240 题图所示(两轴单位不同)



240 题图

【241】 两个质点在数轴上运动,第一质点在时间 $t=0$ 的初始时刻位于坐标原点左方 20 米处,其速度 $v_1=10$ 米/秒;第二质点在 $t=0$ 时位于原点 O 之右方 30 米处,其速度 $v_2=-20$ 米/秒;作出这两个点的运动方程图,并求出它们相遇的时间和位置.

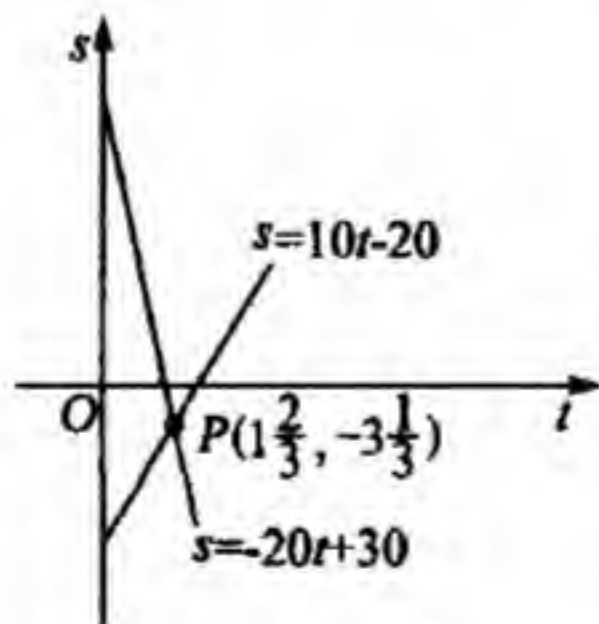
解 二质点运动的位移与时间的关系为:

$$s = 10t - 20, s = -20t + 30.$$

解上述方程得:

$$t = 1\frac{2}{3}, s = -3\frac{1}{3}.$$

即二质点在开始运动后 $1\frac{2}{3}$ 秒,在原点左方 $3\frac{1}{3}$ 米处相遇,运动方程的图形如图.



241 题图

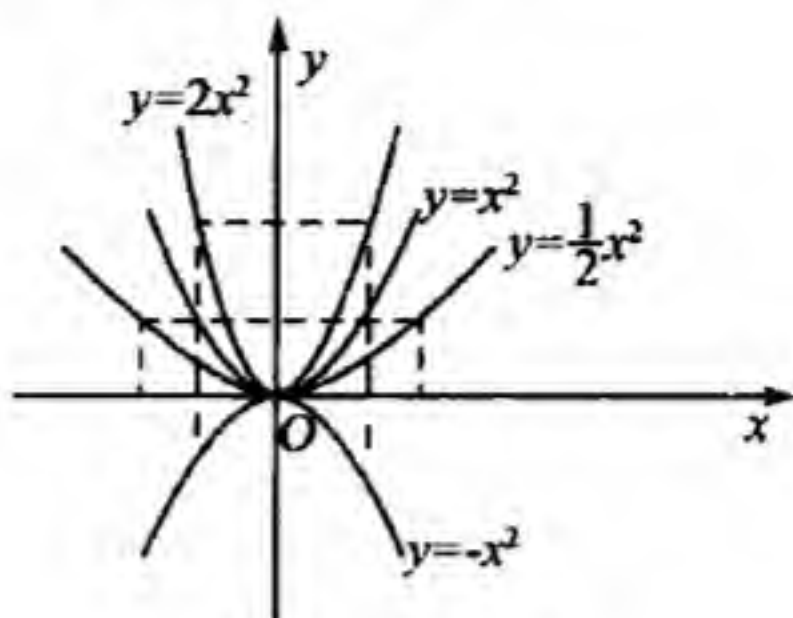
【242】 作出以下二次有理整函数的图形(抛物线):

(1) 当 $a = 1, \frac{1}{2}, 2, -1$ 时, $y = ax^2$;

(2) 当 $x_0 = 0, 1, 2, -1$ 时, $y = (x - x_0)^2$;

(3) 当 $c = 0, 1, 2, -1$ 时, $y = x^2 + c$.

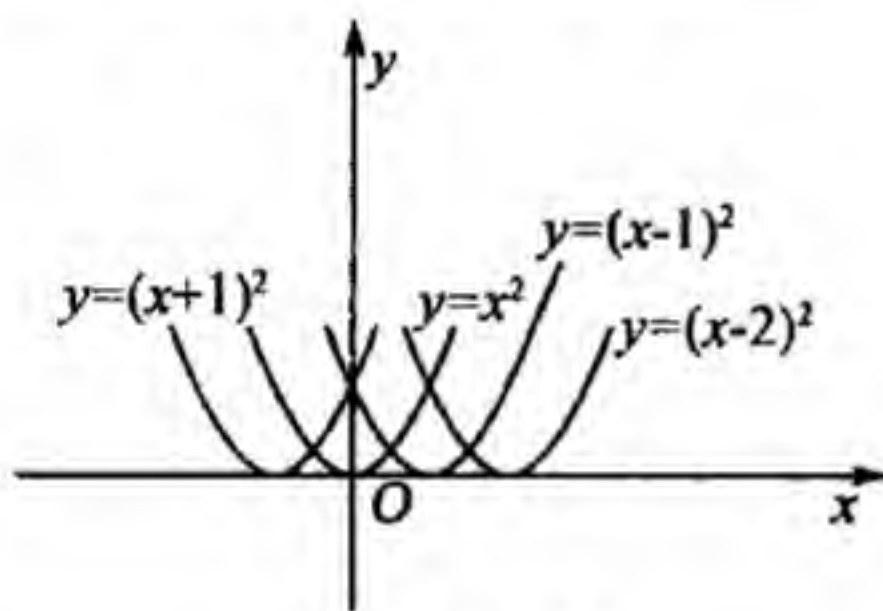
解 (1) 如 242 题图 1 所示.



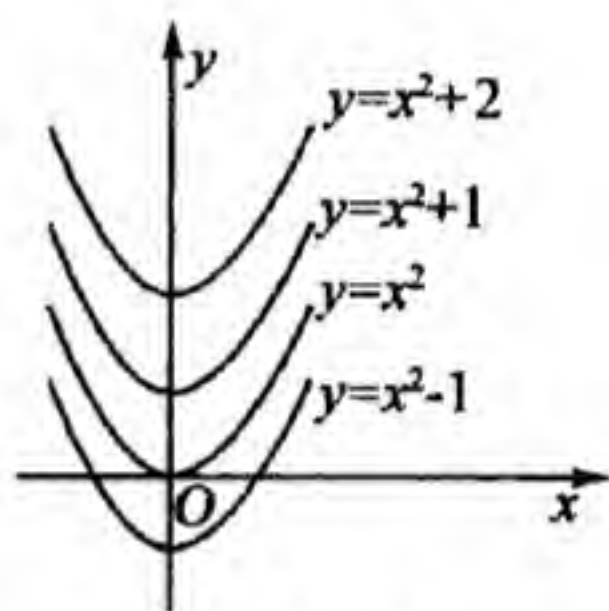
242 题图 1

(2) 如 242 题图 2 所示.

(3) 如 242 题图 3 所示.



242 题图 2



242 题图 3

【243】 将二次三项式 $y = ax^2 + bx + c$ 化为 $y = y_0 + a(x - x_0)^2$ 的形式, 并作出其图形, 研究下列例子:

(1) $y = 8x - 2x^2$;

(2) $y = x^2 - 3x + 2$;

(3) $y = -x^2 + 2x - 1$;

(4) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

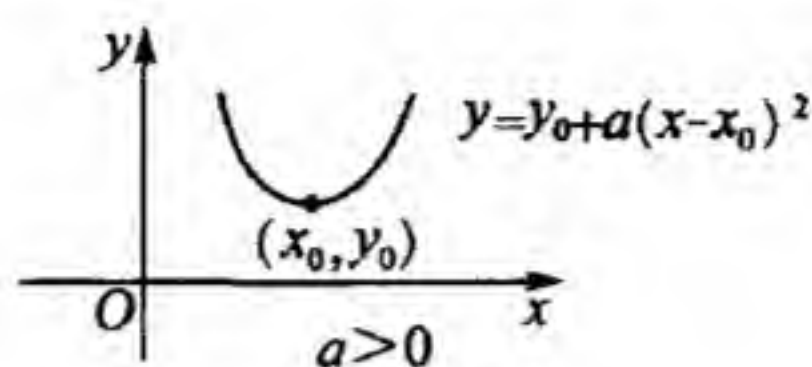
解 利用配方法得

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = y_0 + a(x - x_0),$$

其中 $x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

图形如 243 题图所示

(1) $y = 8x - 2x^2 = 8 - 2(x - 2)^2$,

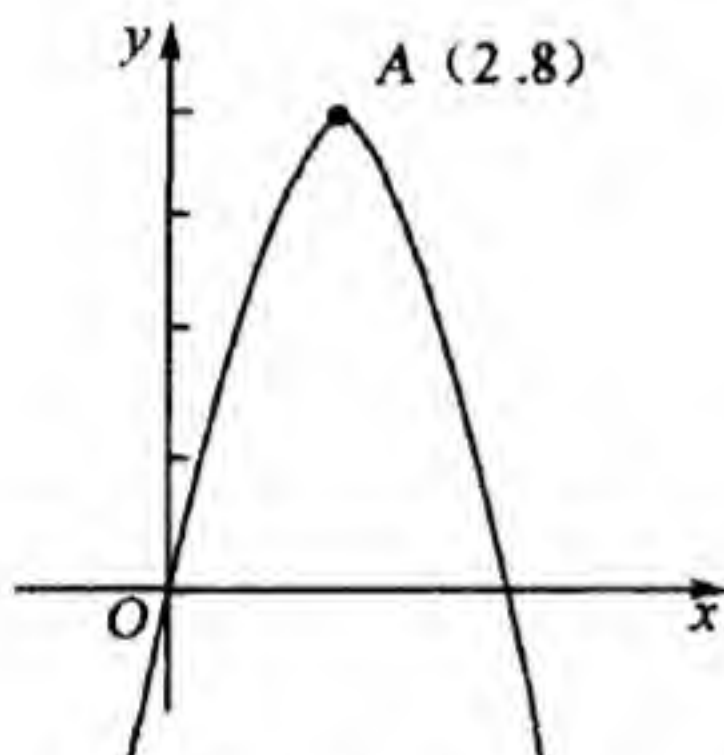


243 题图

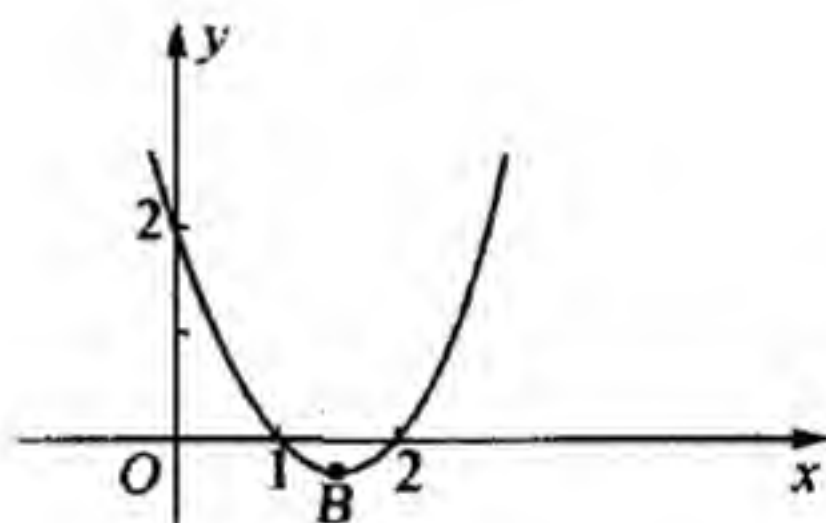
顶点为 $A(2, 8)$, 图形如 243 题图 1 所示.

$$(2) y = x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

顶点为 $B\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, 图形如 243 题图 2 所示.



243 题图 1



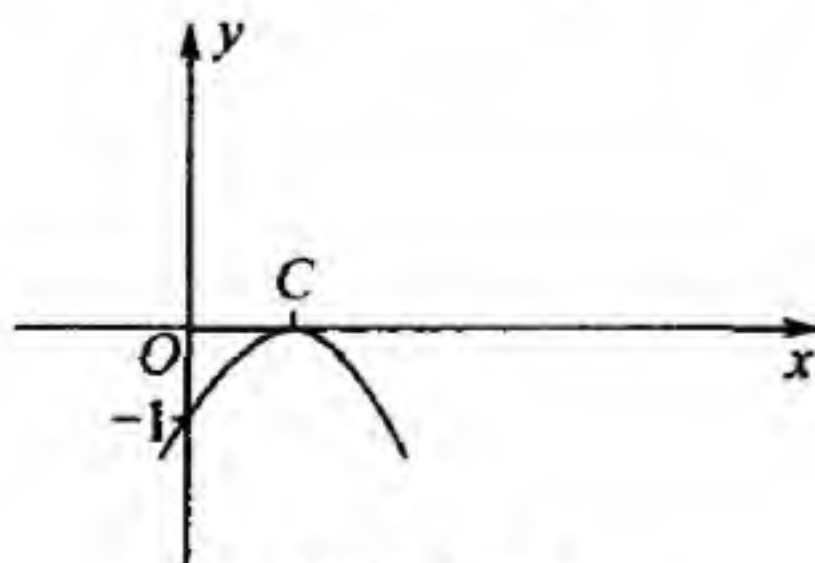
243 题图 2

$$(3) y = -x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2,$$

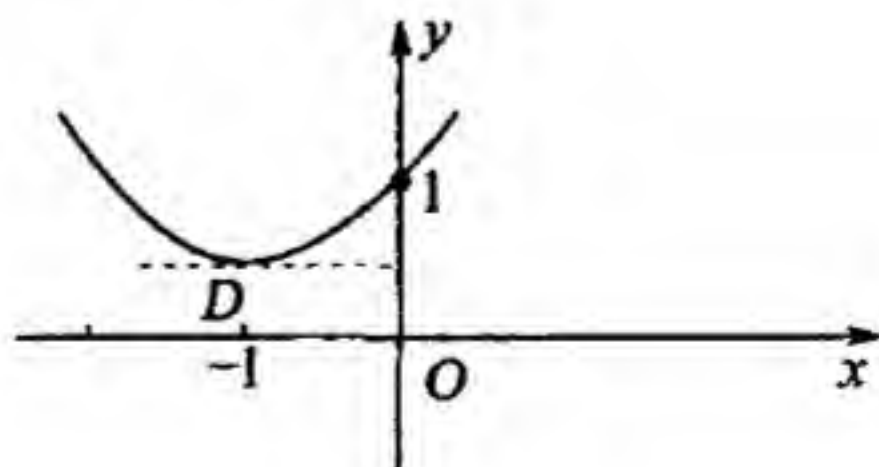
顶点为 $C(1, 0)$, 图形如 243 题图 3 所示.

$$(4) y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + \frac{1}{2},$$

顶点为 $D\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, 图形如 243 题图 4 所示.



243 题图 3



243 题图 4

【244】 质点以初始速度 $v_0 = 600$ 米 / 秒沿着与水平面成 $\alpha = 45^\circ$ 角的方向射出. 作出运动轨道的图形, 并求出最大的升高和飞行的射程(假定 $g \approx 10$ 米 / 秒², 空气阻力忽略不计).

解 运动轨道方程为 $y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$

这里 $\alpha = 45^\circ, v_0 = 600, g = 10,$

所以 $y = x - \frac{x^2}{3600},$

即 $y = -\frac{1}{36000}(x - 18000)^2 + 9000.$

当 $x = 18000$ 时, y 值最大为 9000, 即最大的升高为 9000 米.

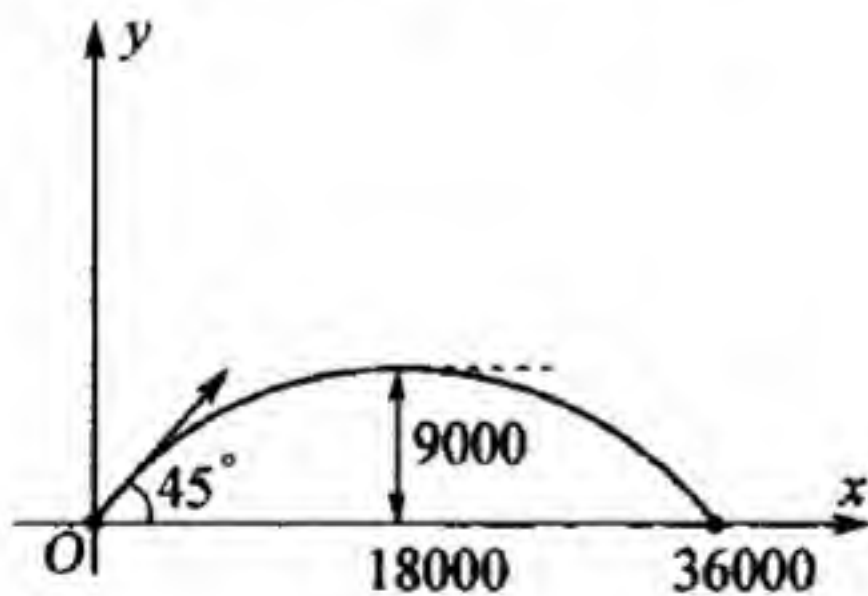
当 $x = 36000$ 时, $y = 0$, 即飞行的射程为 36000 米.

如 244 题图所示.

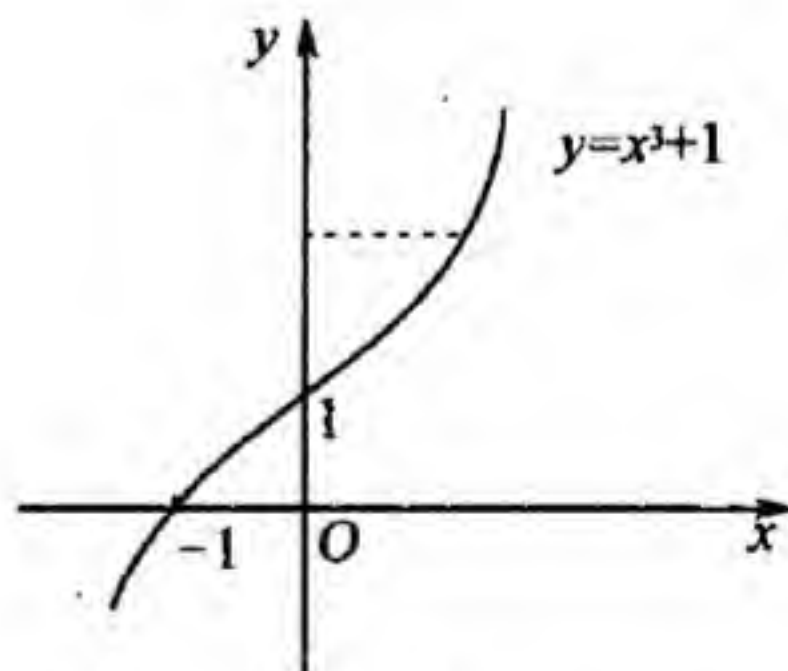
作出高于二次的有理整函数的图形(245 ~ 248).

【245】 $y = x^3 + 1.$

解 如 245 题图所示.



244 题图



245 题图

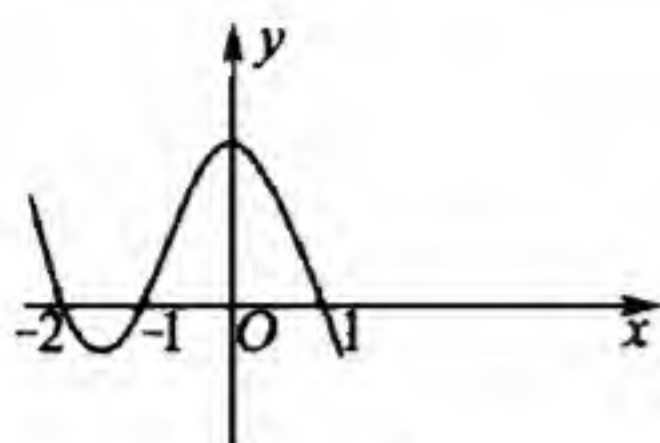
【246】 $y = (1 - x^2)(2 + x).$

解 当 $x = \pm 1, -2$ 时, $y = 0.$

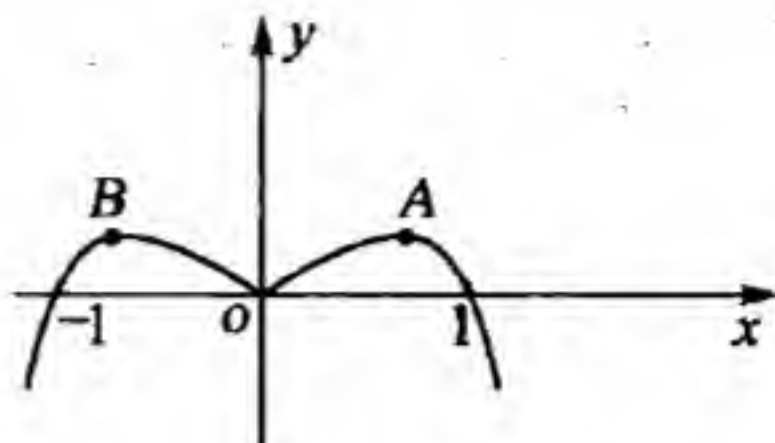
当 $x < -2, -1 < x < 1$ 时, $y > 0.$

当 $-2 < x < -1$ 及 $x > 1$ 时, $y < 0.$

函数的图形如 246 题图所示.



246 题图



247 题图

【247】 $y = x^2 - x^4$.

解 $y = x^2(1-x)(1+x) = \frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$,

图形关于 Oy 轴对称, 与两坐标轴的交点为

$(-1, 0), (0, 0), (1, 0)$.

当 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $y = \frac{1}{4}$.

此时 $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 及 $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 均为图形上的最高点.

当 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 曲线上升.

当 $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < +\infty$ 时, 曲线下降.

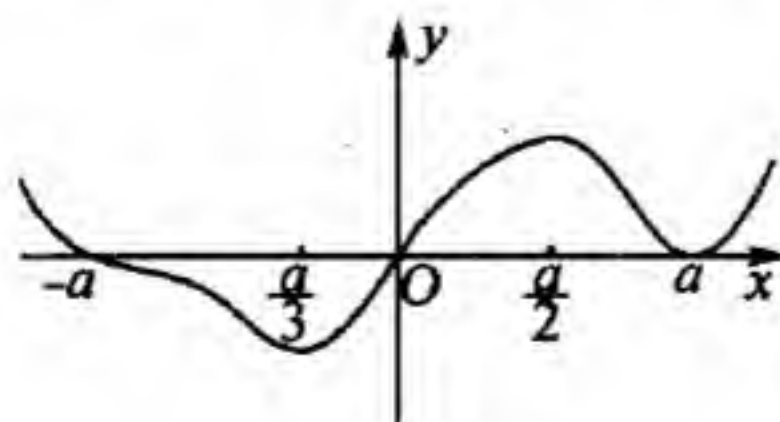
图形如 247 题图所示.

【248】 $y = x(a-x)^2(a+x)^3 \quad (a > 0)$.

解 当 $x = 0, a, -a$ 时, $y = 0$.

当 $x > 0$ 及 $x < -a$ 时, $y > 0$.

当 $-a < x < 0$ 时, $y < 0$, 图形如 248 题图所示.

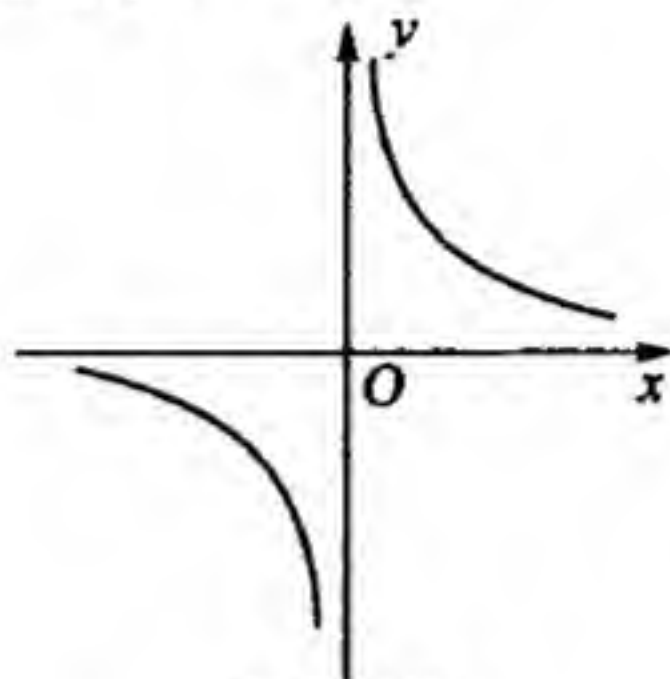


248 题图

作出线性分式函数的图形(双曲线)(249 ~ 250).

【249】 $y = \frac{1}{x}$.

解 如 249 题图所示.



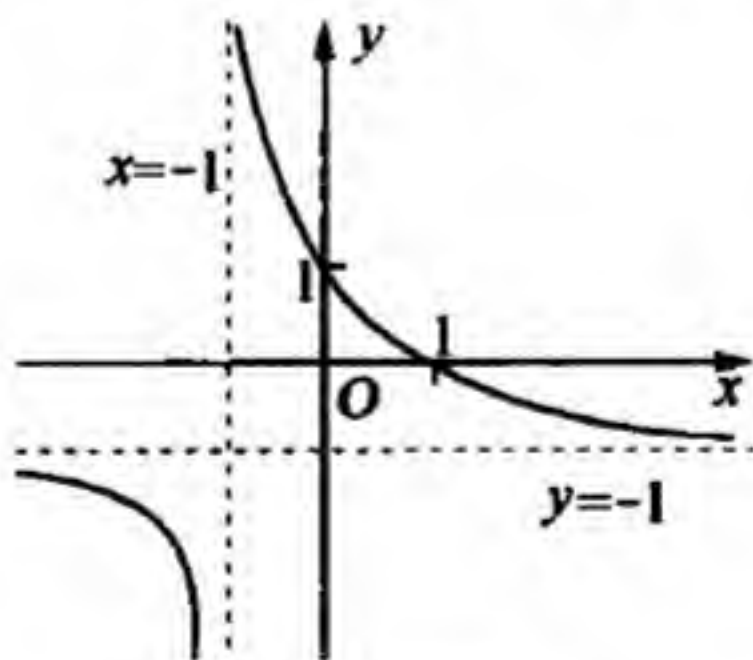
249 题图

【250】 $y = \frac{1-x}{1+x}$.

解 $y = \frac{1-x}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$,

即 $y+1 = \frac{2}{1+x}$.

图形的对称中心为 $(-1, -1)$, 如 250 题图所示.



250 题图

【251】 将线性分式函数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0, c \neq 0$),

化为 $y = y_0 + \frac{m}{x-x_0}$ 的形式, 再作出其图形, 并研究下例: y

$$= \frac{3x+2}{2x-3}$$

解 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

$$= \frac{a}{c} + \frac{\frac{bx-ad}{c^2}}{x - \left(-\frac{d}{c}\right)} = y_0 + \frac{m}{x-x_0},$$

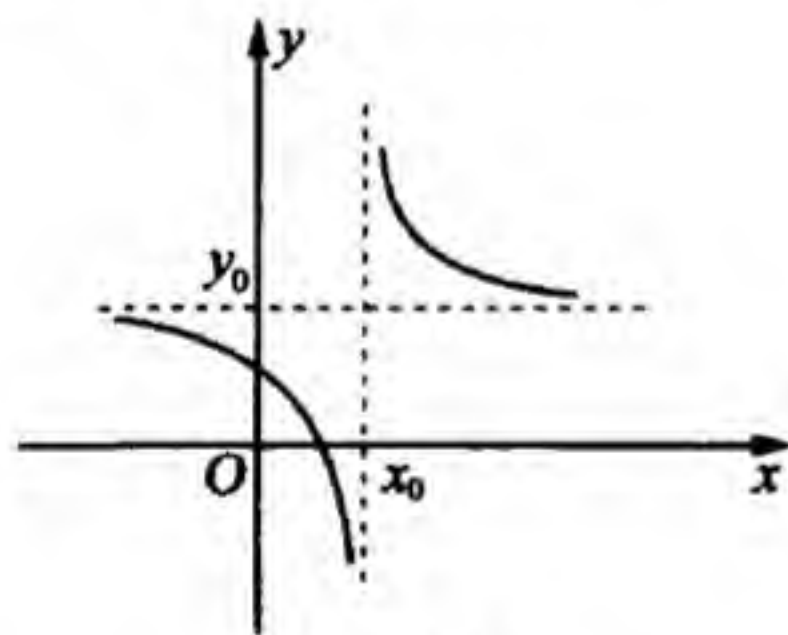
其中 $x_0 = -\frac{d}{c}, y_0 = \frac{a}{c}, m = \frac{bx-ad}{c^2}.$

图形如 251 题图 1 所示.

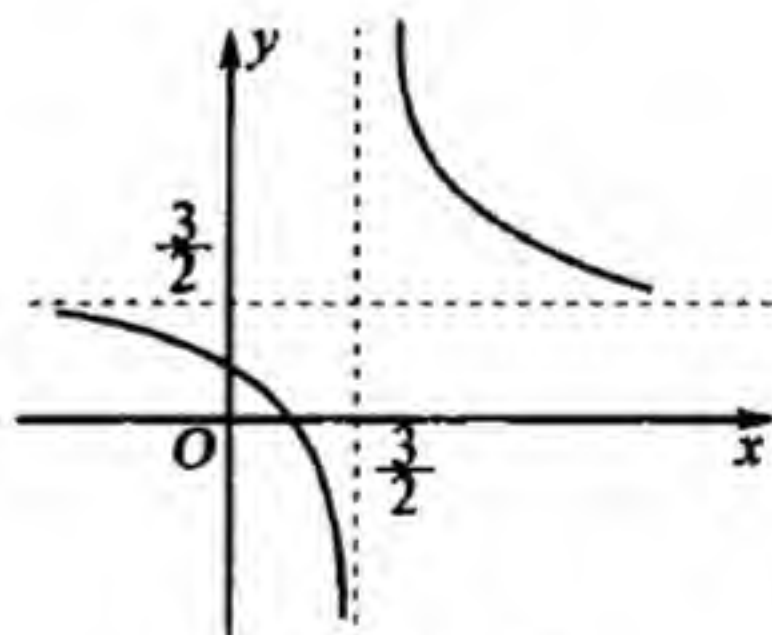
对于 $y = \frac{3x+2}{2x-3},$

有 $x_0 = y_0 = \frac{3}{2}.$

图形如 251 题图 2 所示.



251 题图 1



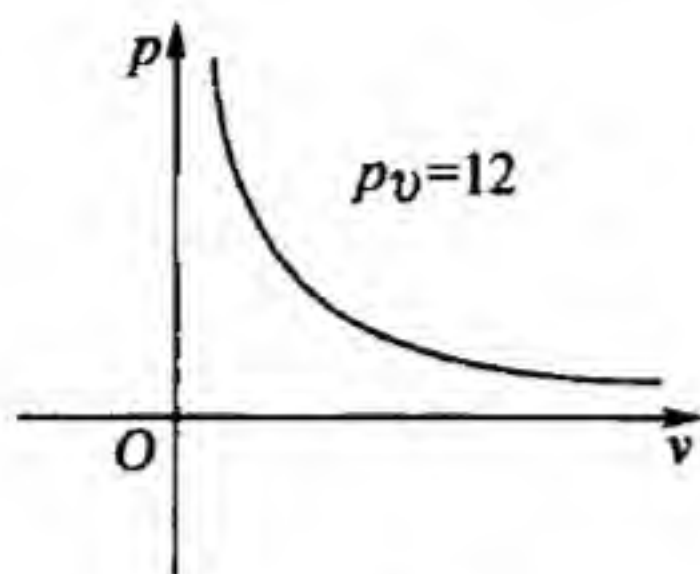
251 题图 2

【252】 当压力 $p_0 = 1$ 大气压时, 气体占有体积 $V_0 = 12$ 立方米, 若气体的温度保持不变, 作出气体体积 V 随着压力变化而变化的图形(波伊尔 - 马里阿特定律).

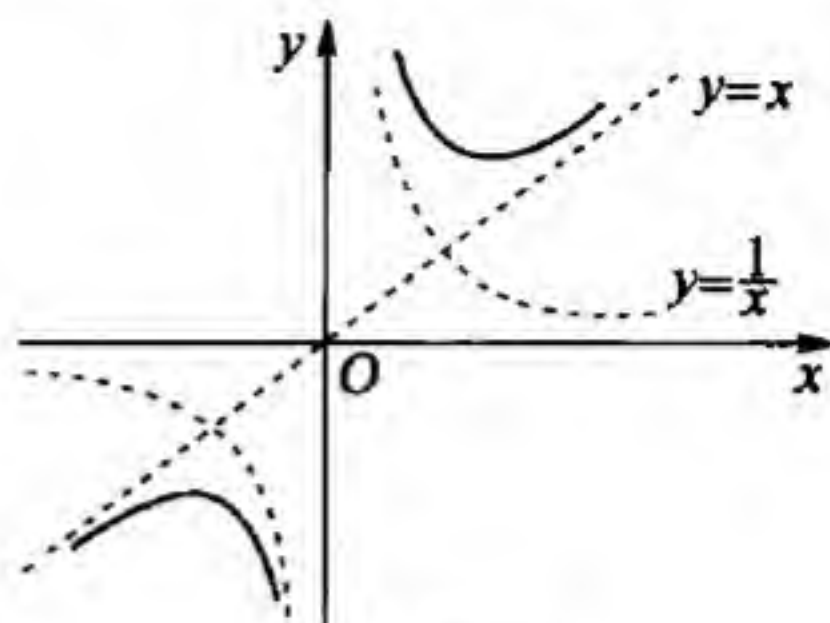
解 当温度保持不变时, 气体体积 v 与压力 p 成反比, 即

$$pv = C \quad (\text{其中 } C \text{ 为常数}).$$

当 $p_0 = 1$ 时, $v_0 = 12$, 故 $C = 12$. 所以, $pv = 12$, 图形如 252 题图所示.



252 题图



253 题图

作出下列有理分式函数的图形(253 ~ 262).

【253】 $y = x + \frac{1}{x}$ (双曲线).

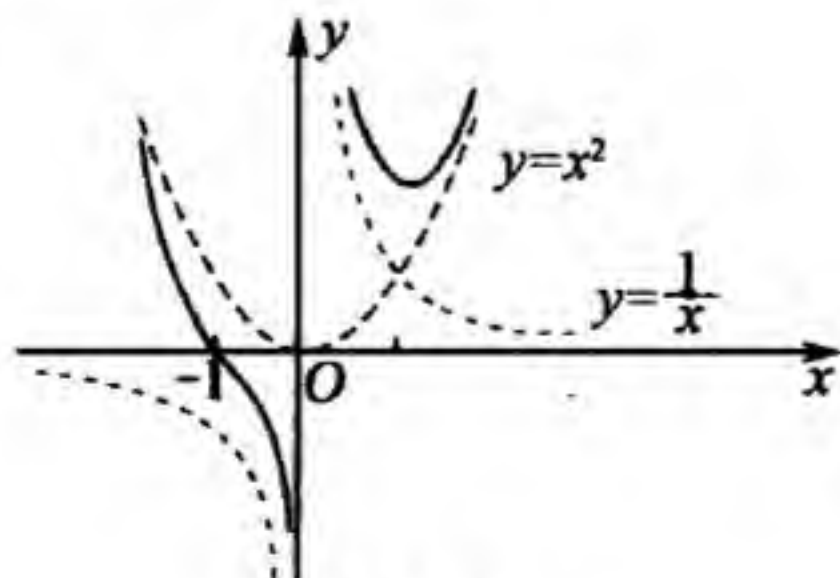
解 将 $y = x$ 及 $y = \frac{1}{x}$ 的图形迭加所得如 253 题图中粗实线所示.

【254】 $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (牛顿三次曲线).

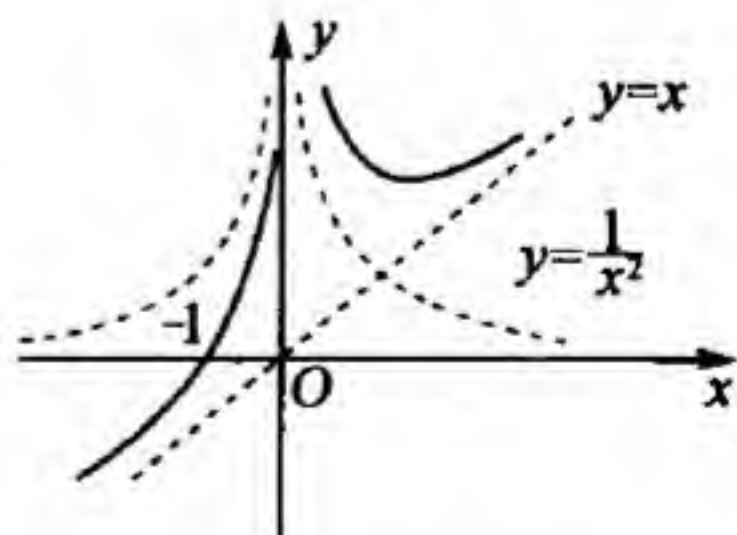
解 由 $y = x^2$ 及 $y = \frac{1}{x}$ 的图形迭加所得如 254 题图中粗实线所示.

【255】 $y = x + \frac{1}{x^2}$.

解 由 $y = x$ 及 $y = \frac{1}{x^2}$ 的图形迭加所得. 如 255 题图中粗实线所示.



254 题图



255 题图

【256】 $y = \frac{1}{1+x^2}$ (安叶泽曲线).

解 图形关于 Oy 轴对称, 且 $y > 0$, 即曲线位于 Ox 轴上方. 最高为 $(0, 1)$. 当 x 的绝对值无限增大时, y 值无限变小. 图形以 Ox 轴为渐近线. 图形如 256 题图所示.

【257】 $y = \frac{2x}{1+x^2}$ (牛顿蛇形线).

解 因为 $\frac{2(-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{2x}{1+x^2}$,

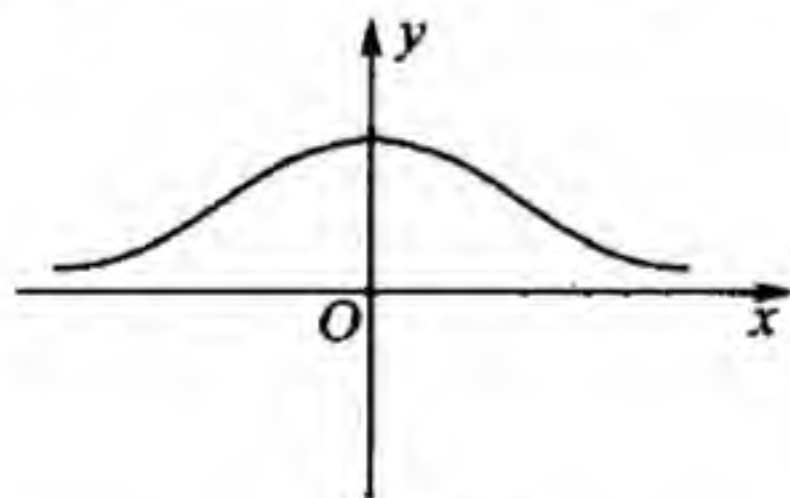
所以, 图形关于原点对称. 又 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$,

所以 $-1 \leq y \leq 1$,

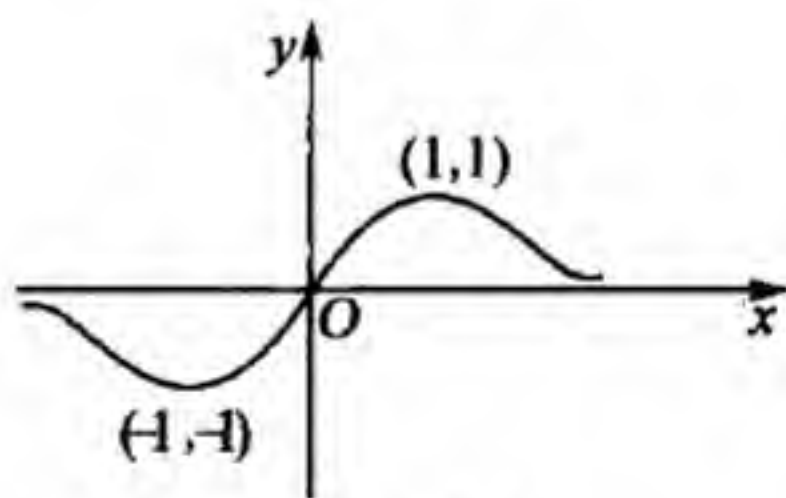
当 $x = 0$ 时, $y = 0$; $x = 1$ 时, $y = 1$; $x = -1$ 时, $y = -1$;

当 $x > 0$ 时, $y > 0$;

当 $0 < x < 1$ 时, 曲线上升, 当 $x > 1$ 时, 曲线下降, 图形以 Ox 轴为渐近线. 如 257 题图所示.



256 题图



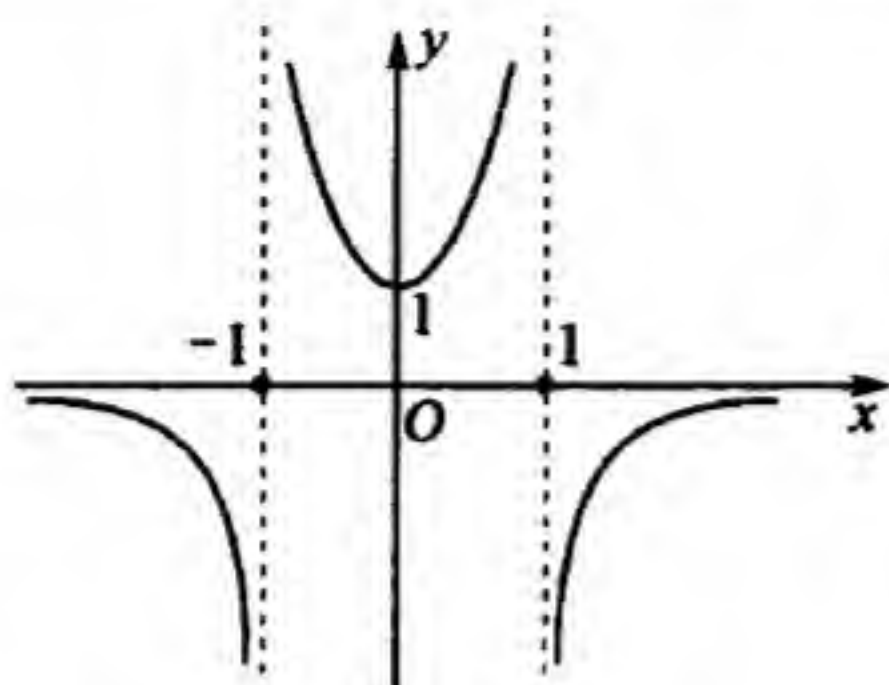
257 题图

【258】 $y = \frac{1}{1-x^2}$.

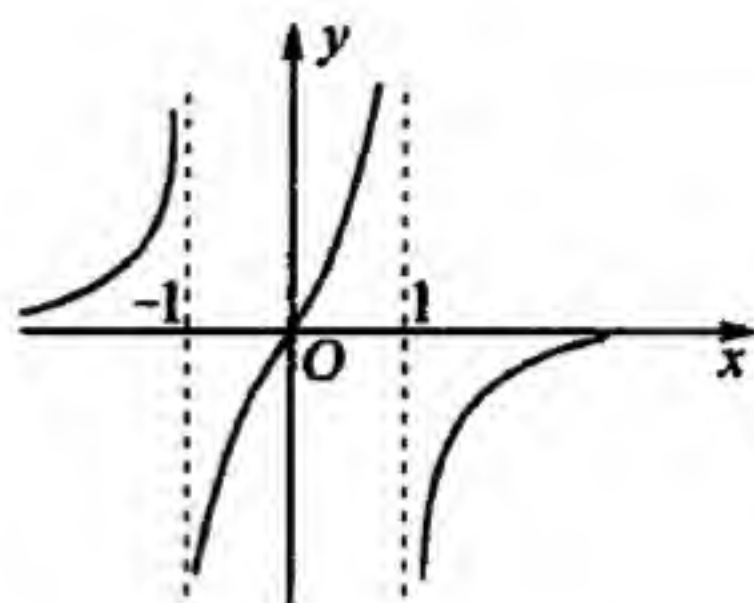
解 图形关于 Oy 轴对称, 且过点 $(0, 1)$

当 $0 < x < 1$ 时, 及 $x > 1$ 时, 曲线上升.

当 $x = \pm 1$ 时, y 无意义, $x = \pm 1$ 为曲线的渐近线, $y = 0$ 也为曲线的渐近线, 如 258 题图所示.



258 题图



259 题图

【259】 $y = \frac{x}{1-x^2}$.

解 图形关于原点对称,且经过原点.

$x = \pm 1, y = 0$ 为曲线的渐近线.

在 $(0, 1)$ 及 $(1, +\infty)$ 内曲线上升,如 259 题图所示.

【260】 $y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}$.

解 将 $y = \frac{1}{1+x}, y = -\frac{2}{x}$ 及 $y = \frac{1}{1-x}$ 的图形迭加所得.

$x = -1, 0, 1$ 及 $y = 0$ 为曲线的渐近线.

【261】 $y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{1-x}$.

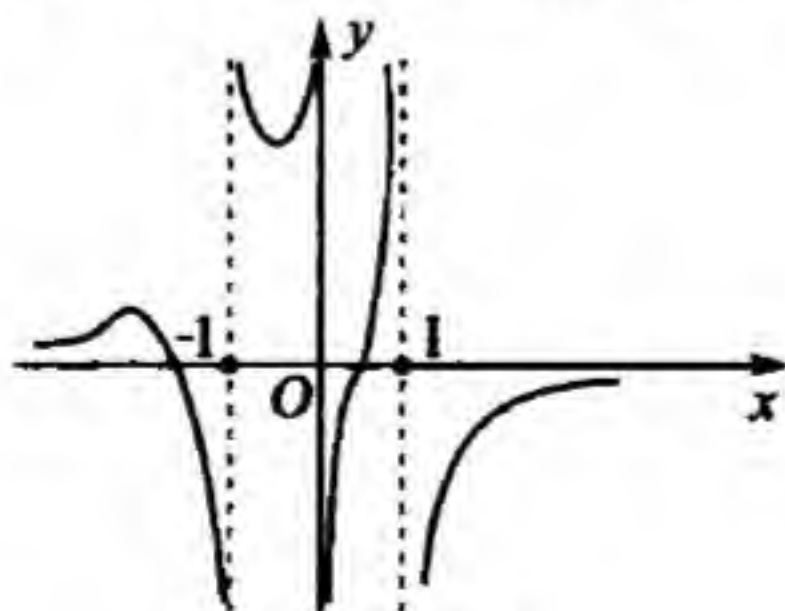
解 图形由 $y = \frac{1}{1+x}, y = -\frac{2}{x^2}, y = \frac{1}{1-x}$

的图形迭加而成. 图形关于 Oy 轴对称,

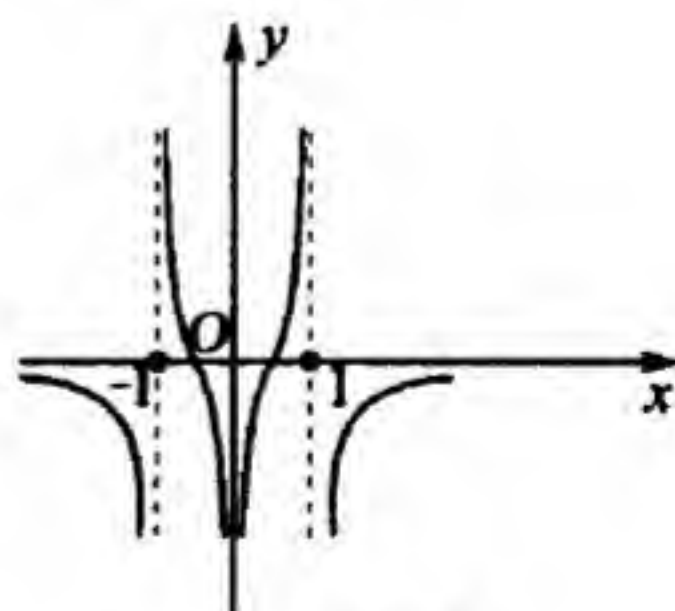
$$x = -1, x = 0, x = 1$$

及 $y = 0,$

为其渐近线,如 261 题图所示.



260 题图



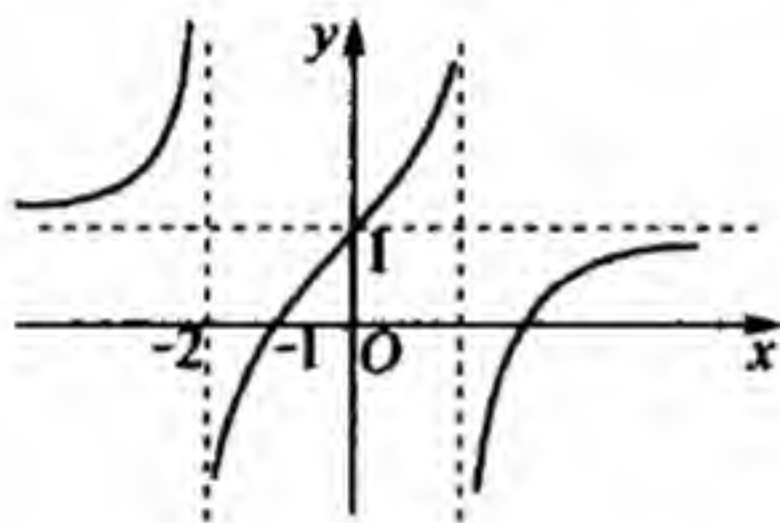
261 题图

【262】 $y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$

解 $y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} = 1 - \frac{2x}{(x+2)(x-1)}$
 $= 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-1},$

图形是由 $y = 1, y = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x+2}$ 及 $y = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-1}$ 的图形叠加而成.

特别地 $x = -2, x = 1, y = 1$ 为其渐近线, 如 262 题图所示.



262 题图

【263】 将函数 $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1x + b_1} (a_1 \neq 0)$ 化为 $y = kx + m + \frac{n}{x - x_0}$ 的形式, 作出其简图, 并研究 $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$.

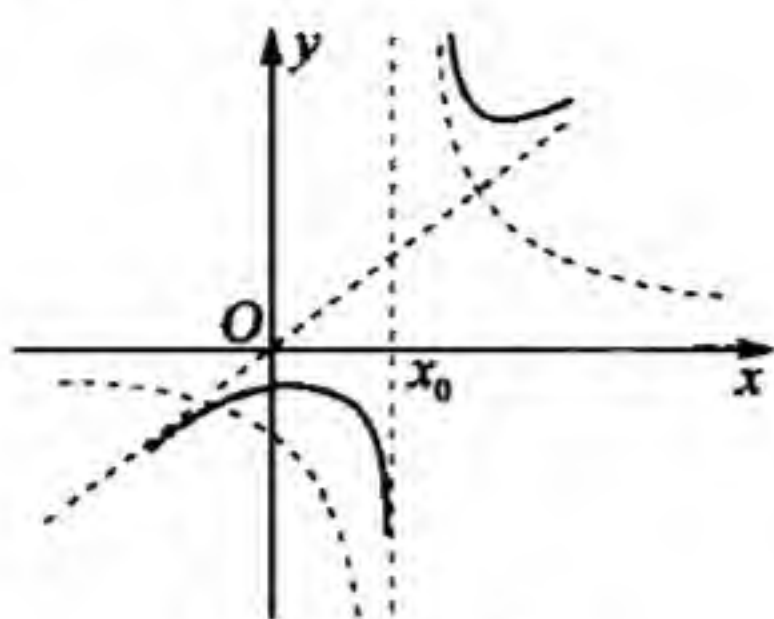
解 $y = \frac{a}{a_1}x + \frac{a_1b - ab_1}{a_1^2} + \frac{\frac{c}{a_1} - \frac{b}{a_1^2}(a_1b - ab_1)}{x - (-\frac{b_1}{a_1})}$
 $= kx + m + \frac{n}{x - x_0},$

其中 $k = \frac{a}{a_1}, m = \frac{a_1b - ab_1}{a_1^2},$

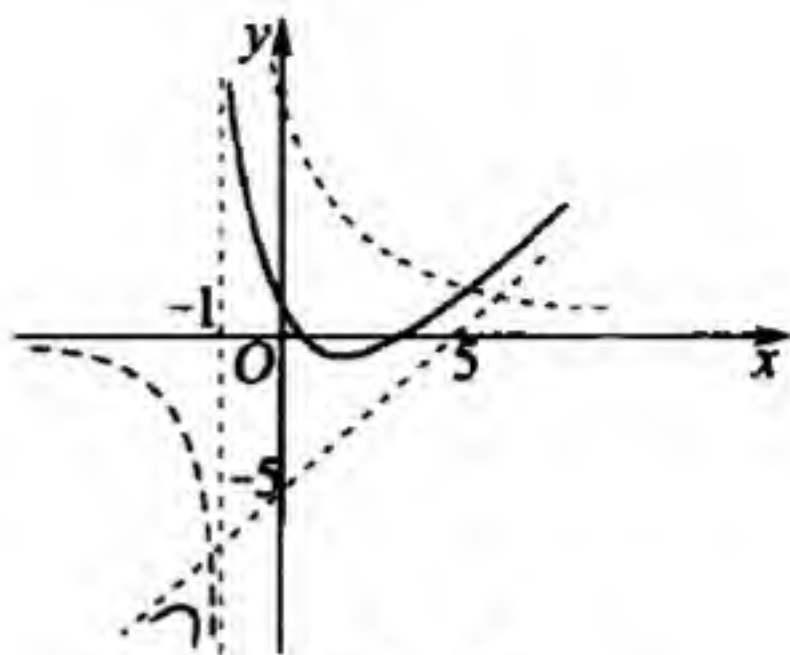
$x_0 = -\frac{b_1}{a_1}, n = \frac{c}{a_1} - \frac{b_1}{a_1^2}(a_1b - ab_1).$

图形由 $y = kx + m$ 及 $y = \frac{n}{x - x_0}$ 的图形迭加而成, 如 263 题图 1

中的粗实线所示.



263 题图 1



263 题图 2

$$\text{对于 } y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1} = x - 5 + \frac{8}{x + 1}.$$

图形如 263 题图 2 中的粗实线所示.

【264】 质点与引力中心相距 x , 设当 $x = 1$ 米时, 引力 $F = 10$ 千克, 作出质点的引力 F 的绝对值的图形(牛顿定律).

解 由万有引力定律知

$$F = \frac{k}{x^2},$$

其中 k 为常数, 当 $x = 1$ 时, $F = 10$, 于是, $k = 10$, 所以

$$F = \frac{10}{x^2}.$$

如 264 题图所示.

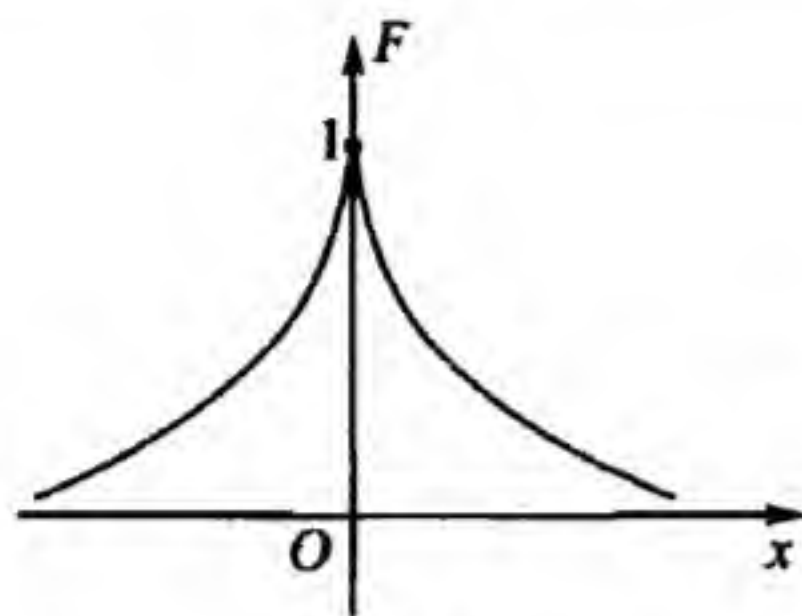
【265】 根据范德瓦尔斯定律, 当温度不变时, 真实气体的体积 v 及其压力 p 相关的关系式为:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = c,$$

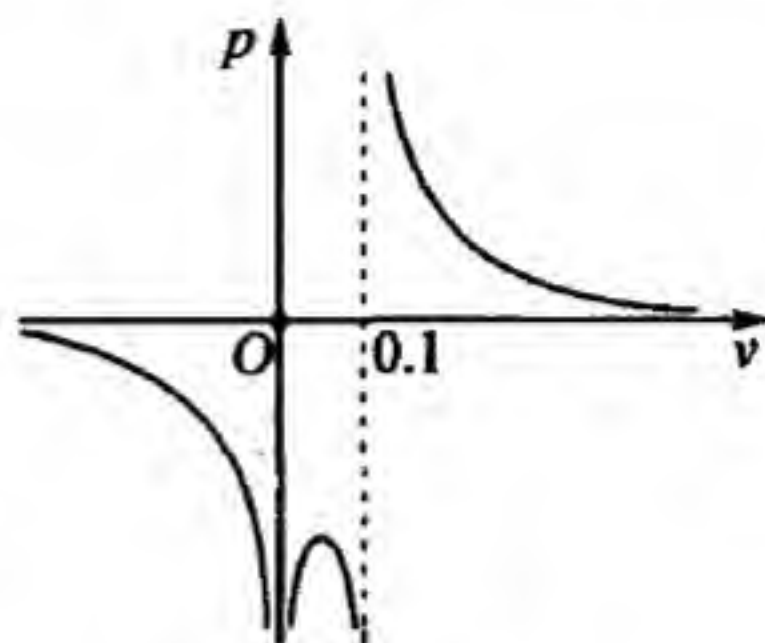
若 $a = 2, b = 0.1, c = 10$, 作出函数 $p = p(V)$ 的图形.

$$\text{解 由于 } p = \frac{10}{v - 0.1} - \frac{2}{v^2},$$

其图形是由 $p = \frac{10}{v - 0.1}$ 及 $p = -\frac{2}{v^2}$ 的图形叠加而成, 如 265 题图所示.



264 题图

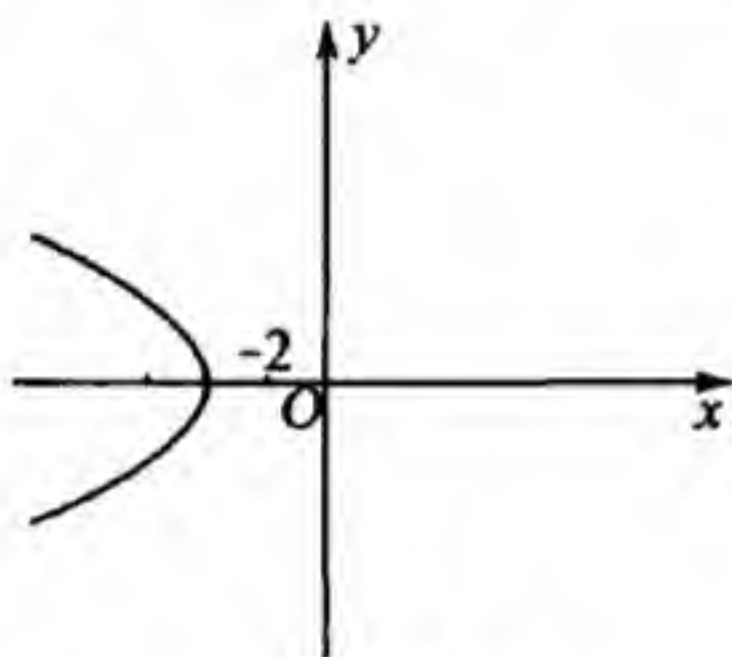


265 题图

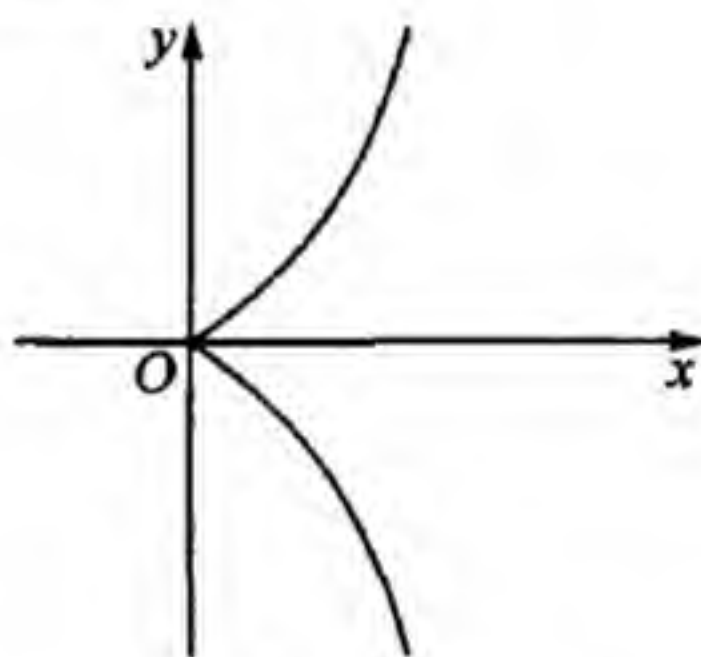
作出以下无理函数的图形(266 ~ 273).

【266】 $y = \pm \sqrt{-x-2}$ (抛物线).

解 $y^2 = -(x+2)$, 如 266 题图所示.



266 题图



267 题图

【267】 $y = \pm x\sqrt{x}$ (尼尔抛物线).

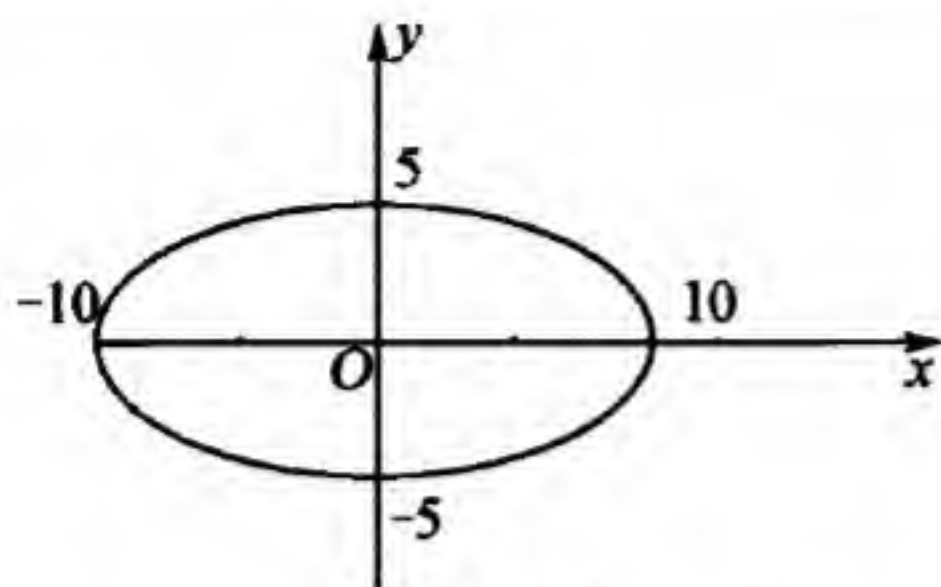
解 $y^2 = x^3$, 如 267 题图所示.

【268】 $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{100-x^2}$ (椭圆).

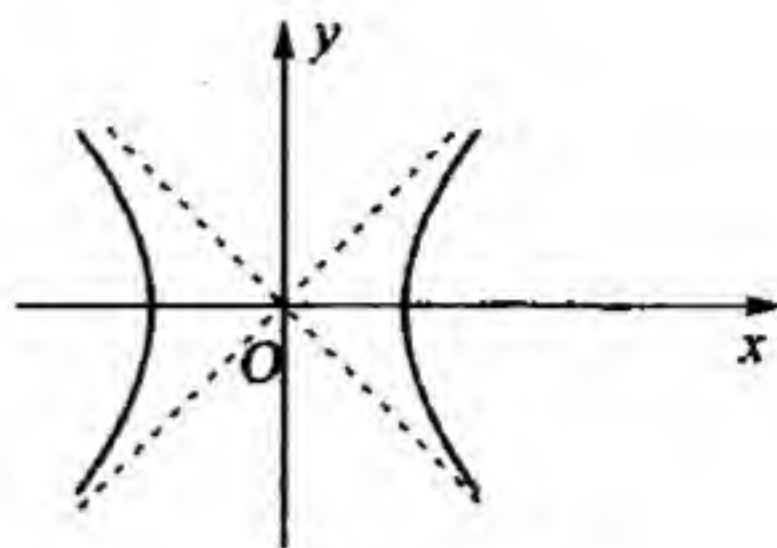
解 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$, 如 268 题图所示.

【269】 $y = \pm \sqrt{x^2-1}$ (双曲线).

解 $x^2 - y^2 = 1$, 如 269 题图所示.



268 题图



269 题图

【270】 $y = \pm \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

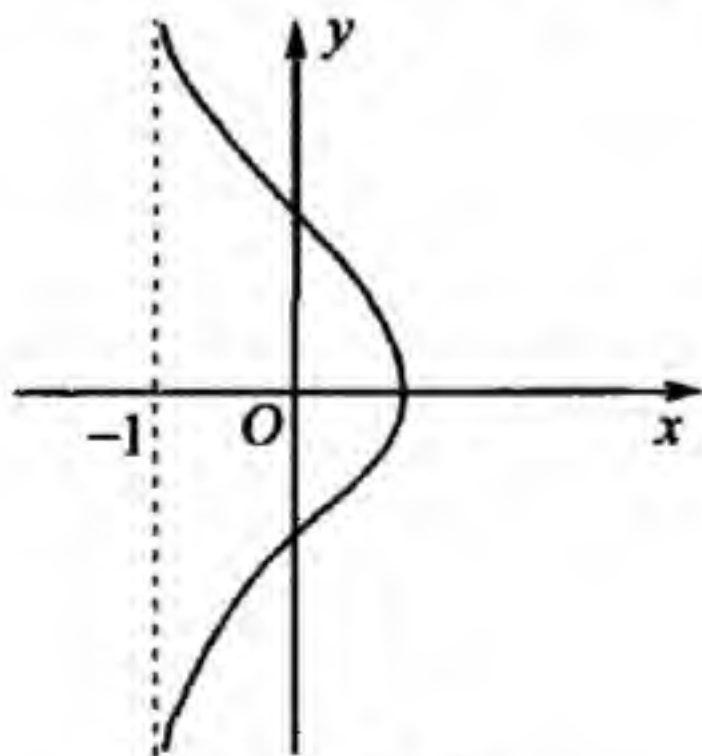
解 $y^2 = \frac{1-x}{1+x}$,

即 $x = -1 + \frac{2}{1+y^2}$.

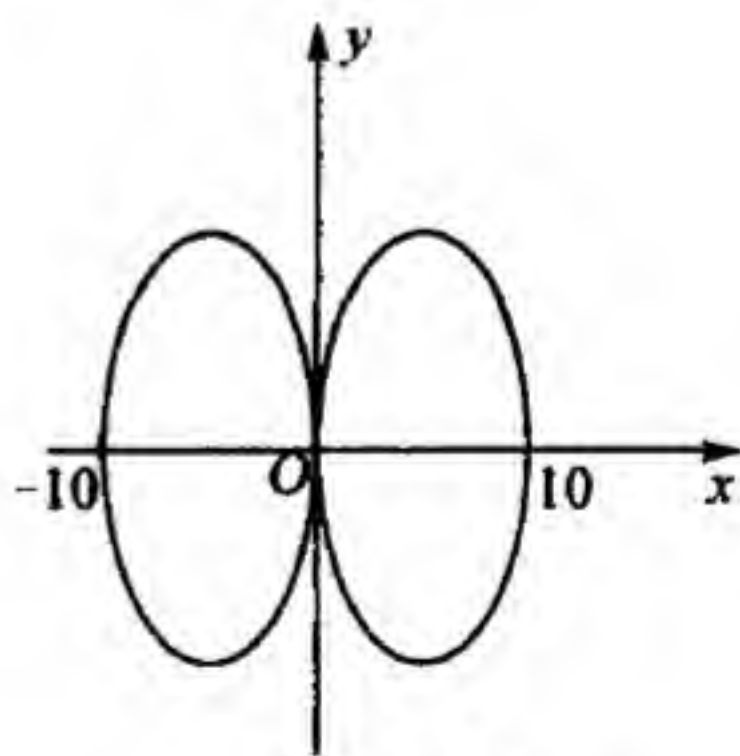
将 $x = \frac{2}{1+y^2}$ 的图形向左平移一个单位, 即得如 270 题图所示 ($-1 < x \leq 1$).

【271】 $y = \pm x \sqrt{100 - x^2}$.

解 当 $x = 0, \pm 10$ 时,
 $y = 0$ 且 $-10 \leq x \leq 10$.



270 题图



271 题图

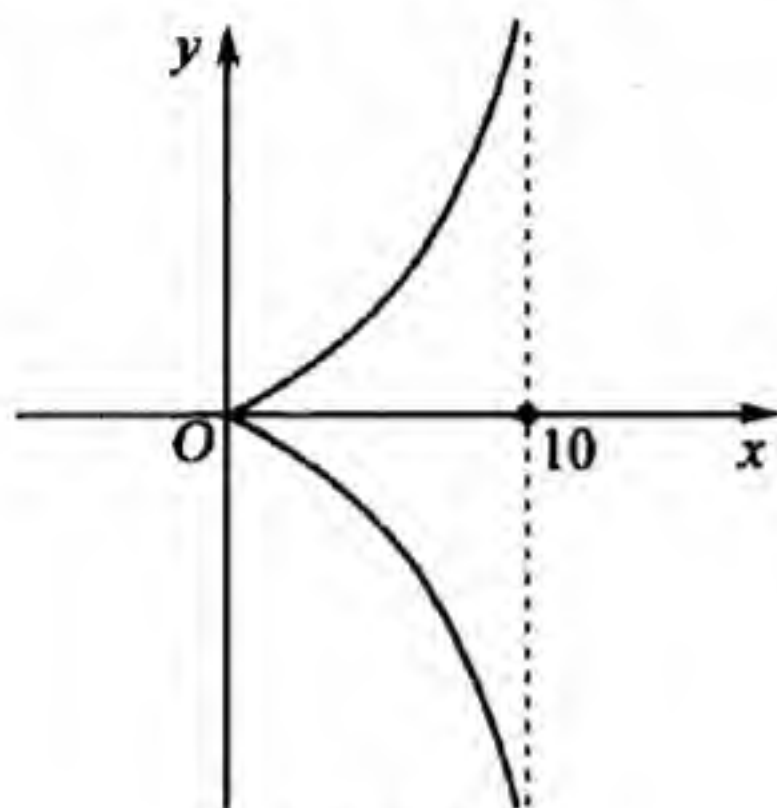
【272】 $y = \pm x \sqrt{\frac{x}{10-x}}$ (蔓叶线).

解 $y^2 = \frac{x^3}{10-x}$ 定义域为 $0 \leq x < 10$.

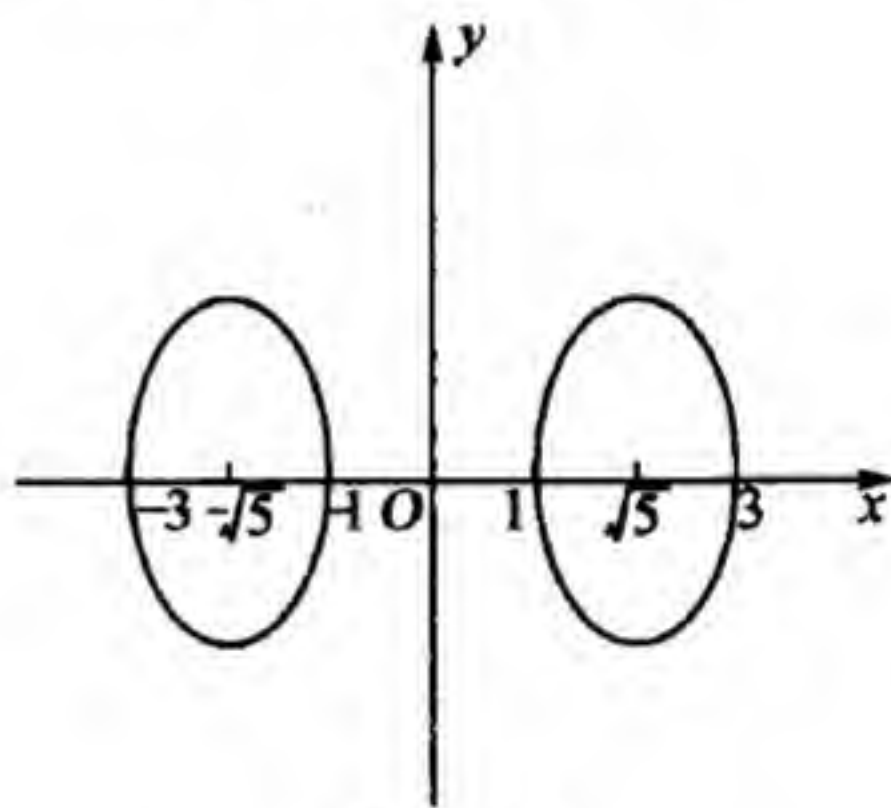
如 272 题图所示.

【273】 $y = \pm \sqrt{(x^2 - 1)(9 - x^2)}$.

解 $y = \pm \sqrt{16 - (x^2 - 5)^2}$, 定义为 $1 \leq x^2 \leq 9$.



272 题图

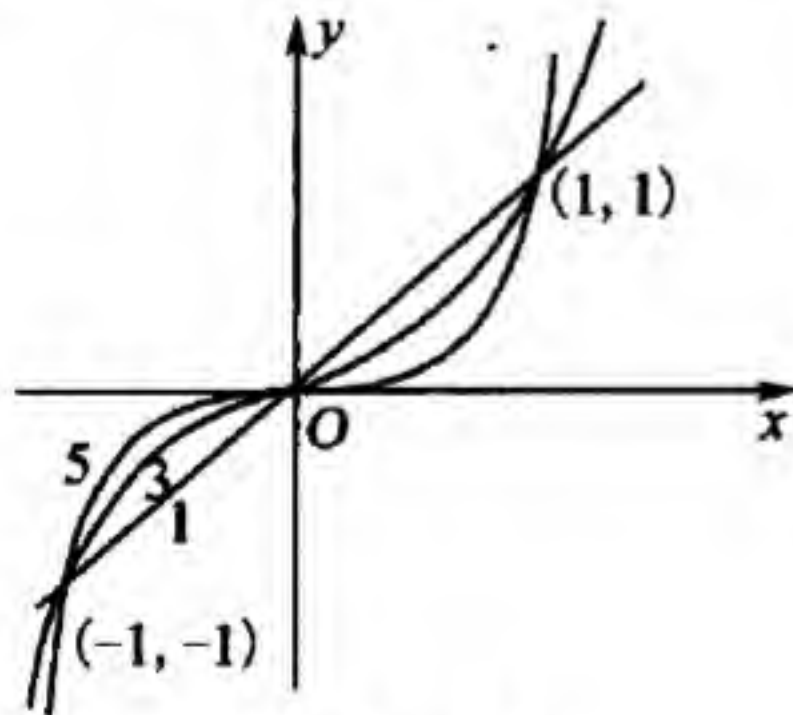


273 题图

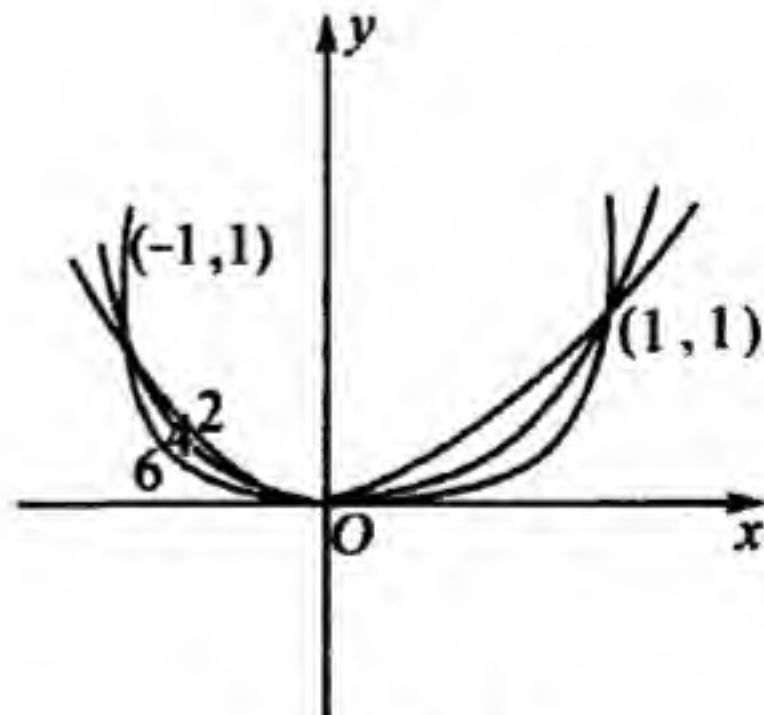
【274】 作出幂函数 $y = x^n$, 当: (1) $n = 1, 3, 5 \dots$; (2) $n = 2, 4, 6 \dots$ 时的图形.

解 (1) 如 274 题图 1 所示.

(2) 如 274 题图 2 所示.



274 题图 1

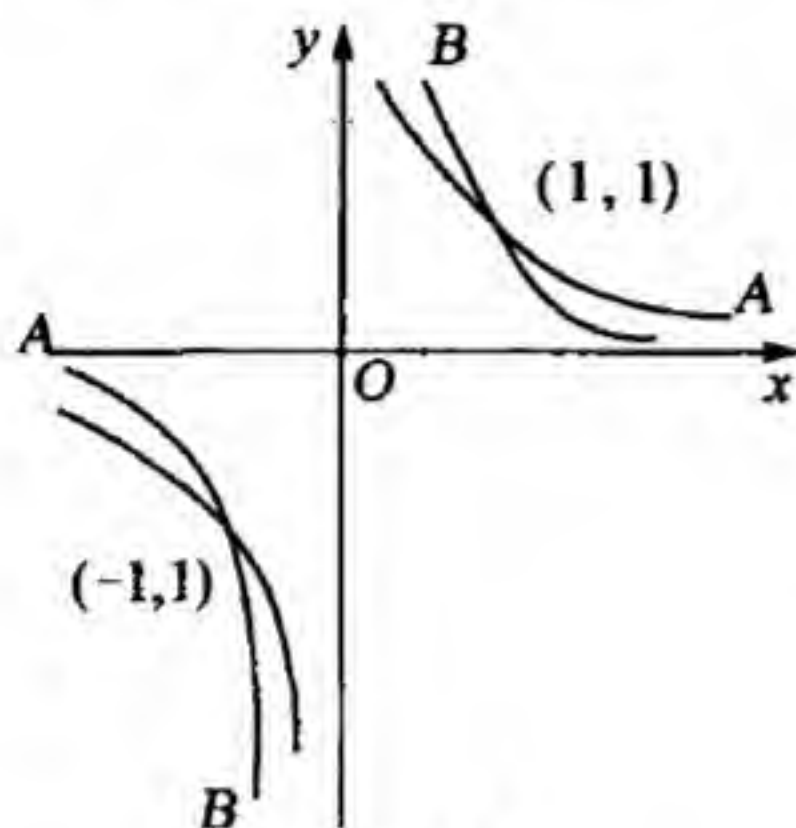


274 题图 2

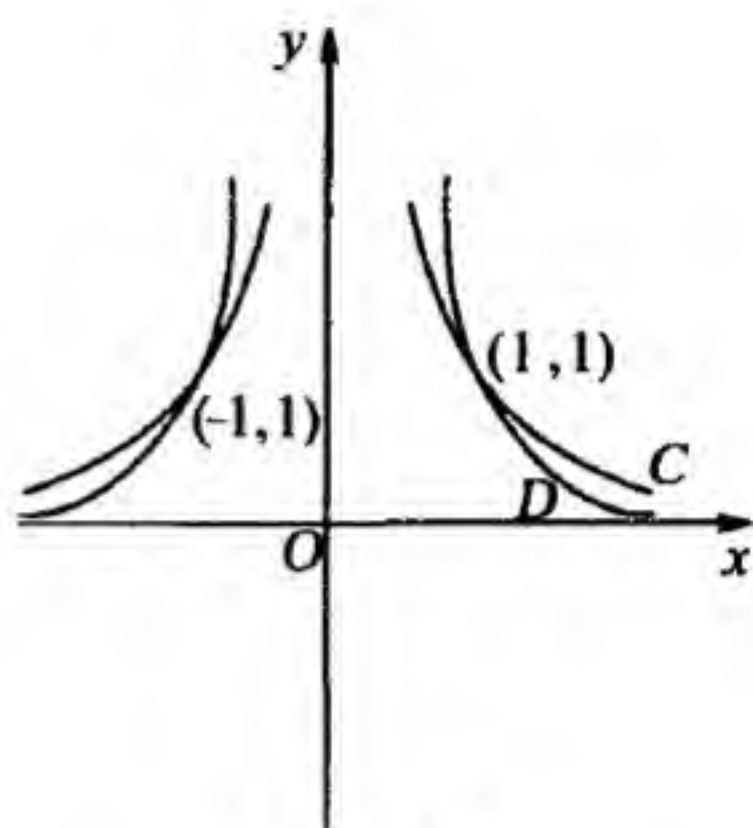
【275】 作出幂函数 $y = x^n$ 当: (1) $n = -1, -3$; (2) $n = -2, -4$ 时的图形.

解 (1) 如 275 题图 1 所示.

$$A: y = \frac{1}{x}, B: y = \frac{1}{x^3}.$$



275 题图 1



275 题图 2

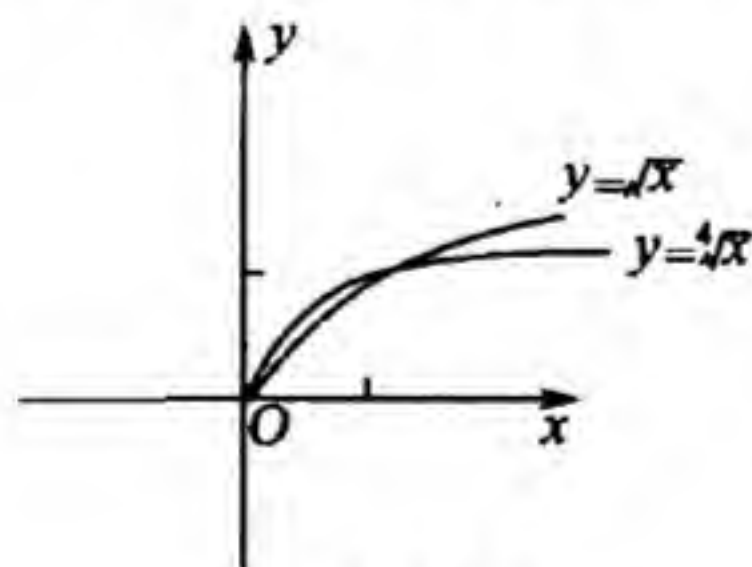
(2) 如 275 题图 2 所示.

$$C: y = \frac{1}{x^2}, D: y = \frac{1}{x^4}.$$

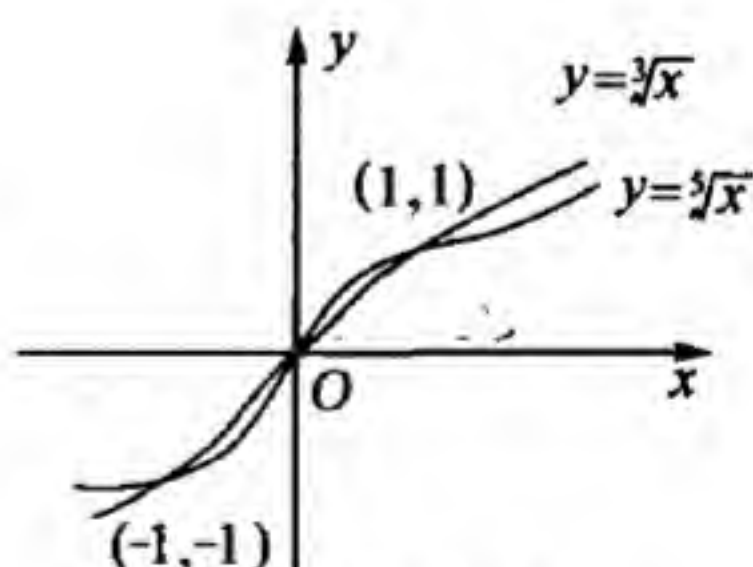
【276】 作出根式 $y = \sqrt[m]{x}$ 当: (1) $m = 2, 4$; (2) $m = 3, 5$ 时的图形.

解 (1) 如 276 题图 1 所示.

(2) 如 276 题图 2 所示.



276 题图 1



276 题图 2

【277】 设

(1) $m = 2, k = 1$;

(2) $m = 2, k = 3$;

(3) $m = 3, k = 1$;

(4) $m = 3, k = 2$;

$$(5) m = 3, k = 4; \quad (6) m = 4, k = 2;$$

$$(7) m = 4, k = 3.$$

作出根式 $y = \sqrt[m]{x^k}$ 的图形.

解 (1) 即 $y = \sqrt{x}$ 的图形, 见 276 题图 1.

(2) $y = x\sqrt{x}$, 见 277 题图.

(3) $y = \sqrt[3]{x}$, 见 276 题图 2.

(4) $y = \sqrt[3]{x^2}$, 见 277 题图.

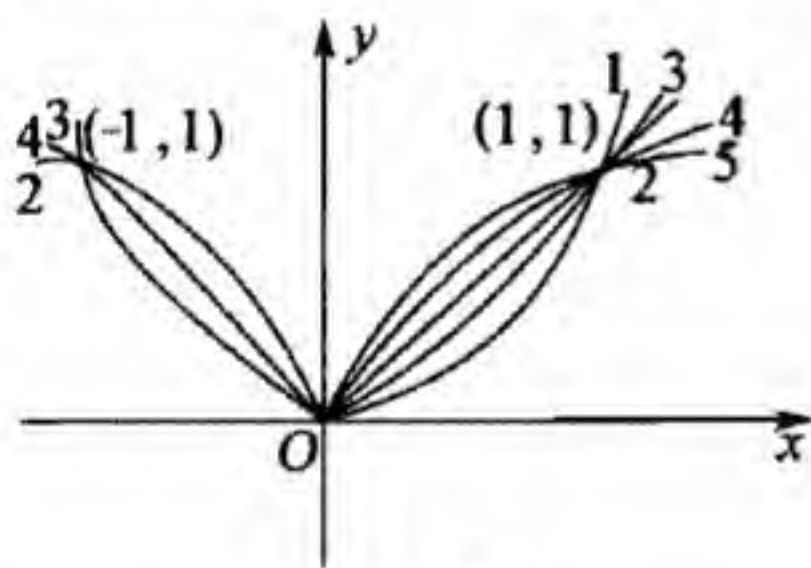
(5) $y = x\sqrt[3]{x}$, 见 277 题图.

(6) $y = \sqrt{|x|}$, 图形关于 Oy 轴对称, 见 277 题图.

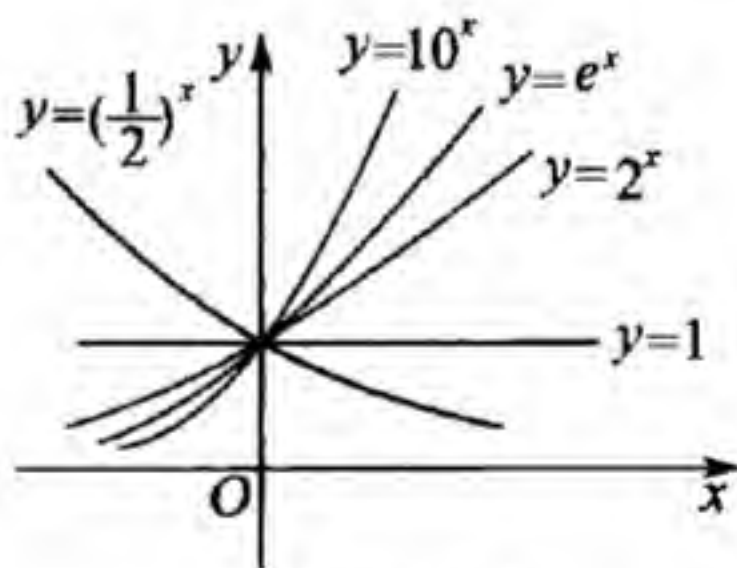
(7) $y = \sqrt[4]{x^3}$, 见 277 题图.

【278】 作出指数函数 $y = a^x$, 当 $a = \frac{1}{2}, 1, 2, e, 10$ 时的图形.

解 如 278 题图所示.



277 题图



278 题图

【279】 设

$$(1) y_1 = x^2;$$

$$(2) y_1 = -x^2;$$

$$(3) y_1 = \frac{1}{x};$$

$$(4) y_1 = \frac{1}{x^2};$$

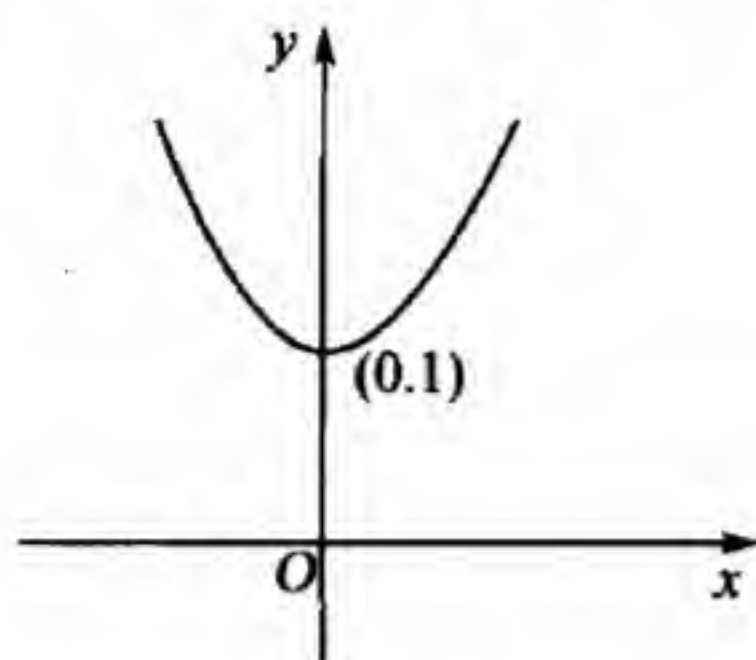
$$(5) y_1 = -\frac{1}{x^2};$$

$$(6) y_1 = \frac{2x}{1-x^2}.$$

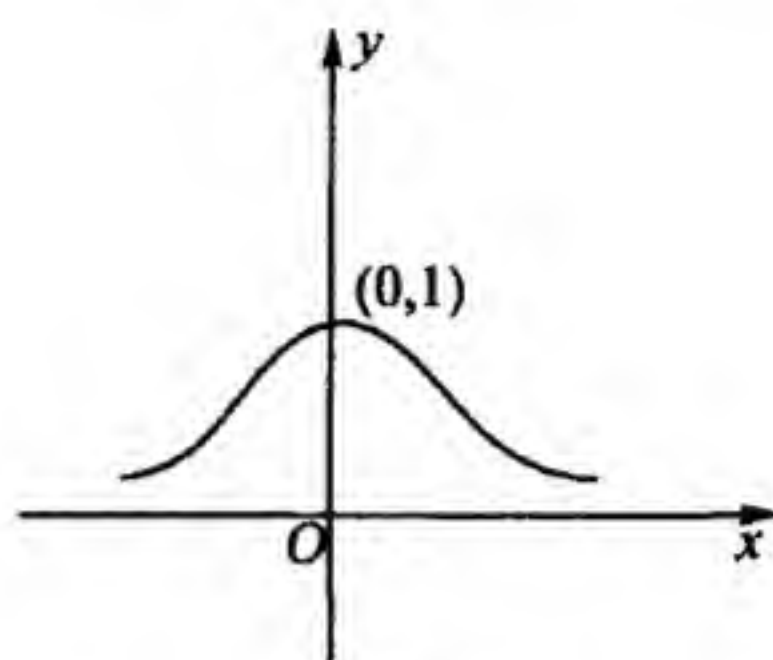
作出复合指数函数 $y = e^{y_1}$ 的图形.

解 (1) 如 279 题图 1 所示.

(2) 如 279 题图 2 所示.



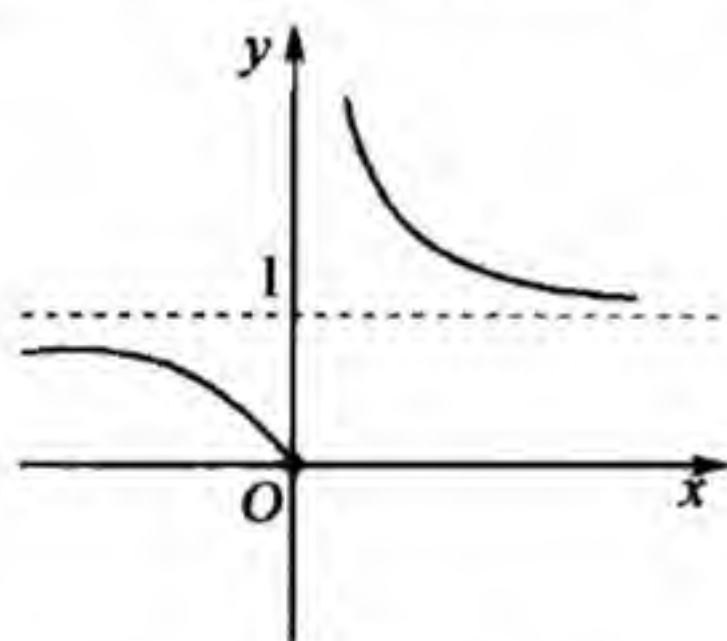
279 题图 1



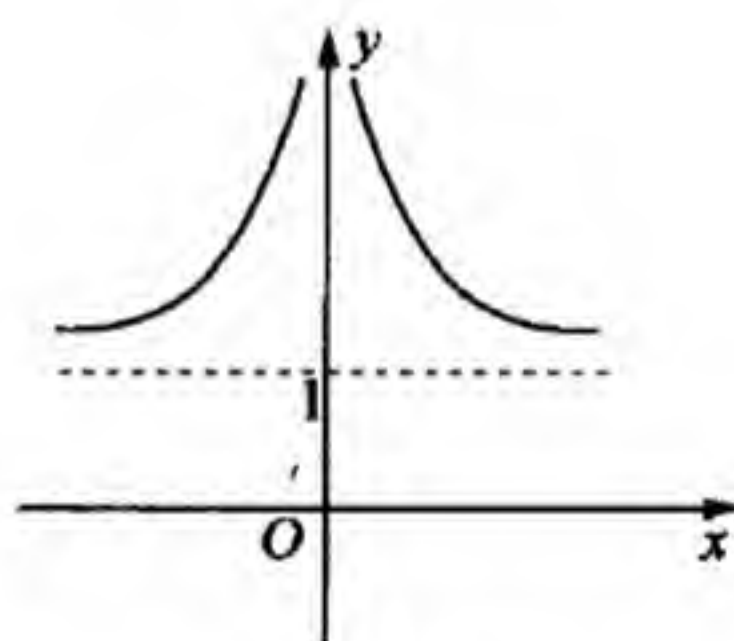
279 题图 2

(3) 如 279 题图 3 所示.

(4) 如 279 题图 4 所示.



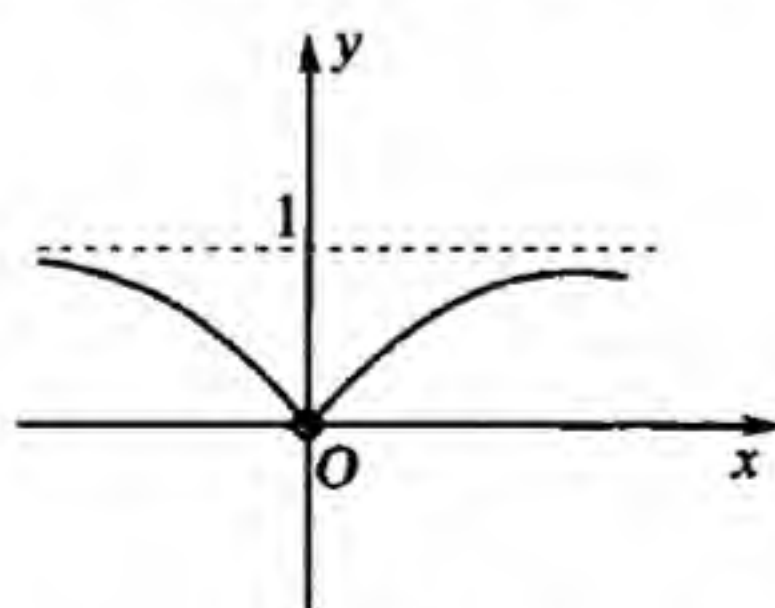
279 题图 3



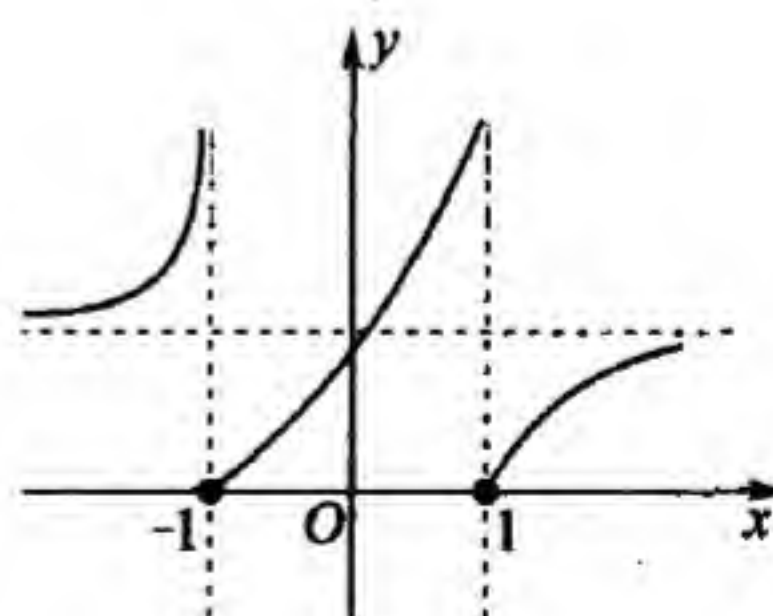
279 题图 4

(5) 如 279 题图 5 所示.

(6) 如 279 题图 6 所示.



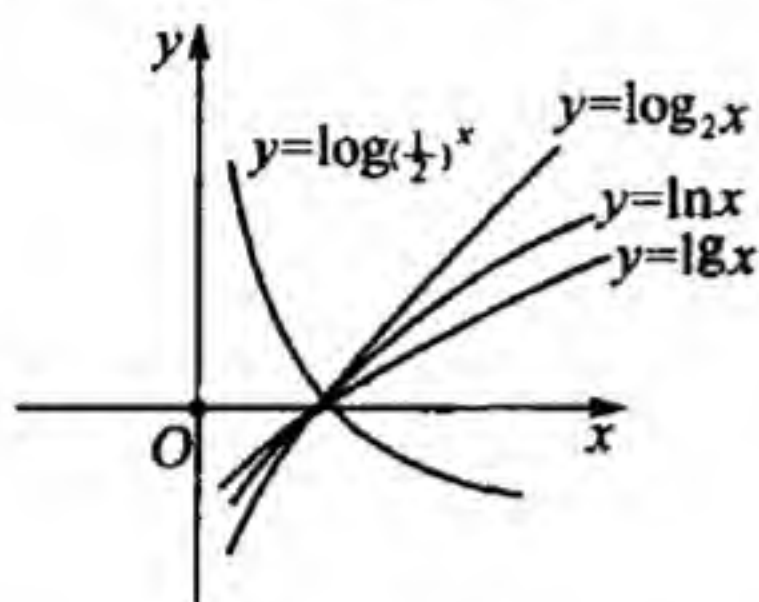
279 题图 5



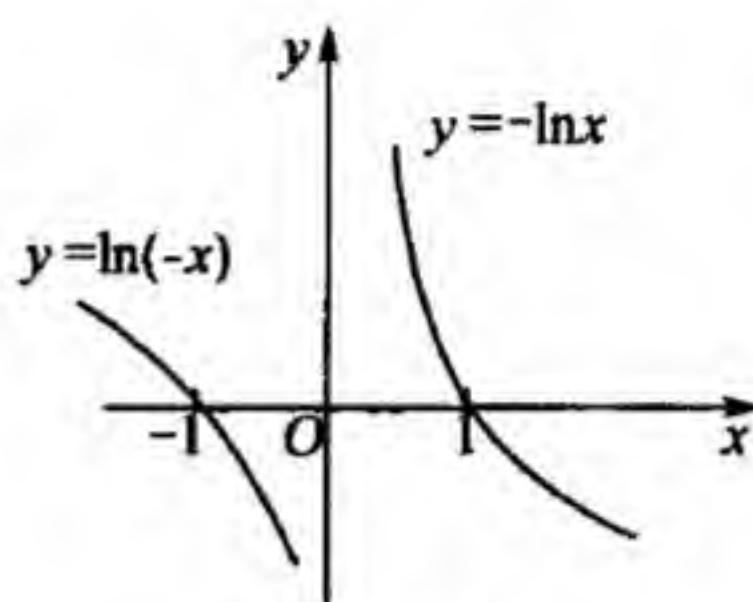
279 题图 6

【280】 作出对数函数 $y = \log_a x$, 当 $a = \frac{1}{2}, 2, e, 10$ 时的图形.

解 如 280 题图所示.



280 题图



281 题图

【281】 作出以下函数的图形

- (1) $y = \ln(-x)$; (2) $y = -\ln x$.

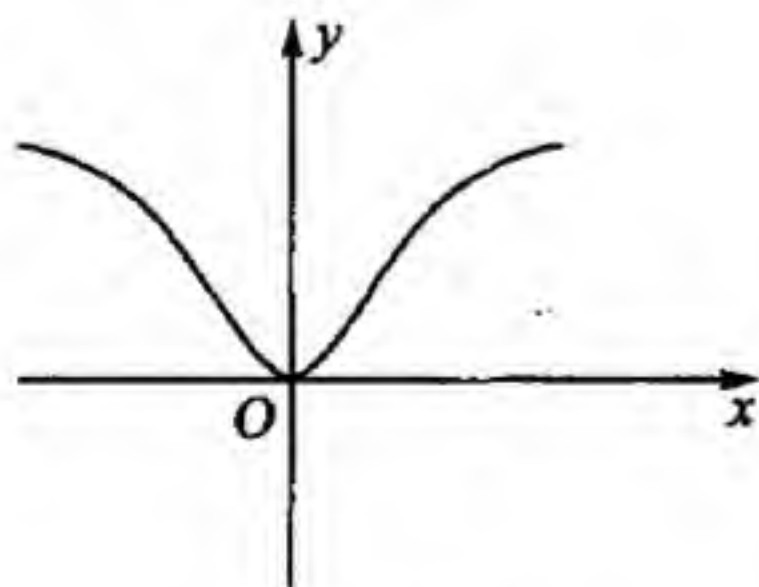
解 如 281 题图所示.

【282】 作出复合对数函数 $y = \ln y_1$ 的图形, 其中设

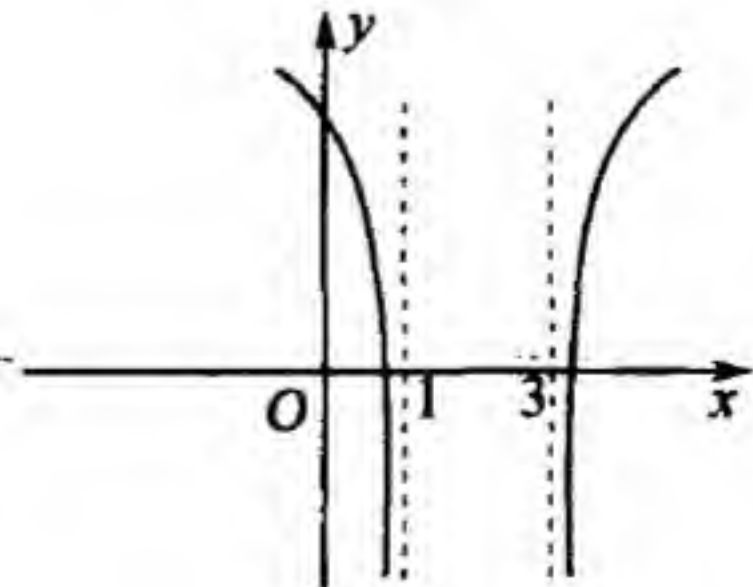
- (1) $y_1 = 1 + x^2$;
 (2) $y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;
 (3) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$; (4) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; (5) $y_1 = 1 + e^x$.

解 (1) 图形关 Oy 轴对称, 如 282 题图 1 所示.

(2) 定义域为 $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, 图形是 $y = \ln |x-1|$, $y = 2\ln |x-2|$ 及 $y = 3\ln |x-3|$ 的图形的叠加, 如 282 题图 2 所示.

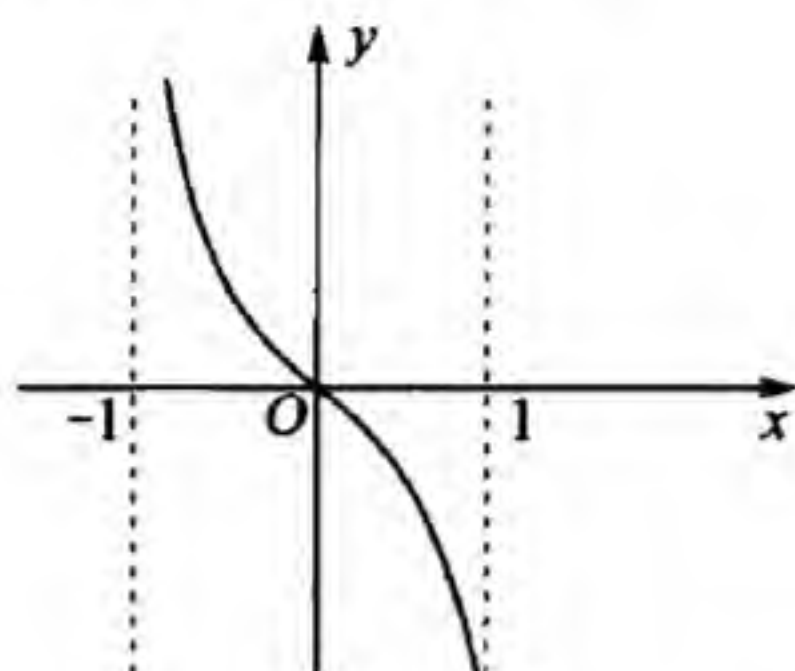


282 题图 1

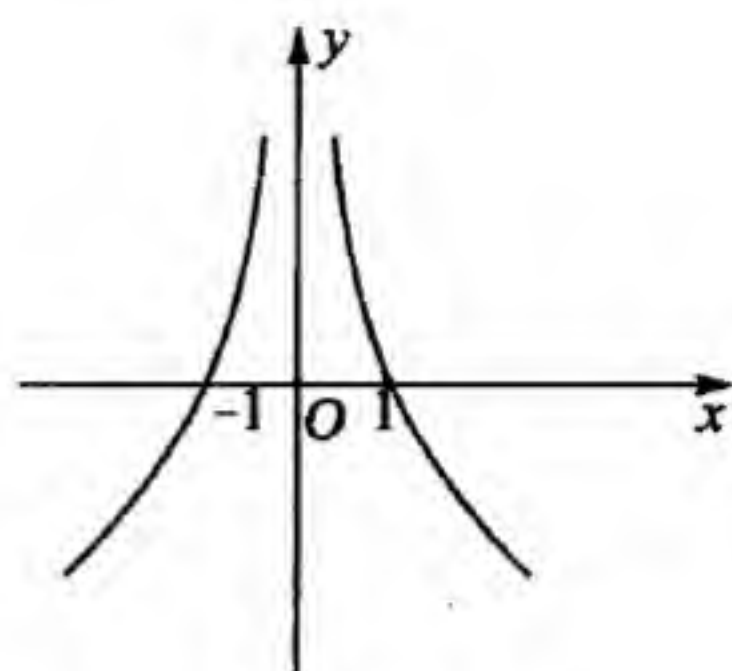


282 题图 2

(3) 定义域为 $(-1, 1)$, 当 $x = 0$ 时, $y = 0$, $x = 1, x = -1$ 为渐近线, 如图 282 题图 3.



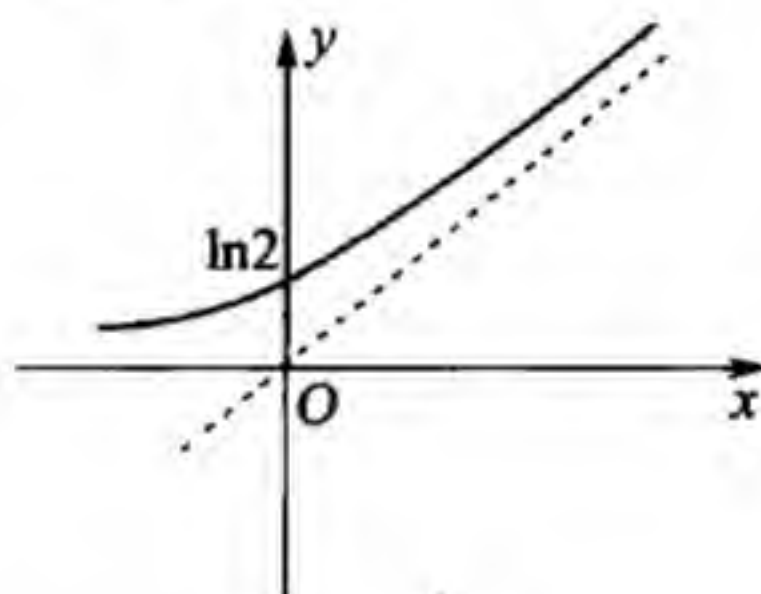
282 题图 3



282 题图 4

(4) 定义域为 $x \neq 0$, 图形关于 Oy 轴对称, 当 $x = \pm 1$ 时, $y = 0$, 如 282 题图 4 所示.

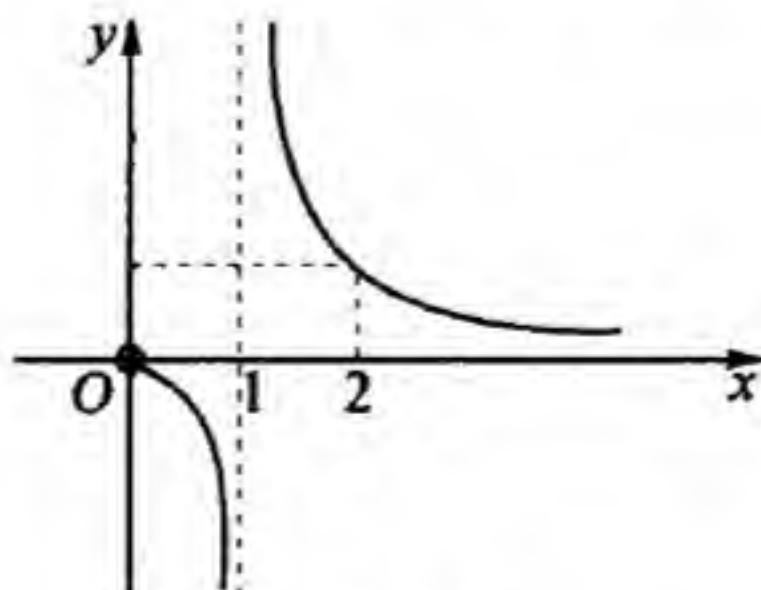
(5) 如 282 题图 5 所示.



282 题图 5

【283】 作出函数 $y = \log_x 2$ 的图形.

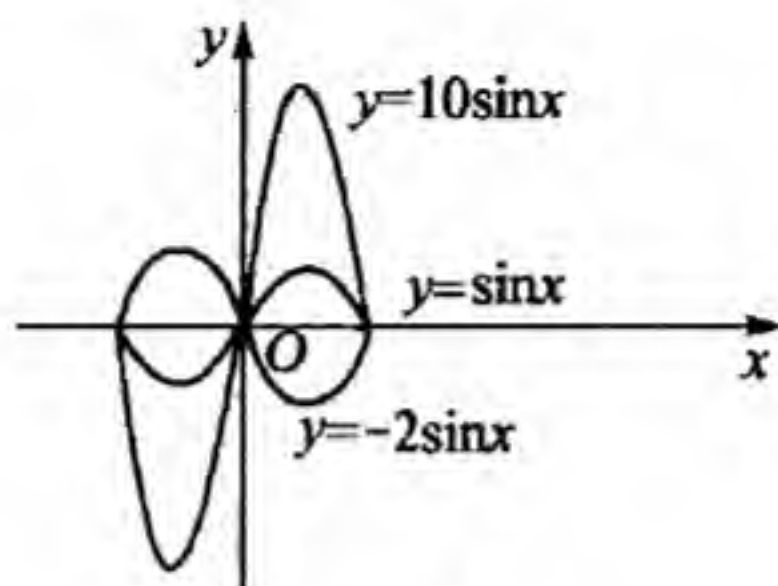
解 定义域为 $x > 0$, 且 $x \neq 1$, 如 283 题图所示.



283 题图

【284】 作出函数 $y = A\sin x$ 的图形(当 $A = 1, 10, -2$ 时).

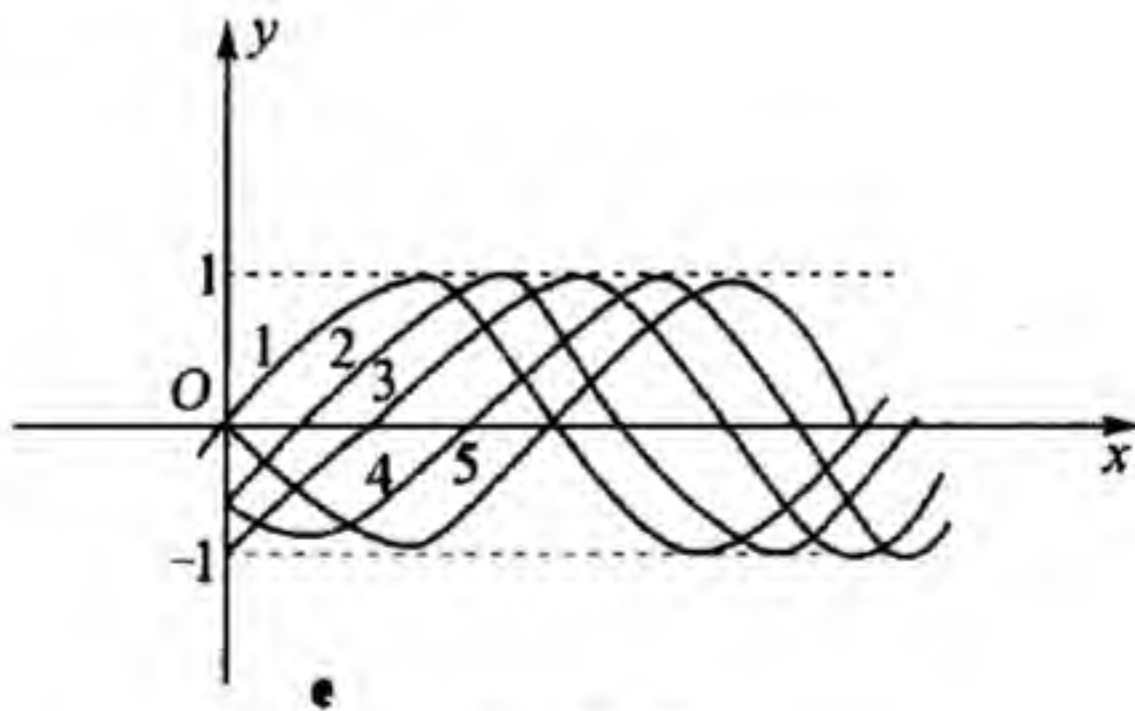
解 如 284 题图所示.



284 题图

【285】 若 $x_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$, 作出函数 $y = \sin(x - x_0)$ 的图形.

解 将 $y = \sin x$ 的图形向右平移 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 即得所有图形, 如 285 题图所示.



285 题图

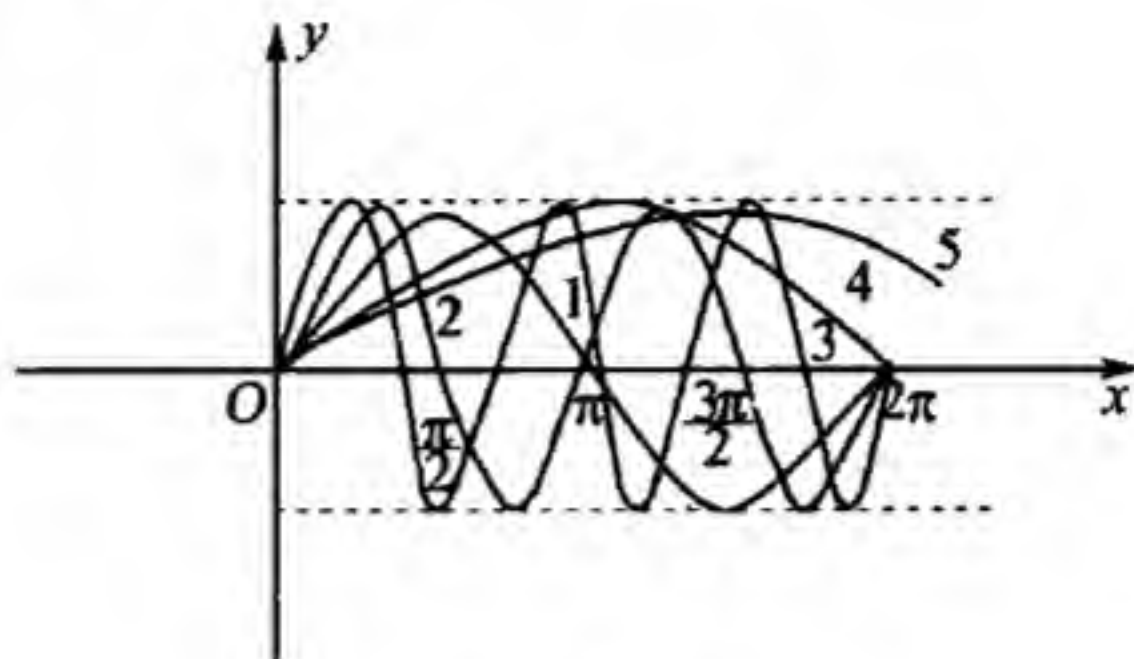
$$(1) y = \sin x; \quad (2) y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$(3) y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right); \quad (4) y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right);$$

$$(5) y = \sin(x - \pi).$$

【286】 若 $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 时, 作出函数 $y = \sin nx$ 的图形.

解 如 286 题图所示.



286 题图

$$(1) y = \sin x;$$

$$(2) y = \sin 2x;$$

$$(3) y = \sin 3x;$$

$$(4) y = \sin \frac{1}{2}x;$$

$$(5) y = \sin \frac{1}{3}x.$$

【287】 将函数 $y = a\cos x + b\sin x$ 化为下式的形式:

$$y = A\sin(x - x_0)$$

再作出其图形. 研究下例: $y = 6\cos x + 8\sin x$.

$$\text{解 } y = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right).$$

$$\text{由于 } \left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1, \left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1,$$

$$\text{且 } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1,$$

$$\text{故设 } \sin x_0 = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\cos x_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

①

$$\text{于是 } y = A\sin(x - x_0),$$

其中 $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ ($a^2 + b^2 \neq 0$), x_0 适合 ① 式.

我们可以这样作 $y = A\sin(x - x_0)$ 的图形: 先把正弦曲线 y

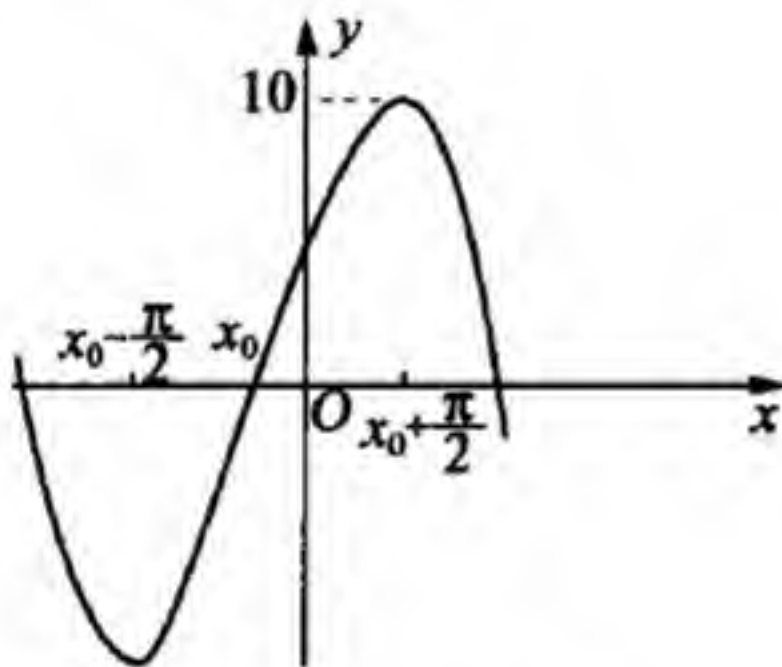
$= \sin x$ 沿 Ox 轴平移 $|x_0|$ 个单位(若 $x_0 > 0$, 则向右平移; 若 $x_0 < 0$, 则向左平移), 然后再从纵轴方向拉长 A 倍(若 $A < 1$, 则压缩 $\frac{1}{A}$ 倍).

对于 $y = 6\cos x + 8\sin x, A = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$

$$\sin x_0 = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}, \cos x_0 = \frac{4}{5},$$

则 $x_0 = -\arctan \frac{3}{4}.$

图形如 287 题图所示.



287 题图

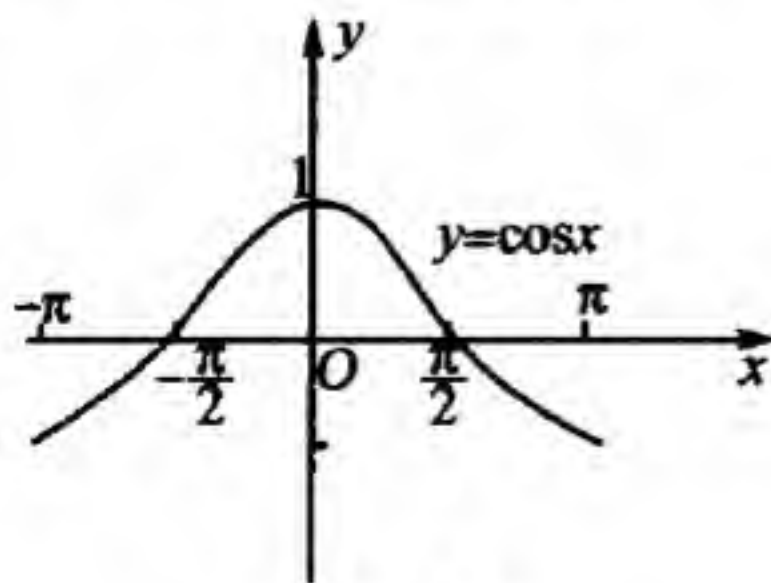
作出以下三角函数的图形(288 ~ 297).

【288】 $y = \cos x.$

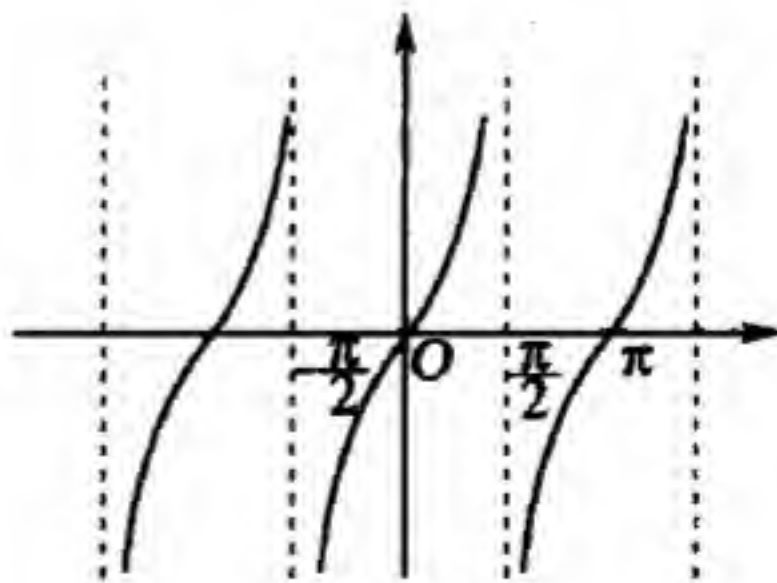
解 如 288 题图所示.

【289】 $y = \tan x.$

解 如 289 题图所示.



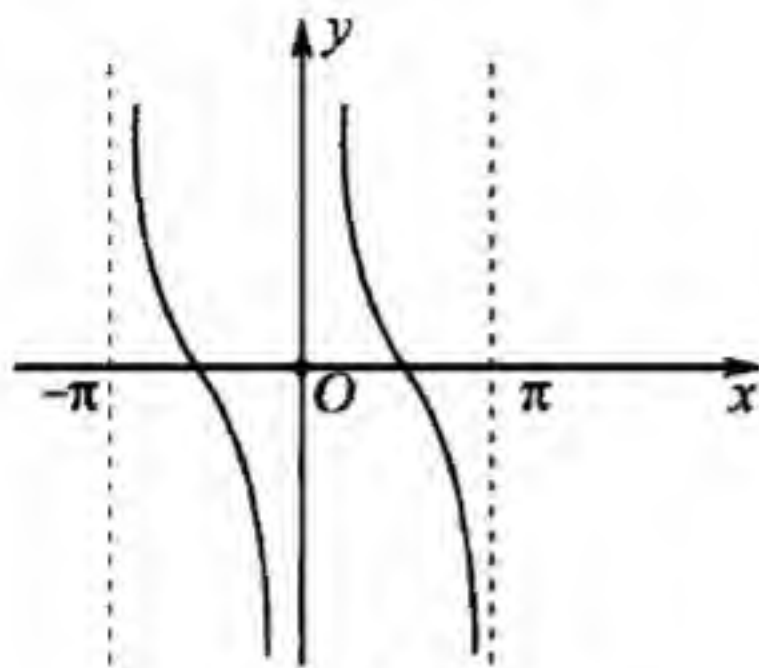
288 题图



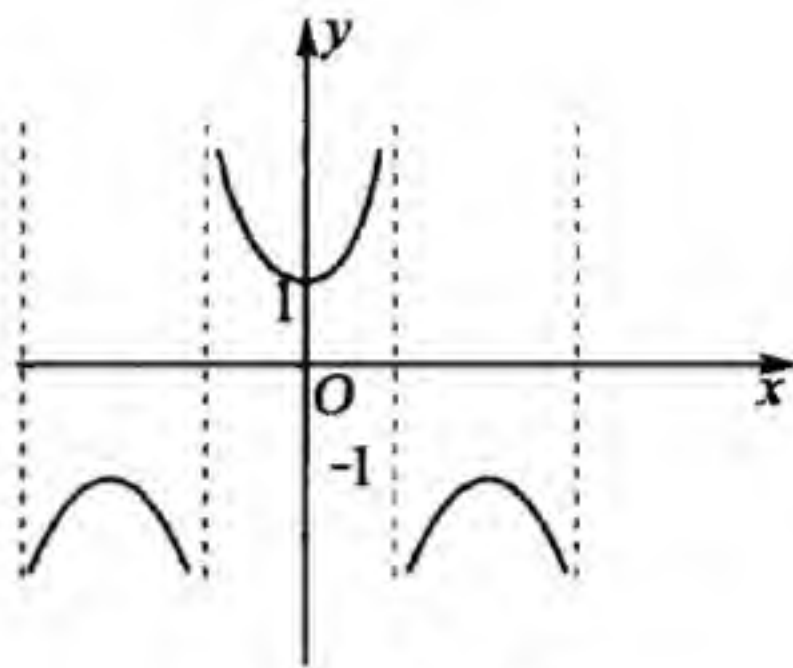
289 题图

【290】 $y = \cot x$.

解 如 290 题图所示.



290 题图



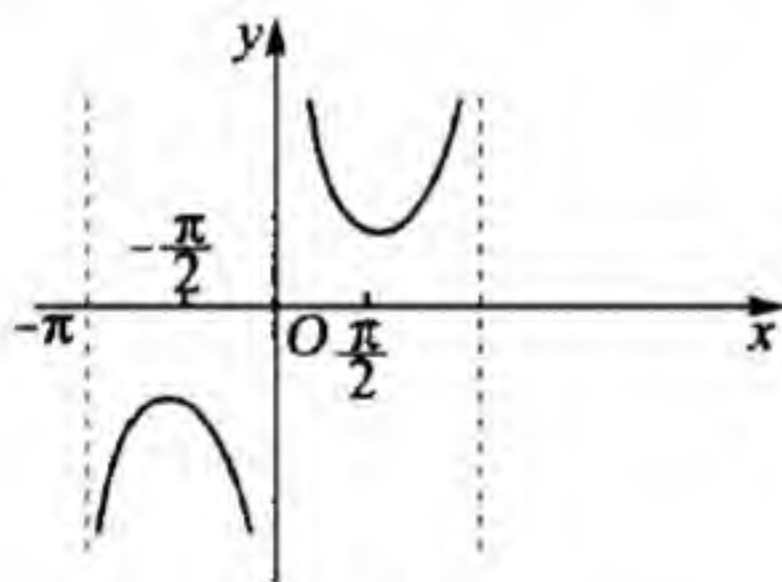
291 题图

【291】 $y = \sec x$.

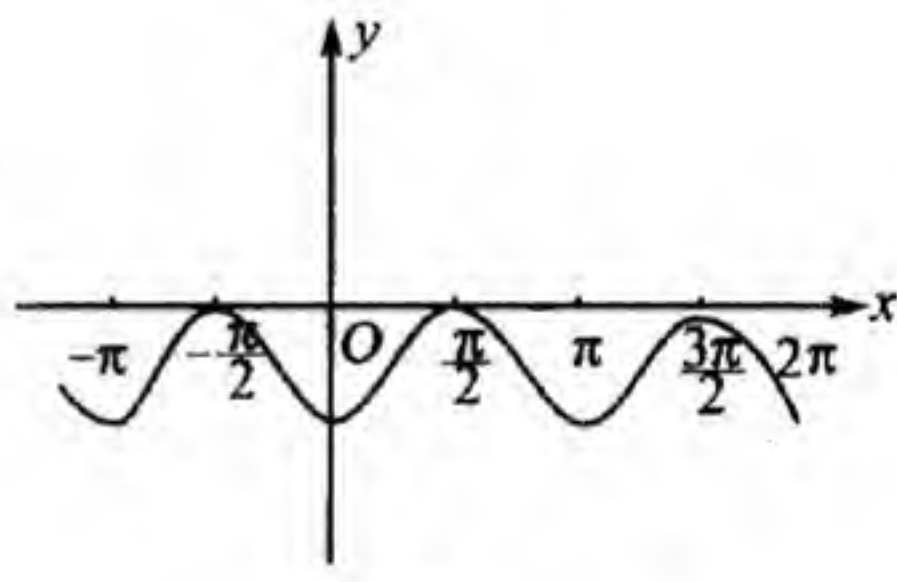
解 如 291 题图所示.

【292】 $y = \csc x$.

解 如 292 题图所示.



292 题图



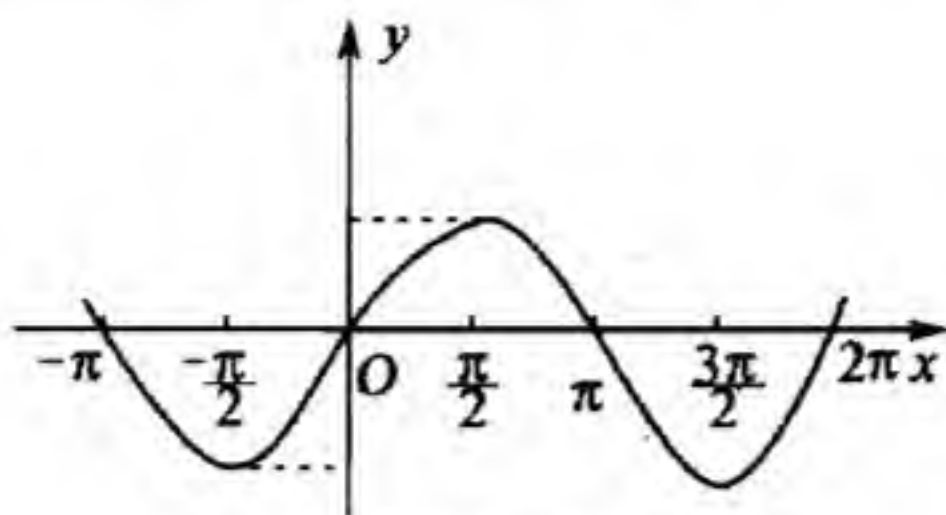
293 题图

【293】 $y = \sin^2 x$.

解 图形关于 Oy 轴对称, 且 $y \geq 0$, 如 293 题图所示.

【294】 $y = \sin^3 x$.

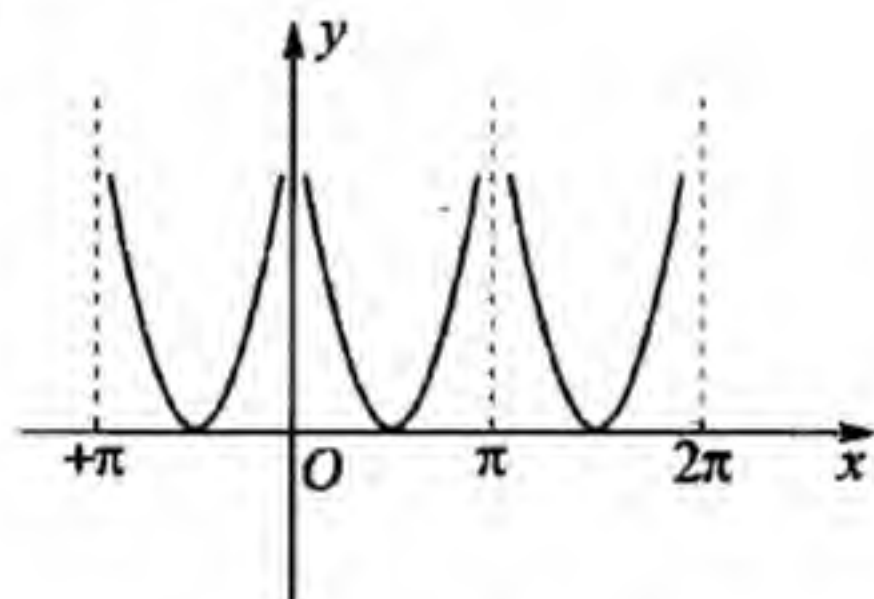
解 如 294 题图所示.



294 题图

【295】 $y = \cot^2 x$.

解 如 295 题图所示.

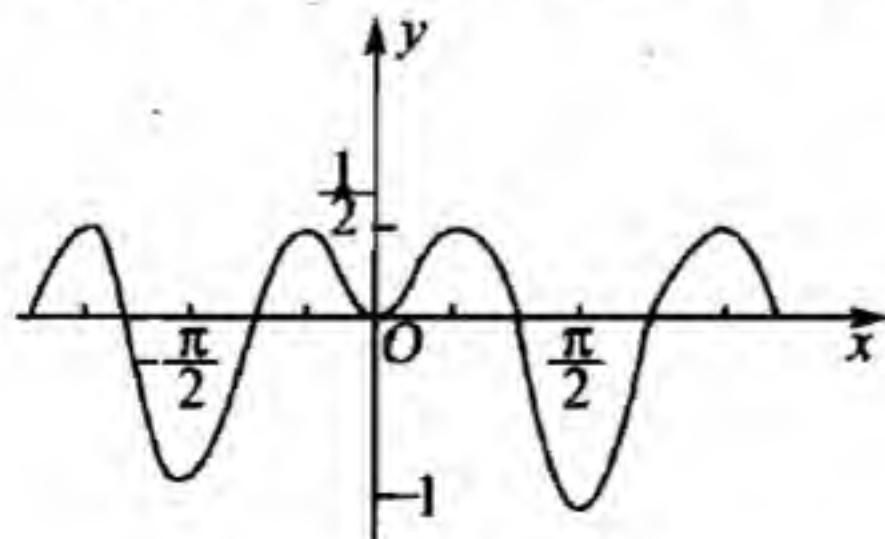


295 题图

【296】 $y = \sin x \cdot \sin 3x$.

解 $y = \sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x$,

图形关于 Oy 轴对称, 将 $y = \frac{1}{2} \cos 2x$ 及 $y = -\frac{1}{2} \cos 4x$ 的图形叠加即得所需的图形, 如 296 题图所示.



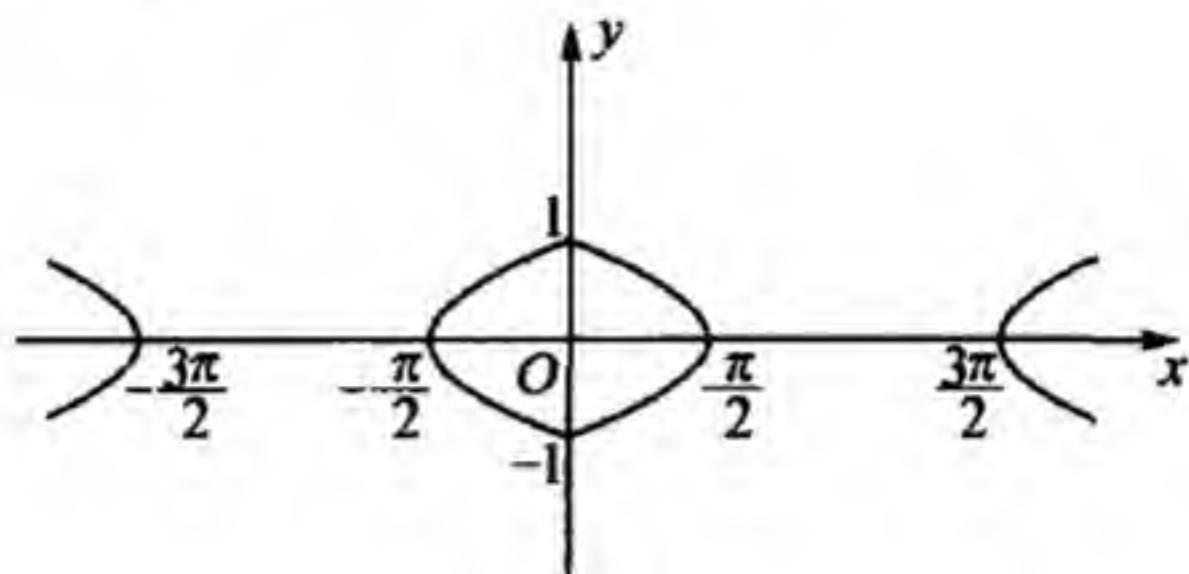
296 题图

【297】 $y = \pm \sqrt{\cos x}$.

解 函数的定义为

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \dots),$$

函数是偶函数, 且以 2π 为周期的周期函数. 所以图形关于 Oy 轴对称, 如 297 题图所示.



297 题图

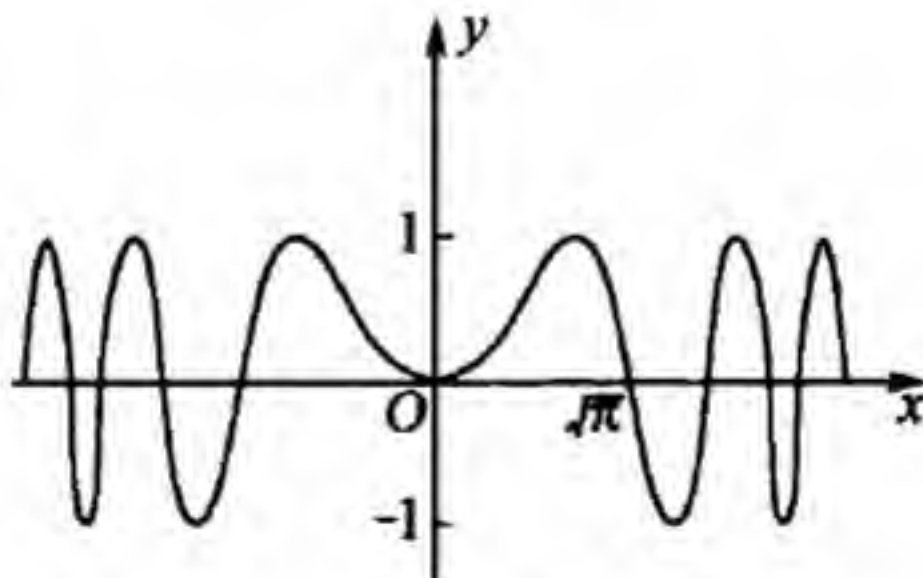
作出以下函数的图形(298 ~ 310).

【298】 $y = \sin x^2$.

解 图形关于 Oy 轴对称, 又 $f(\pm \sqrt{n\pi}) = 0$,

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}) = 0$,

故, 曲线和横轴的相邻交点的相互距离所成序列的极根为 0, 如 298 题图所示.



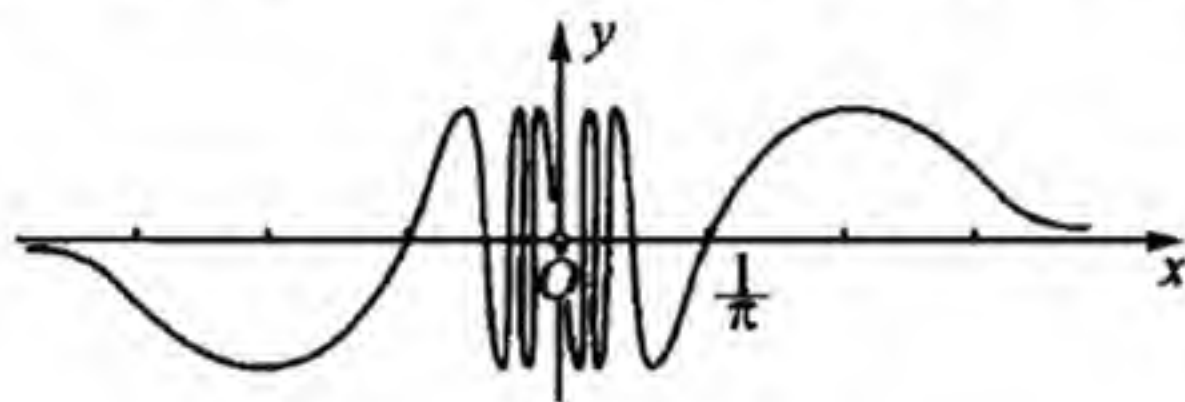
298 题图

【299】 $y = \sin \frac{1}{x}$.

解 $-1 \leq y \leq 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, $y = 0$ 为渐近线. 函数为奇函

数,故图形关于原点对称.

当 x 由 $+\infty$ 减少到 $\frac{2}{\pi}$ 时, $\frac{1}{x}$ 由 0 增大到 $\frac{\pi}{2}$, 所以 y 由 0 变到 1, 当 x 由 $\frac{2}{\pi}$ 减小到 $\frac{2}{3\pi}$ 时, 则 $\frac{1}{x}$ 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$, y 由 1 减少到 -1, 当 $x = \frac{1}{\pi}$ 时, $y = 0$. 总之, 当 x 无限接近 0 时, 函数在 -1 与 1 之间摆动, 并且凝聚于 0 点, 而在 $x = 0$ 点函数没有定义, 如 299 题图所示.



299 题图

【300】 $y = \cos \frac{\pi}{x}$.

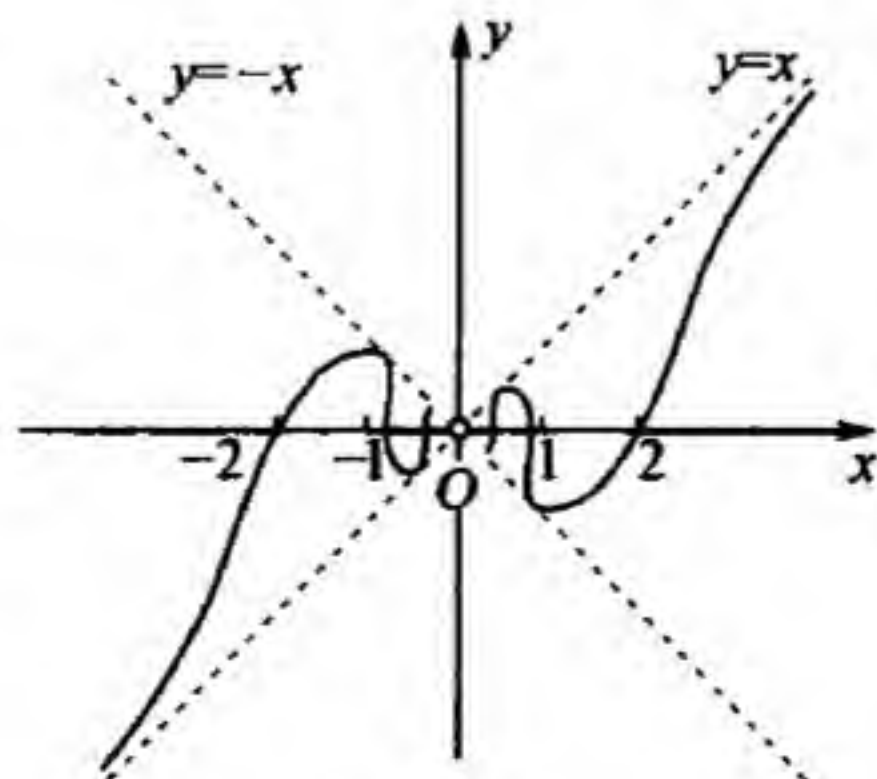
解 $-x \leq y \leq x, \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$,

当 $x = \frac{2}{2k+1} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$. 函数是奇函数,

图形关于坐标原点对称. 而在点 $x = 0$, 函数 y 没有定义.

当 $x > 2$ 时, y 单调增加.

当 x 无限接近 0 时, 函数作无限次衰减摆动, 并凝聚于 0 点. 如 300 题图所示



300 题图

【300. 1】 $y = \sin x; \quad \sin \frac{1}{x}.$

解 见 286 题图及 299 题图.

【301】 $y = \tan \frac{\pi}{x}.$

解 函数为奇函数, 图形关于 Oy 轴对称.

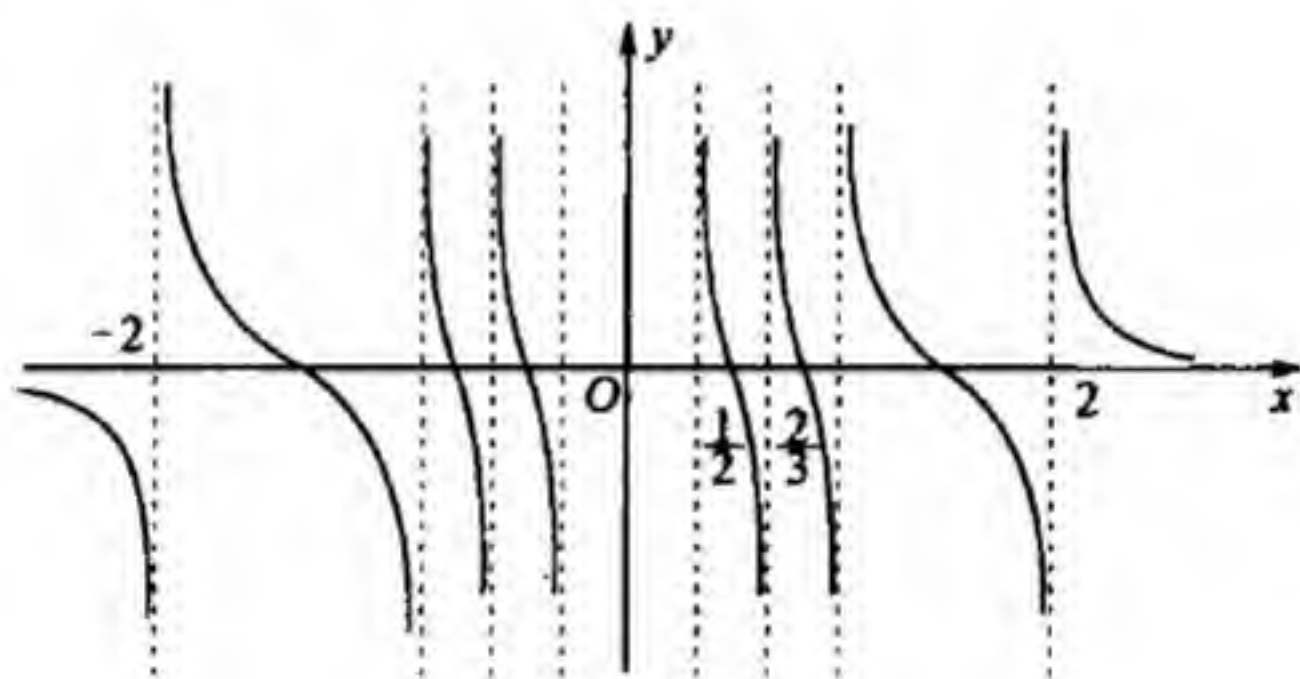
当 $x = \frac{1}{k} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$.

当 $x = 0$ 及 $x = \frac{2}{2k+1}$ 时, 函数没有定义.

直线 $x = 0$ 及 $x = \frac{2}{2k+1} (k = 0, \pm 1, \dots)$ 及图形的渐近线.

图形凝聚于 O 点.

当 $x > 0$ 时, $y > 0$, 且 $y \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty)$, $y = 0$ 为图形的渐近线, 如 301 题图所示.



301 题图

【301. 1】 $y = \sec \frac{1}{x}.$

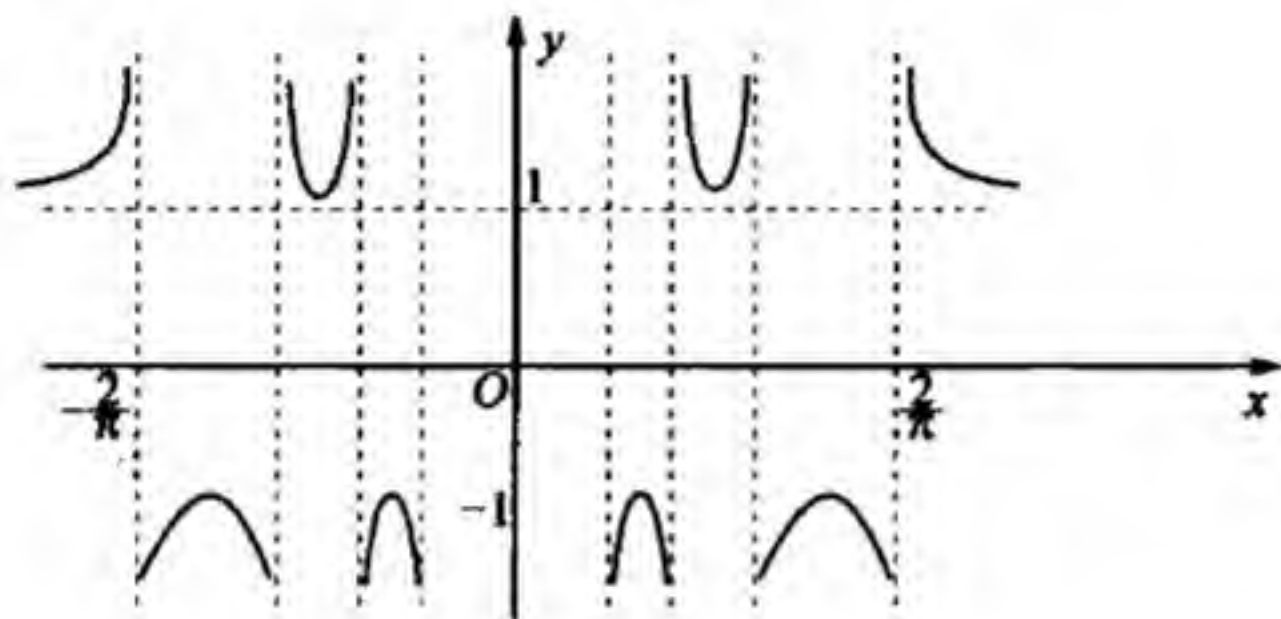
解 图形关于 Oy 轴对称, 且 $|y| \geq 1$, 当

$$x = \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

时, 函数没有定义.

$$x = \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}$$

为图形的渐近线. 当 x 由 $+\infty$ 变到 $\frac{2}{\pi}$ 时, $\frac{1}{x}$ 由 0 增加至 $\frac{\pi}{2}$, y 由 1 增加至 $+\infty$. 且 $y \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时), 所以 $y = 1$ 为图形的渐近线, 如 301.1 图所示.



301.1 题图

【302】 $y = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right).$

解 先考虑 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 的图形, 因为 y 为偶函数, 故图形关于 Oy 轴对称.

当 $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = (-1)^k x$;

当 $x = \frac{1}{k\pi}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 0$;

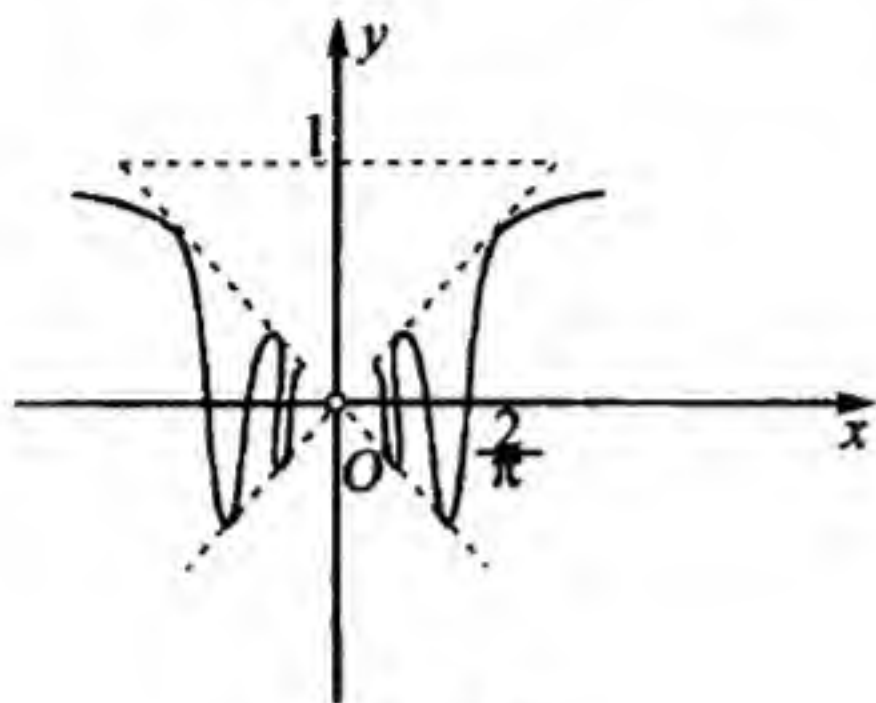
当 $x > \frac{2}{\pi}$ 时, y 单调增加, 且有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

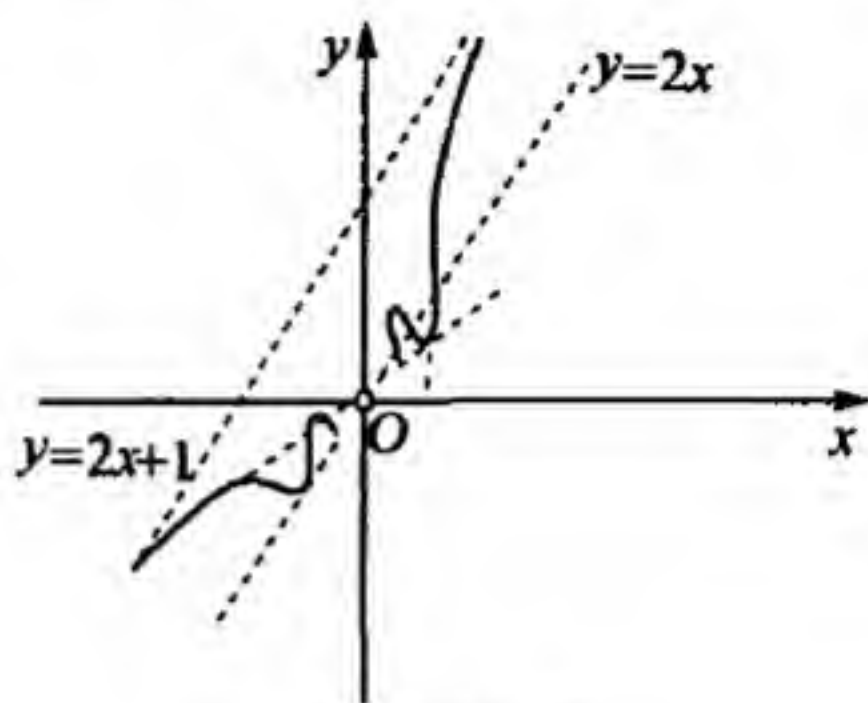
所以 $y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ 的图形如 302 题图 1 所示.

将 $y = 2x$ 及 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 的图形叠加,

即得 $y = x(2 + \sin \frac{1}{x})$ 的图形, 如 302 题图 2 所示.



302 题图 1



302 题图 2

【303】 $y = \pm \sqrt{1-x^2} \sin \frac{\pi}{x}$.

解 图形关于原点及 Ox 轴, Oy 轴均对称. 定义域为

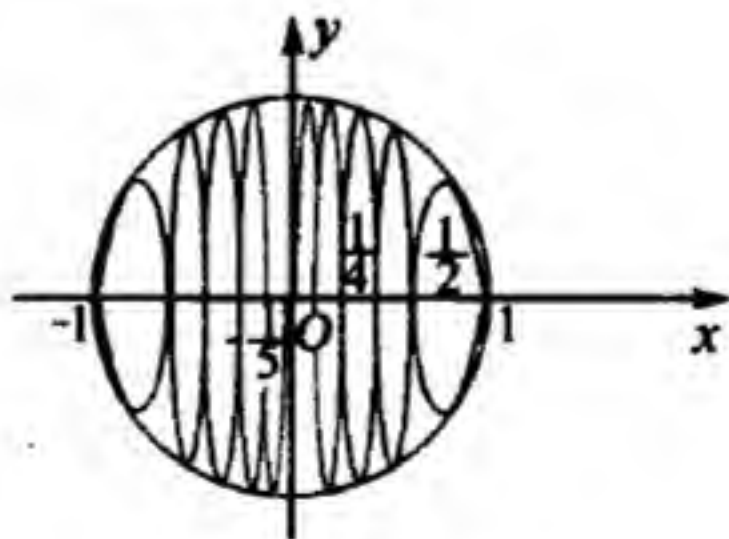
$$-1 \leq x \leq 1 \quad (x \neq 0)$$

且 $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$,

故图形位于圆 $x^2 + y^2 = 1$ 内, 且当

$$x = \frac{1}{k} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

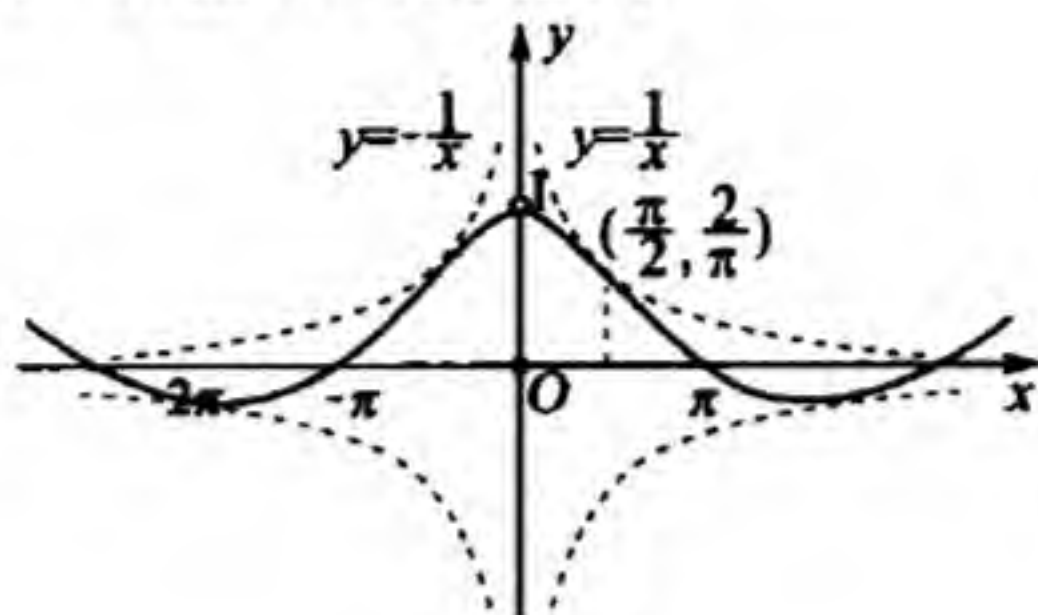
时, $y = 0$, 如 303 题图所示.



303 题图

【304】 $y = \frac{\sin x}{x}$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$, 由于 $|y| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$, 故图形位于 $y = \frac{1}{x}$ 及 $y = -\frac{1}{x}$ 之间, 当 $x = k\pi$ 时, $y = 0 (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$, 如 304 题图所示



304 题图

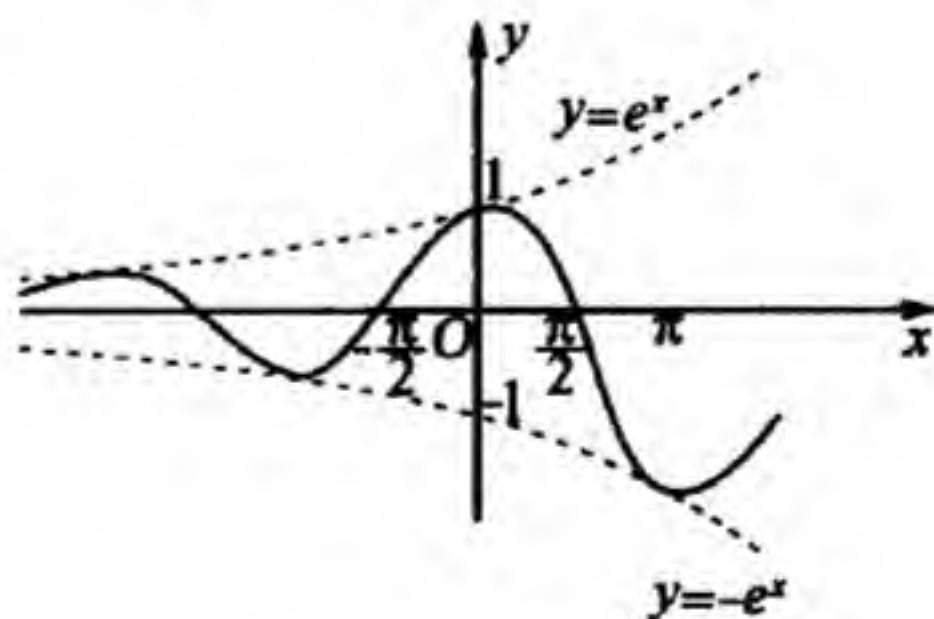
【305】 $y = e^x \cos x$.

解 由 $-e^x \leq y \leq e^x$, 故图形夹在 $y = e^x$ 及 $y = -e^x$ 之间.

当 $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$.

当 $x = 2k\pi (k = 0, \pm 1, \dots)$ 时, $y = e^x$.

当 $x = (2k+1)\pi (k = 0, \pm 1, \dots)$ 时, $y = -e^x$, 如 305 题图所示.



305 题图

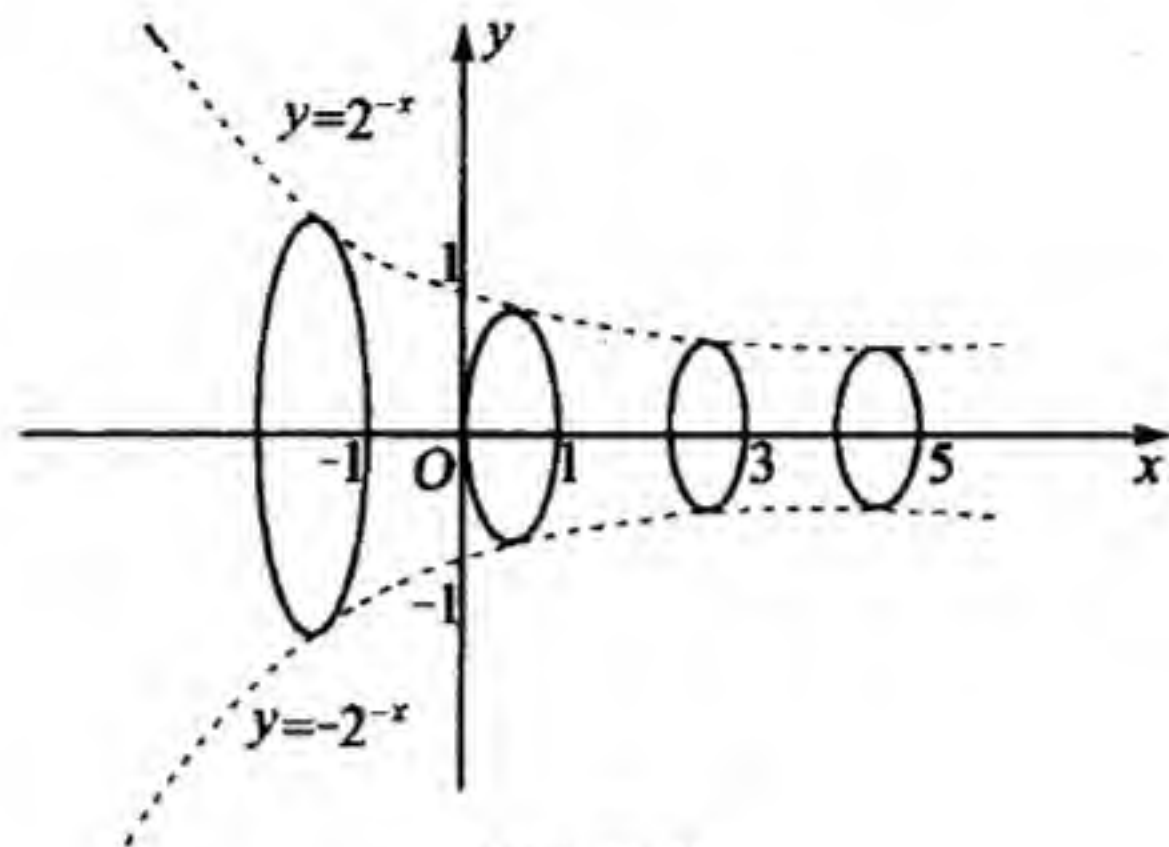
【306】 $y = \pm 2^{-x} \sqrt{\sin \pi x}$.

解 函数的定义域为

$$2k \leq x \leq (2k+1) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

且 $-2^{-x} \leq y \leq 2^{-x}$. 即函数的图形位于 $y = -2^{-x}$ 与 $y = 2^{-x}$ 之间

当 $x = k$ 时, $y = 0$. 当 $x = 2k + \frac{1}{2}$ 时, $y = \pm 2^{-x}$, 如 306 题图所示.



306 题图

【307】 $y = \frac{\cos x}{1+x^2}$.

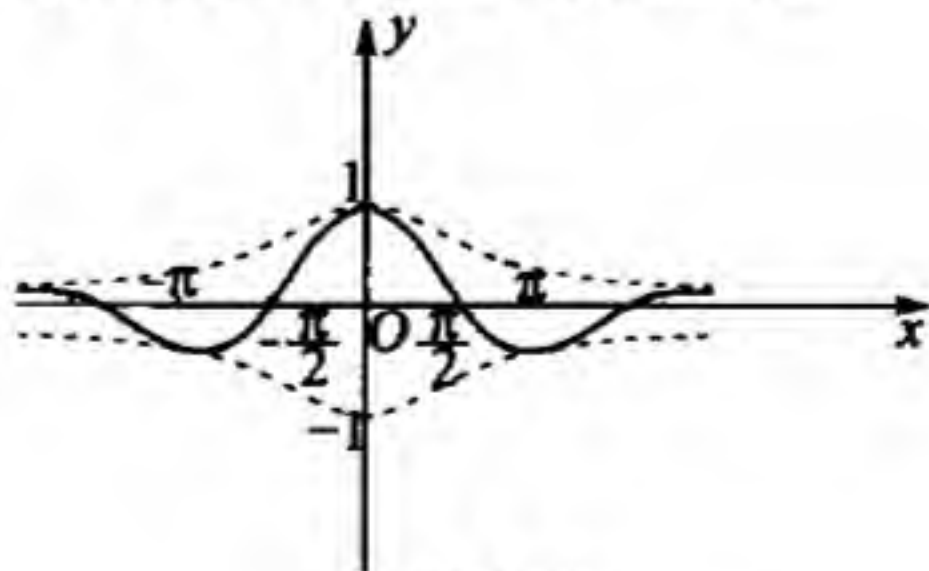
解 图形关于 Oy 轴对称. 又 $-\frac{1}{1+x^2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}$, 图形位于 $y = -\frac{1}{1+x^2}$ 及 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 之间.

当 $x = k\pi + \frac{1}{2}\pi$ 时, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) $y = 0$.

当 $x = 2k\pi$ 时, ($k = 0, \pm 1, \dots$) $y = \frac{1}{1+x^2}$.

当 $x = (2k+1)\pi$ 时, ($k = 0, \pm 1, \dots$) $y = -\frac{1}{1+x^2}$.

且 $y = 0$ 为图形的渐近线, 如 307 题图所示.



307 题图

【308】 $y = \ln(\cos x)$.

解 函数的定义域为

$$\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi < x < \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

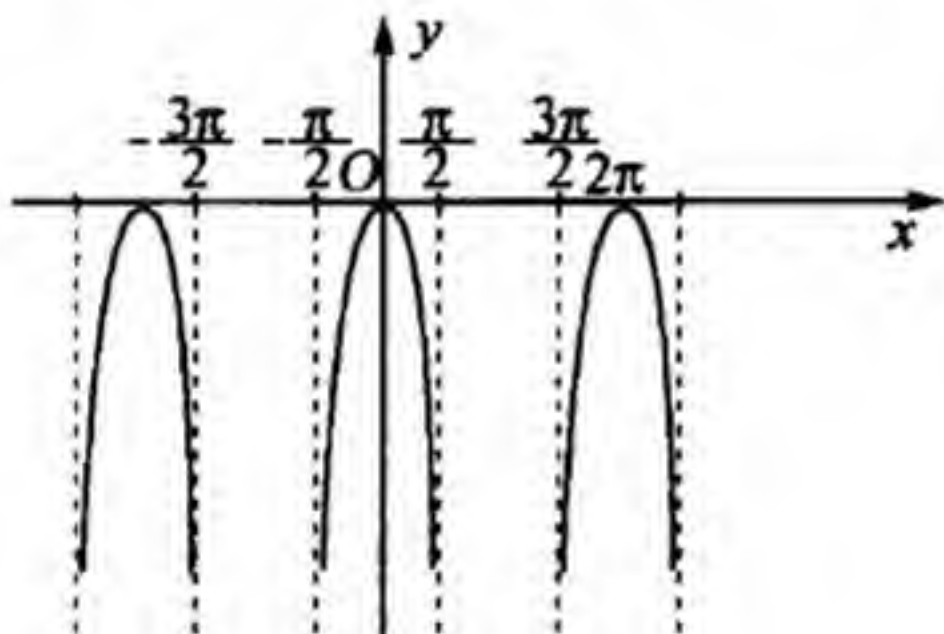
且函数是 2π 为周期的周期函数

在区间 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 内, y 单调增加, 且 $y < 0$.

在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内, y 单调减少, 且 $y < 0$.

最大值为 $\ln \cos 0 = 0$.

$x = (2k \pm \frac{1}{2})\pi$ 为图形的渐近线, 如 308 题图所示.



308 题图

【309】 $y = \cos(\ln x)$.

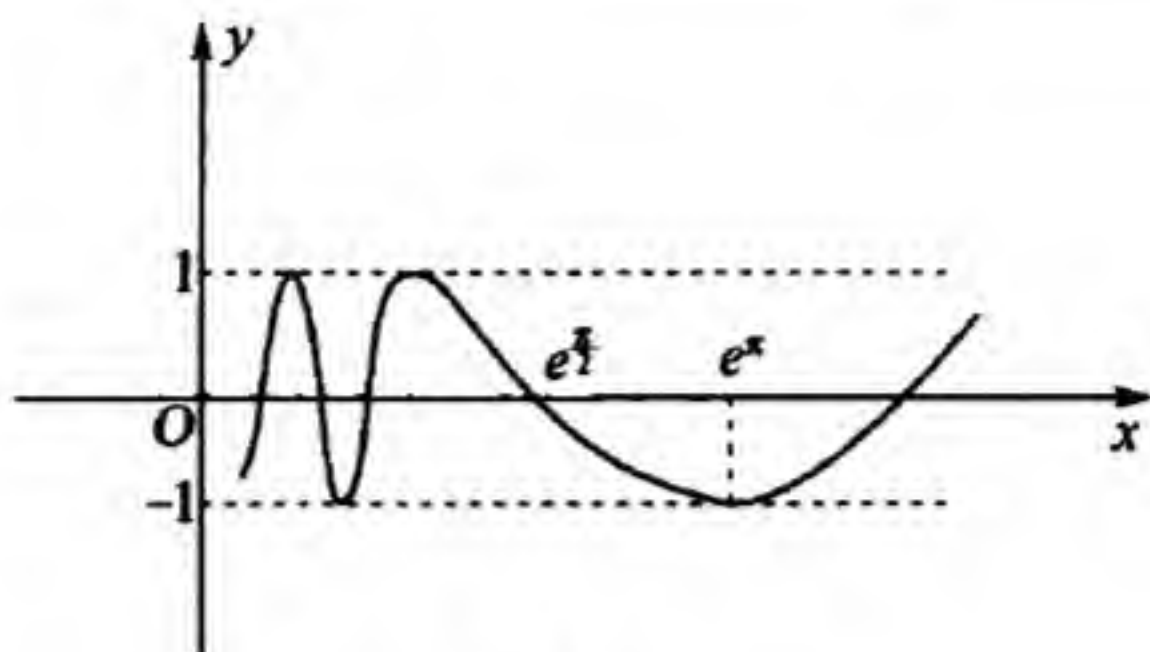
解 定义域为 $(0, +\infty)$,

当 $x = e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 0$,

当 $x = e^{2k\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 1$,

当 $x = e^{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = -1$.

图形始终在直线 $y = -1$ 和 $y = 1$ 之间摆动, 而且越靠近原点, 摆动越密, 如 309 题图所示. (两轴所取单位不一致)



309 题图

【310】 $y = e^{\frac{1}{\sin x}}$.

解 函数的定义域为

$$x \neq k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

且 $y > 0$. 函数是以 2π 为周期的周期函数.

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, y 单调减少.

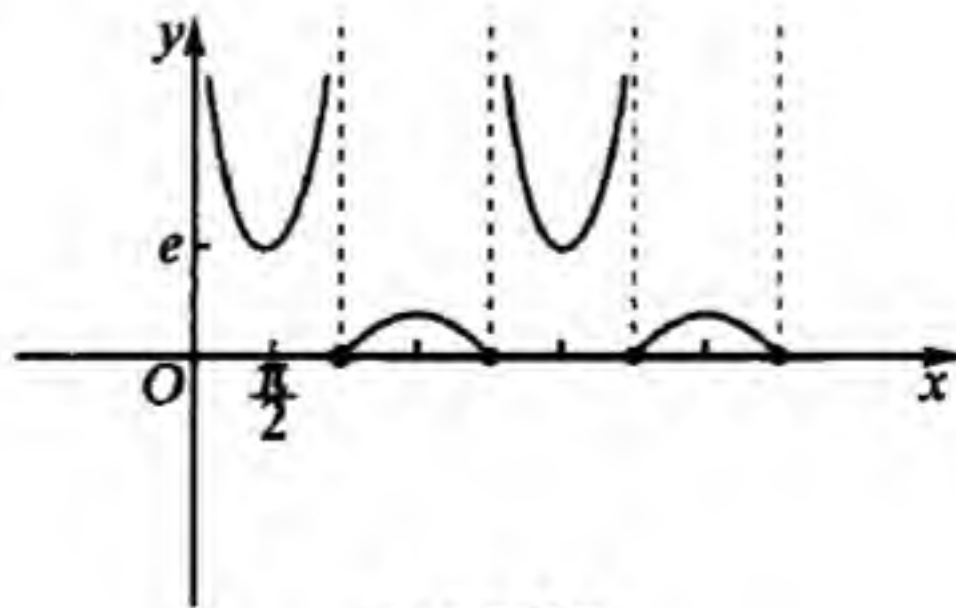
当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时, y 单调增加, 又

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} y = \lim_{x \rightarrow \pi-0} y = +\infty,$$

$y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$ 为函数 y 在区间 $(0, \pi)$ 内的最小值. 当 x 由 π 变到 $\frac{3\pi}{2}$ 时,

y 由 0 增加到 $\frac{1}{e}$, 而当 x 由 $\frac{3\pi}{2}$ 到 2π 时, y 由 $\frac{1}{e}$ 减到 0, 如 310 题图

所示.



310 题图

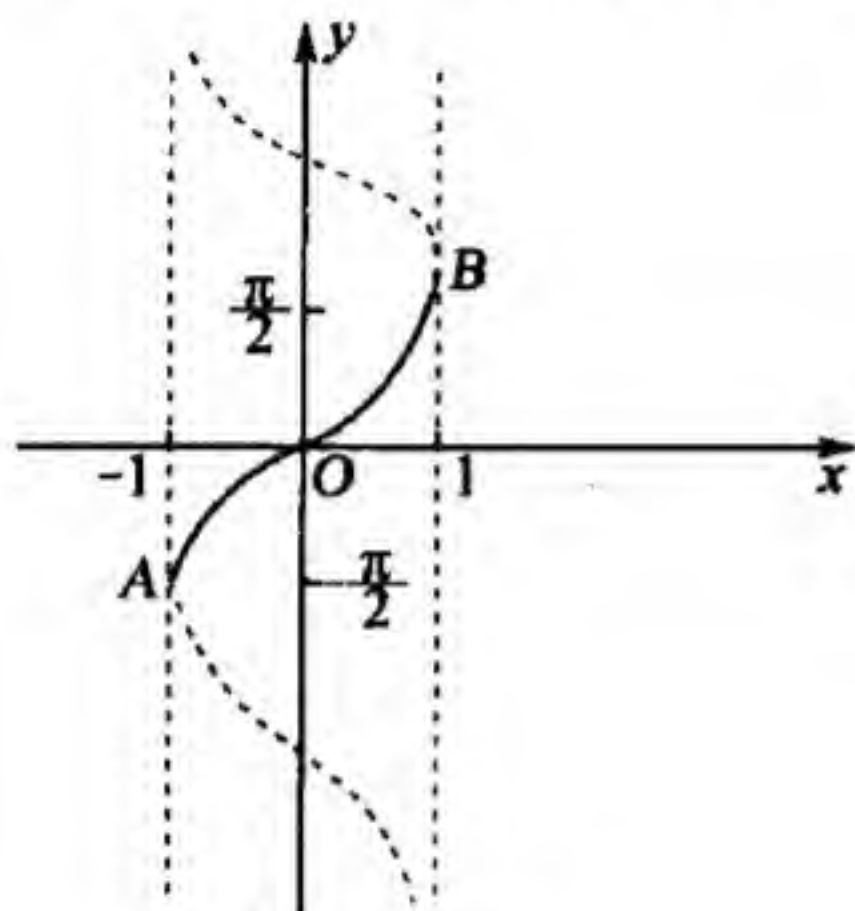
作以下反三角函数的图形(311 ~ 322).

【311】 $y = \arcsin x$.

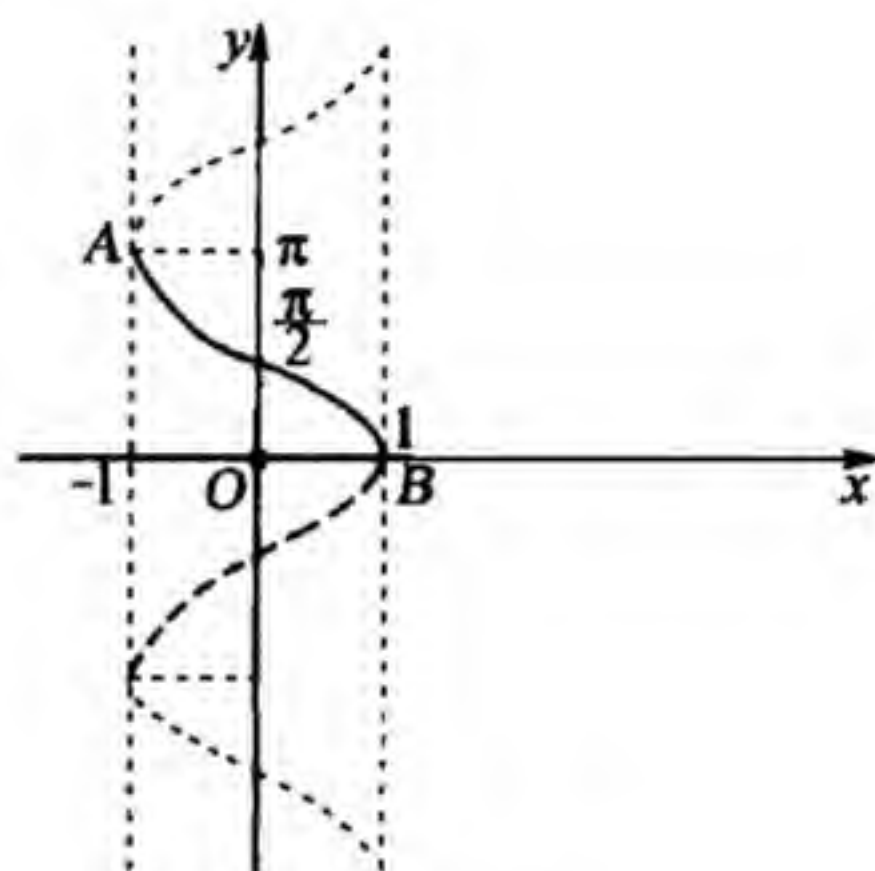
解 如 311 题所示的 \widehat{AB} 曲线段

【312】 $y = \arccos x$.

解 如 312 题所示的 \widehat{AB} 曲线段



311 题图



312 题图

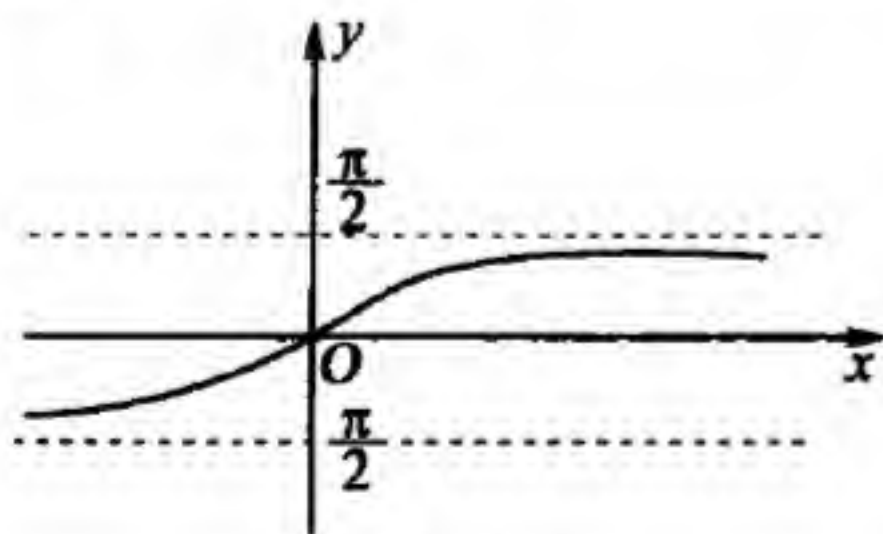
【313】 $y = \arctan x$.

解 定义域为 $-\infty < x < +\infty$, 且 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $y = \pm \frac{\pi}{2}$.

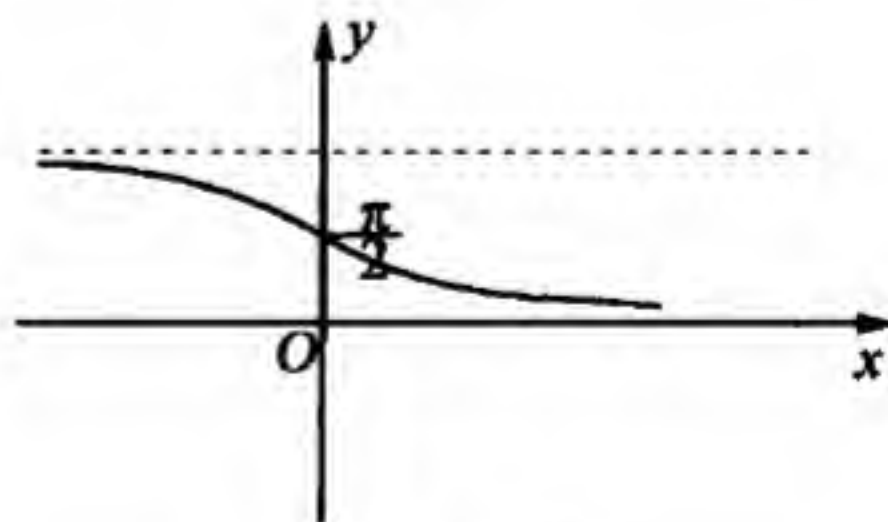
为图形的渐近线, 如 313 题图所示.

【314】 $y = \operatorname{arccot} x$.

解 $0 < y < \pi$, $y = 0$, $y = \pi$ 为图形的渐近线, 如 314 题图所示.



313 题图



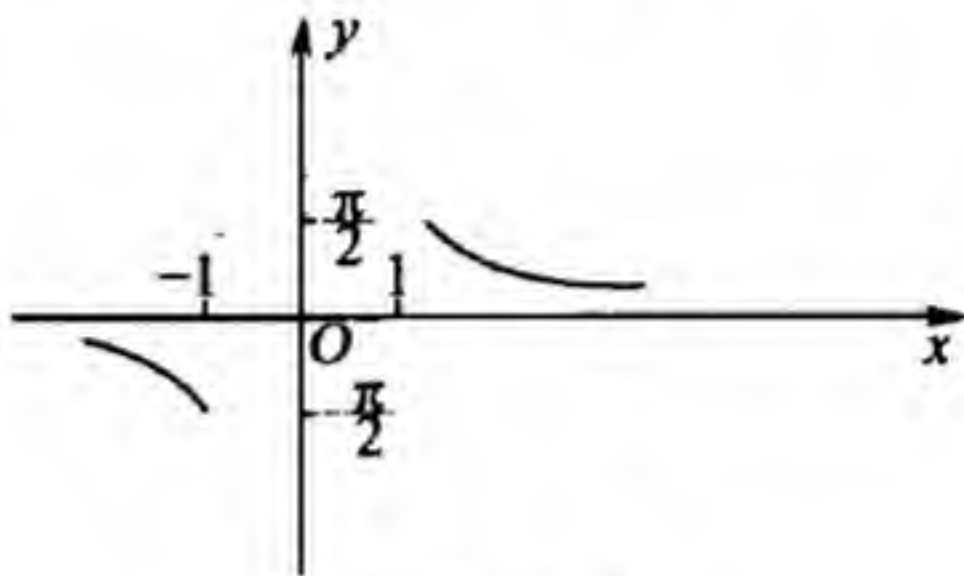
314 题图

【315】 $y = \arcsin \frac{1}{x}.$

解 定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ 函数关于原点对称.

当 $1 \leq x < +\infty$ 时, 由于 $\frac{1}{x}$ 单调减少, 所以 y 也是减函数. 且

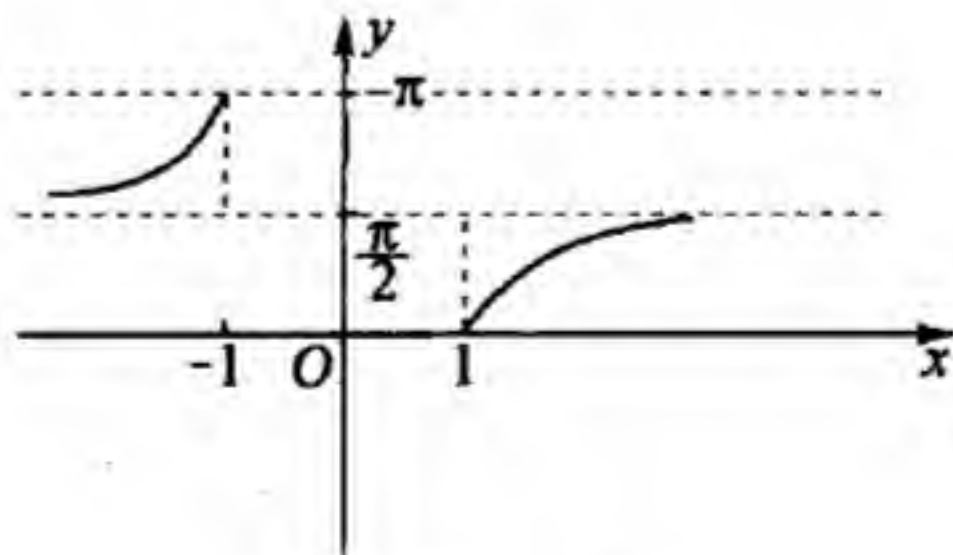
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$, 即 $y = 0$ 为图形的渐近线, 如 315 题图所示.



315 题图

【316】 $y = \arccos \frac{1}{x}.$

解 定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. 当 $1 \leq x < +\infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 单调减少, y 由 0 增加至 $\frac{\pi}{2}$, 当 $-\infty < x \leq -1$ 时, y 由 $\frac{\pi}{2}$ 增加至 π . $y = \frac{\pi}{2}$ 为图形的渐近线, 如 316 题图所示.



316 题图

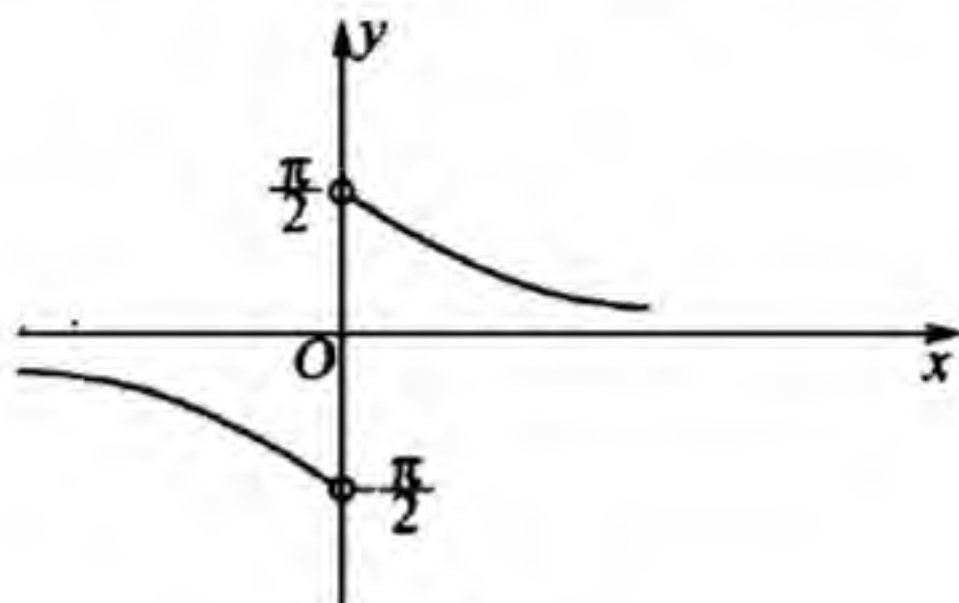
【317】 $y = \operatorname{arccot} \frac{1}{x}.$

解 定义域为 $x \neq 0$. 图形关于原点对称.

当 $x > 0$ 时, 由于 $\frac{1}{x}$ 是单调减函数, 所以 y 是减函数. 且

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$$

所以 $y = 0$ 是图形的渐近线, 如 317 题图所示.



317 题图

【318】 $y = \arcsin(\sin x)$.

解 当 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $\arcsin(\sin x) = x$. 故

当 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $y = x$.

当 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = \pi - x$.

当 $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$ 时, $y = 2\pi - x$.

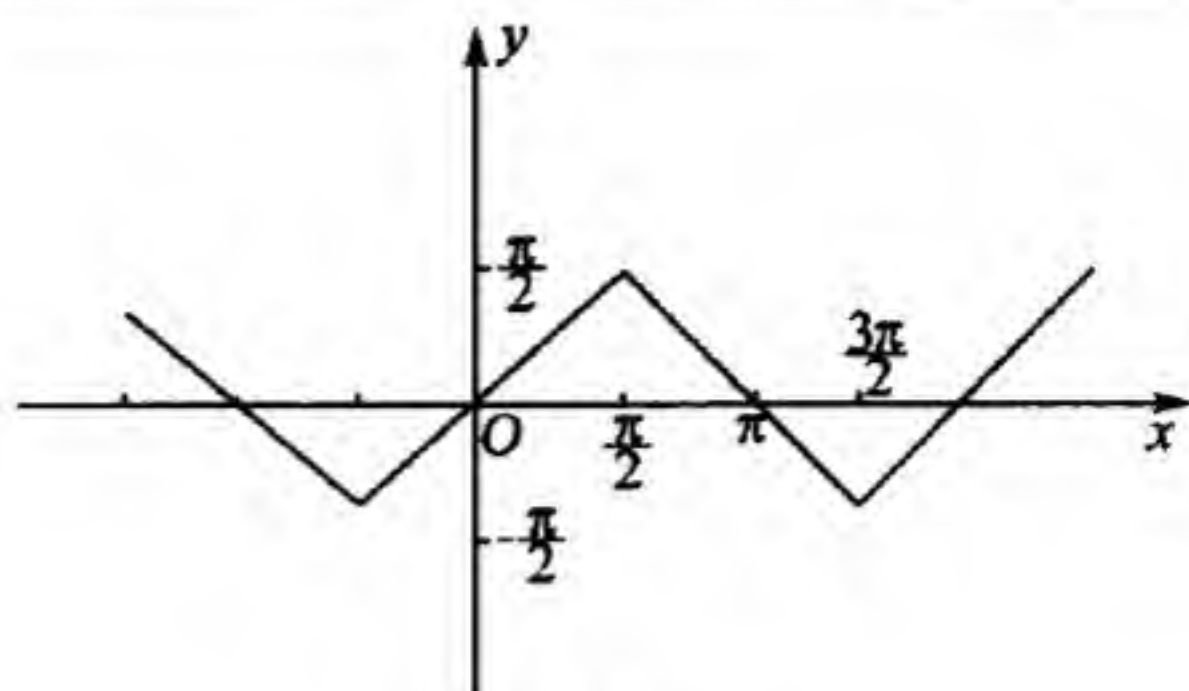
一般地,

当 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = x - 2k\pi$.

当 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ 时,

$$y = (\pi - x) + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

如 318 题图所示.



318 题图

【319】 $y = \arcsin(\cos x)$.

解 由定义有

$$\sin y = \cos x,$$

且 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2},$

因此当 $-\pi \leq x \leq 0$ 时, $y = \frac{\pi}{2} + x$.

当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $y = \frac{\pi}{2} - x$.

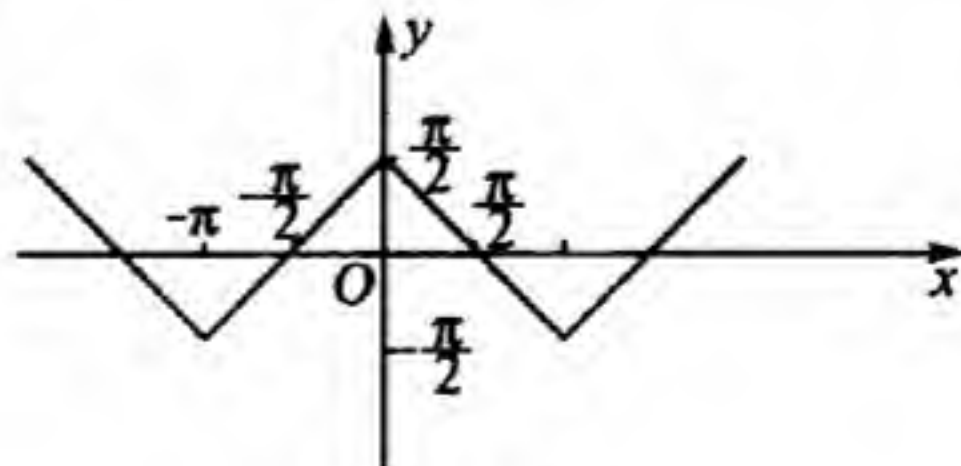
并且 y 是以 2π 为周期的周期函数, 所以当 $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$ 时,

$$y = \left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2k\pi.$$

当 $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$ 时,

$$y = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

如 319 题图所示.



319 题图

【320】 $y = \arccos(\cos x)$.

解 由反余弦函数的定义有

$$\cos y = \cos x.$$

且 $0 \leq y \leq \pi$,

故当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $y = x$.

当 $-\pi \leq x \leq 0$ 时, $y = -x$.

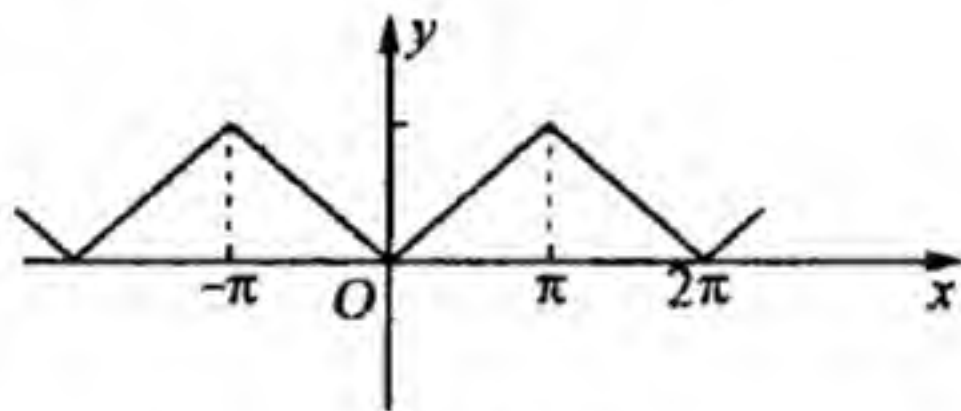
一般地当 $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$ 时,

$$y = -(x - 2k\pi) = -x + 2k\pi.$$

当 $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$ 时,

$$y = x - 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

如图 320 题图所示.



320 题图

【321】 $y = \arctan(\tan x)$.

解 由反正切函数的定义有 $\tan y = \tan x$

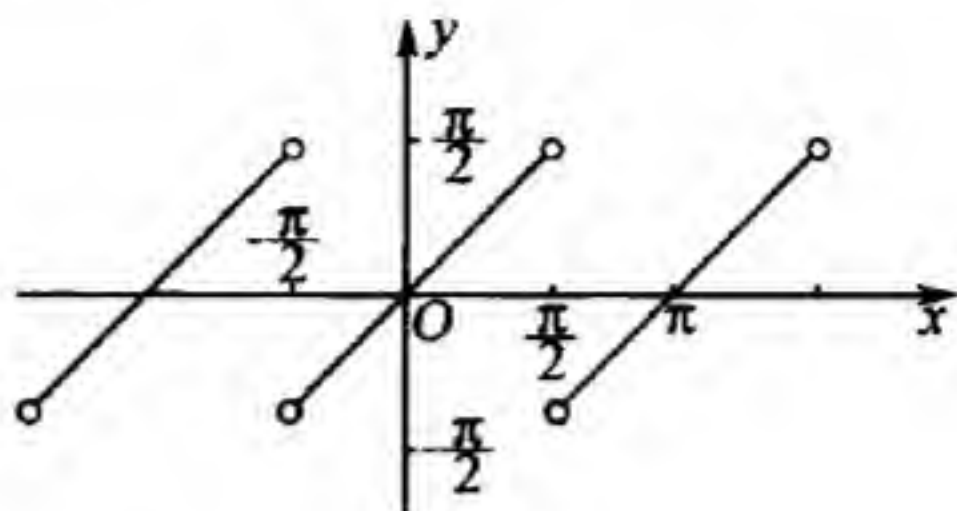
且 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$,

所以当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $y = x$; 又 y 是以 π 为周期的周期函数,

所以当 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ 时,

$$y = x - k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

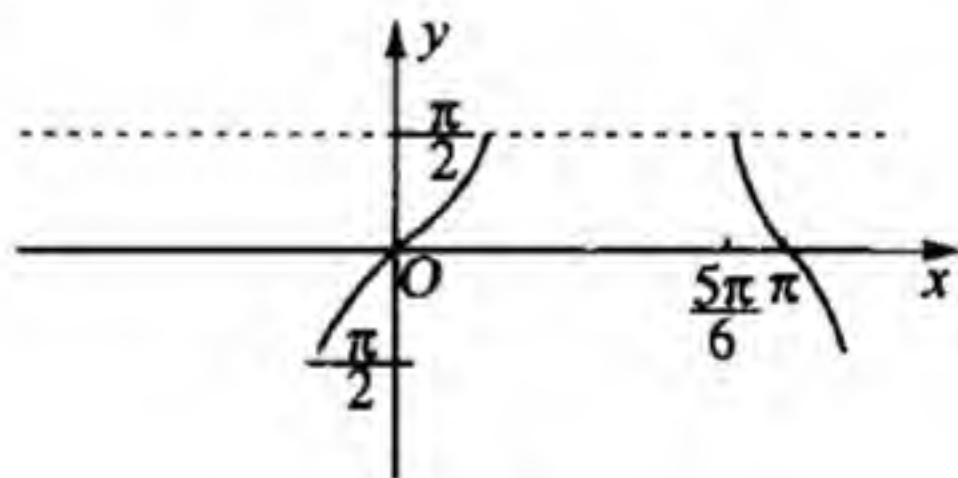
如 321 题图所示.



321 题图

【322】 $y = \arcsin(2\sin x)$.

解 由定义有 $\sin y = 2\sin x$ 且 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. 函数的定义域为 $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$, 如 322 题图所示.



322 题图

【323】 作出函数 $y = \arcsin y_1$ 的图形, 设

$$(1) y_1 = 1 - \frac{x}{2}; \quad (2) y_1 = \frac{2x}{1+x^2};$$

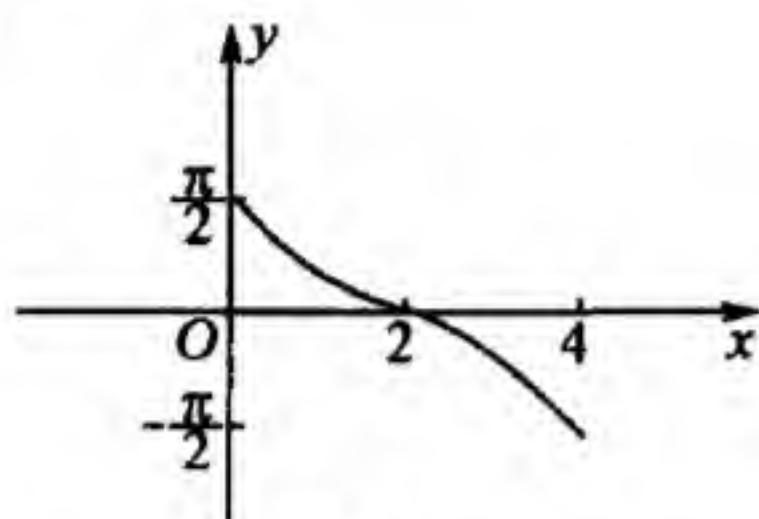
$$(3) y_1 = \frac{1-x}{1+x}; \quad (4) y_1 = e^x.$$

解 (1) 定义域为 $[0, 4]$

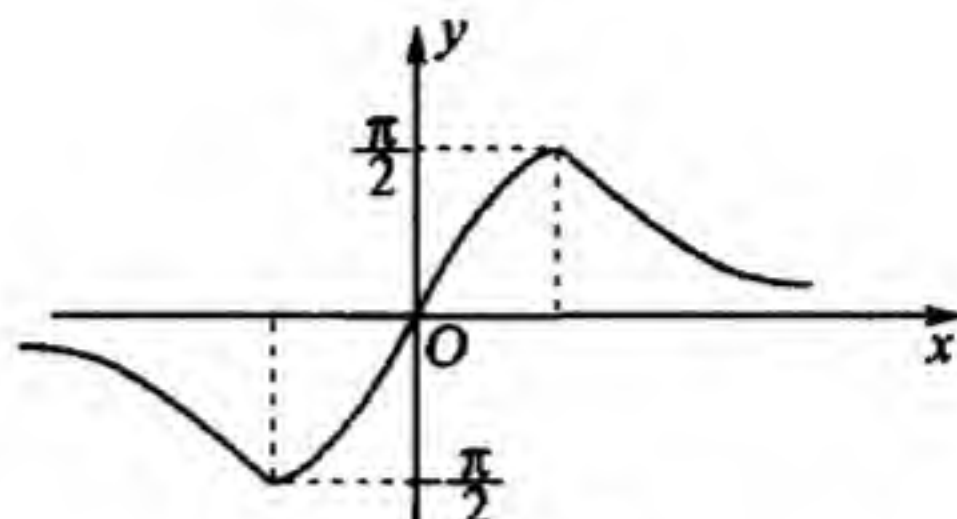
当 $0 \leq x \leq 2$ 时, y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0, 而当 $2 \leq x \leq 4$ 时, y 由 0 减少到 $-\frac{\pi}{2}$, 如 323 题图 1 所示.

(2) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 图形关于原点对称. 当 x 由 0 增到 1 时, 由于 $\frac{2x}{1+x^2}$ 为增函数, 故由 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$. 而当 $x > 1$ 时, $\frac{2x}{1+x^2}$

为减函数,故 y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0,且 $y=0$ 为图形的渐近线,如 323 题图 2.



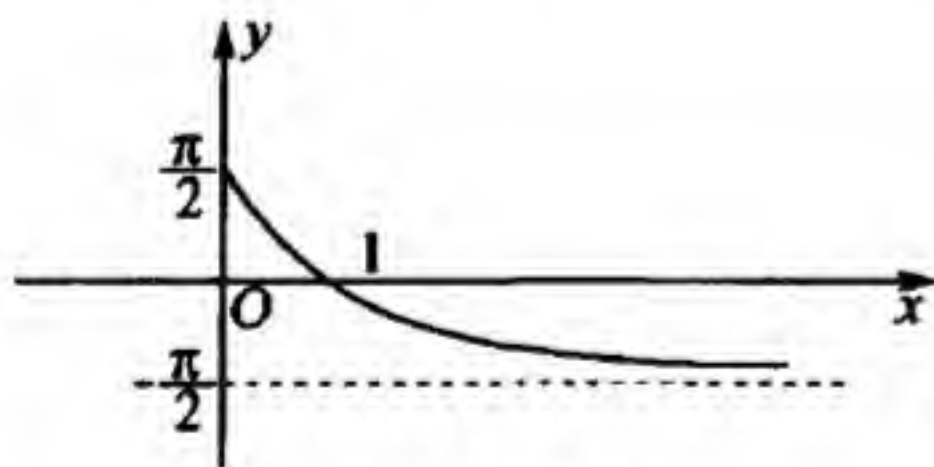
323 题图 1



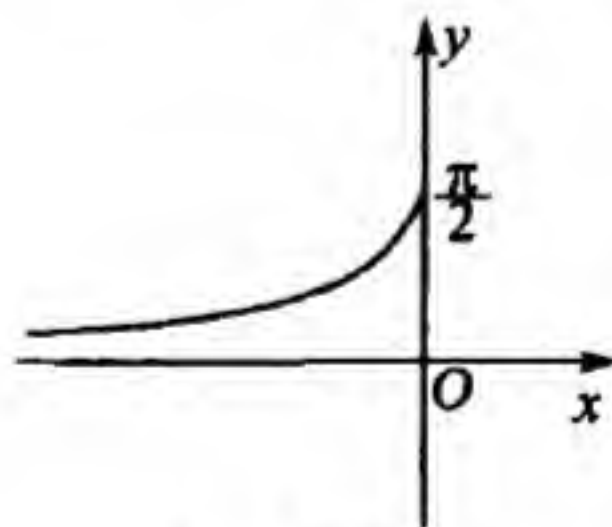
323 题图 2

(3) 函数的定义域为 $x \geq 0$. 当 x 由 0 增加到 1 时, $\frac{1-x}{1+x}$ 由 1 减少到 0, 故 y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0; 而当 x 由 1 增加到 $+\infty$ 时, $\frac{1-x}{1+x}$ 由 0 减少到 -1 . 故 y 由 0 减少到 $-\frac{\pi}{2}$, 且 $y = -\frac{\pi}{2}$ 为图形的渐近线, 如 323 题图 3 所示.

(4) 定义域为 $(-\infty, 0]$, 当 x 由 $-\infty$ 增加到 0 时, e^x 由 0 增加到 1. 所以 y 由 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$, 且 $y=0$ 为图形的渐近线, 如 323 题图 4.



323 题图 3



323 题图 4

【324】 作出函数 $y = \arctan y_1$ 的图形, 设

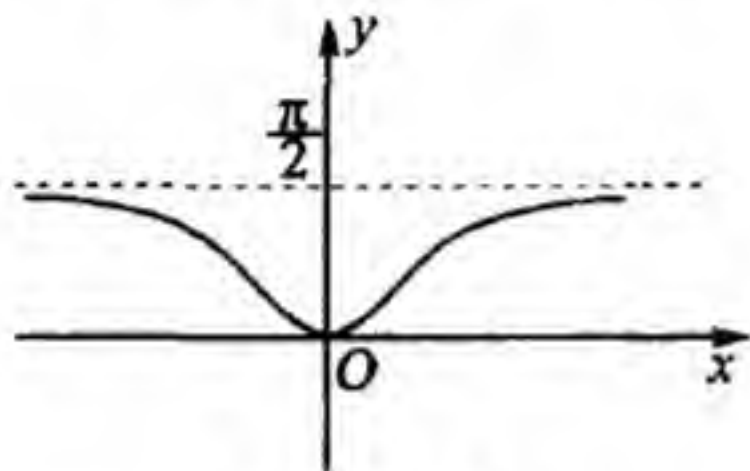
- | | |
|---------------------|--------------------------------|
| (1) $y_1 = x^2$; | (2) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; |
| (3) $y_1 = \ln x$; | (4) $y_1 = \frac{1}{\sin x}$. |

解 (1) 图形关于 Oy 轴对称.

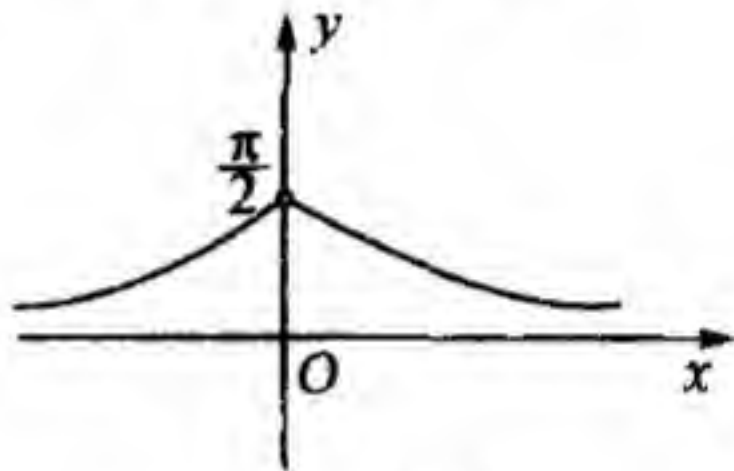
当 $x=0$ 时, $y=0$. 当 x 由 0 增加至 $+\infty$ 时, y 由 0 增加至 $\frac{\pi}{2}$.

$y = \frac{\pi}{2}$ 为图形的渐近线, 如 324 题图 1 所示.

(2) 函数的定义域为 $x \neq 0$. 图形关于 Oy 轴对称. 当 x 趋近于 0 时, $\frac{1}{x^2}$ 趋于 $+\infty$, 故 y 趋近于 $\frac{\pi}{2}$. 当 x 由 0 增至 $+\infty$ 时, y 由 $\frac{\pi}{2}$ 单调减至 0, $y=0$ 为图形的渐近线, 如 324 题图 2 所示.



324 题图 1



325 题图 2

(3) 函数的定义域为 $(0, +\infty)$.

当 x 由 0 单调增加到 $+\infty$ 时, $\ln x$ 由 $-\infty$ 单调增加至 $+\infty$. 故 y 由 $-\frac{\pi}{2}$ 单调增加到 $\frac{\pi}{2}$. 且当 $x=1$ 时, $y=0$, 如 324 题图(3) 所示.

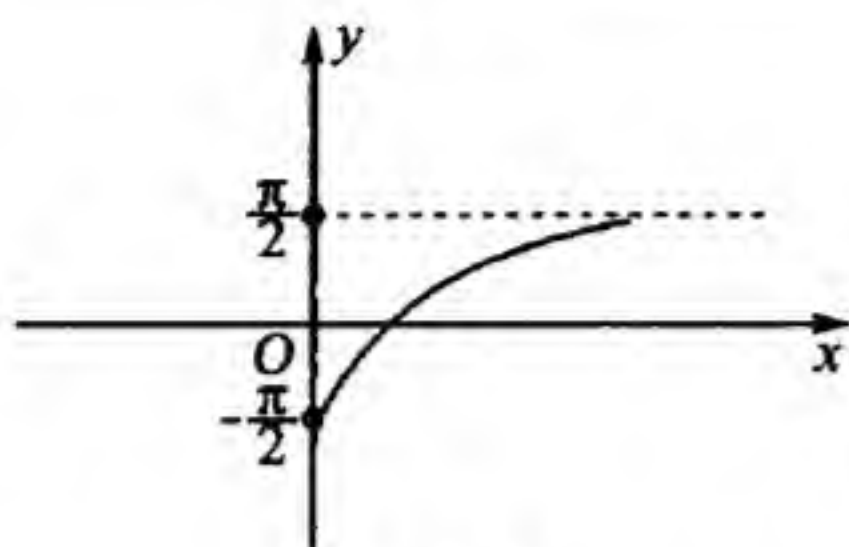
(4) 函数是以 2π 为周期的周期函数

当 x 由 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{1}{\sin x}$ 由 $+\infty$ 减至 1, 则 y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减至 $\frac{\pi}{4}$.

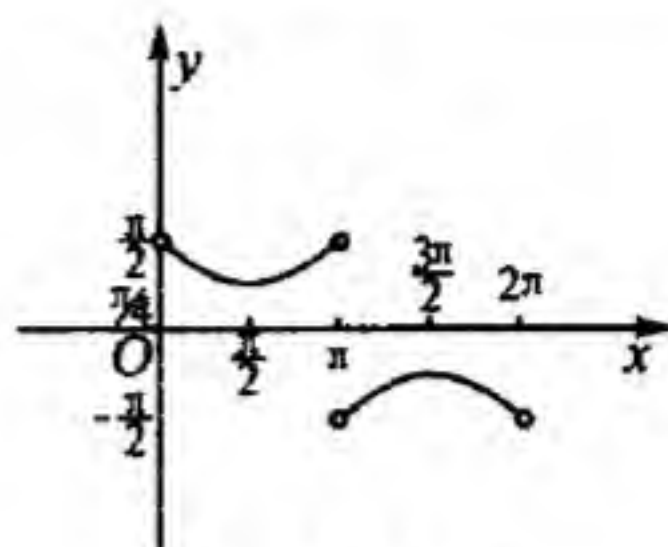
当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 π 时, $\frac{1}{\sin x}$ 由 1 增加到 $+\infty$, 则 y 由 $\frac{\pi}{4}$ 增加到 $\frac{\pi}{2}$.

当 x 由 π 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 时, $\frac{1}{\sin x}$ 由 $-\infty$ 增加到 -1 , 则 y 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增加

到 $-\frac{\pi}{4}$. 当 x 由 $\frac{3\pi}{2}$ 增加到 2π 时, y 由 $-\frac{\pi}{4}$ 减至 $-\frac{\pi}{2}$, 如 324 题图 4 所示.



324 题图 3



324 题图 4

【324. 1】 作出以下函数的图形:

$$(1) y = x^3 - 3x + 2; \quad (2) y = \frac{x^3}{(1-x)(1+x)^2};$$

$$(3) y = \frac{x^2}{|x|-1}; \quad (4) y = \sqrt{x(1-x^2)};$$

$$(5) y = 3\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right); \quad (6) y = \cot \frac{\pi x}{1+x^2};$$

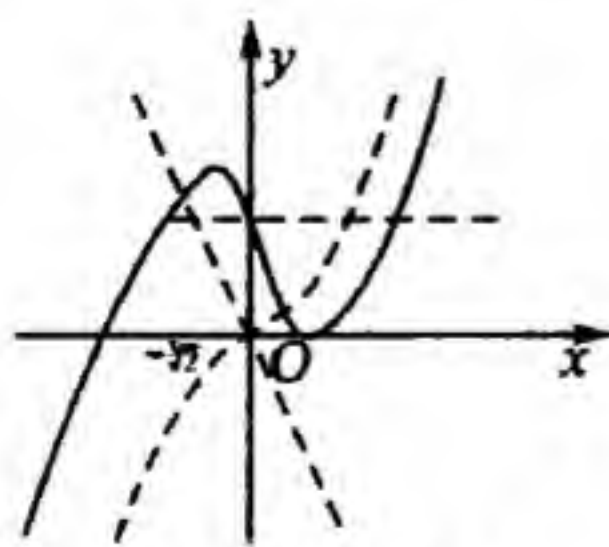
$$(7) y = \frac{1}{1-2^{\frac{1}{1-x}}}; \quad (8) y = \lg(x^2 - 3x + 2);$$

$$(9) y = \arcsin\left(\frac{3}{2} - \sin x\right);$$

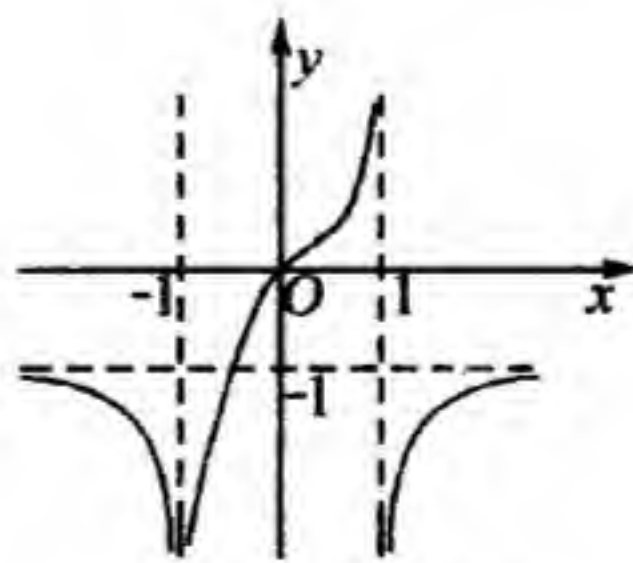
$$(10) y = \arctan\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right);$$

$$(11) y = \log_{\cos x} \sin x; \quad (12) y = (\sin x)^{\cot x}.$$

解 (1) 图形由 $y = x^3$, $y = -3x$, $y = 2$ 的图形叠加而成, 如 324.1 题图 1 中实线所示.



324.1 题图 1



324.1 题图 2

(2) 函数的定义域为 $x \neq \pm 1$.

且
$$y = -1 + \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)(1+x)^2}$$

$y = -1, x = 1$, 及 $x = -1$ 为图形的渐近线. 当 $x = 0$ 时, $y = 0$, 如 324.1 图 2 所示.

(3) 函数的定义域 $x \neq \pm 1$, 且

当 $x \geq 0$ 且 $x \neq 1$ 时,

$$y = \frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1},$$

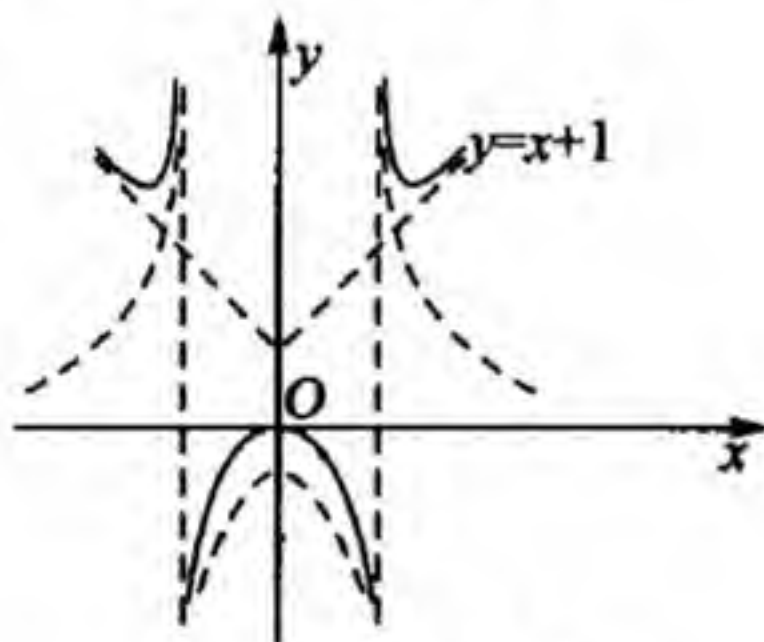
当 $x < 0$ 且 $x \neq -1$ 时,

$$y = \frac{x^2}{-x-1} = -x+1 - \frac{1}{x+1},$$

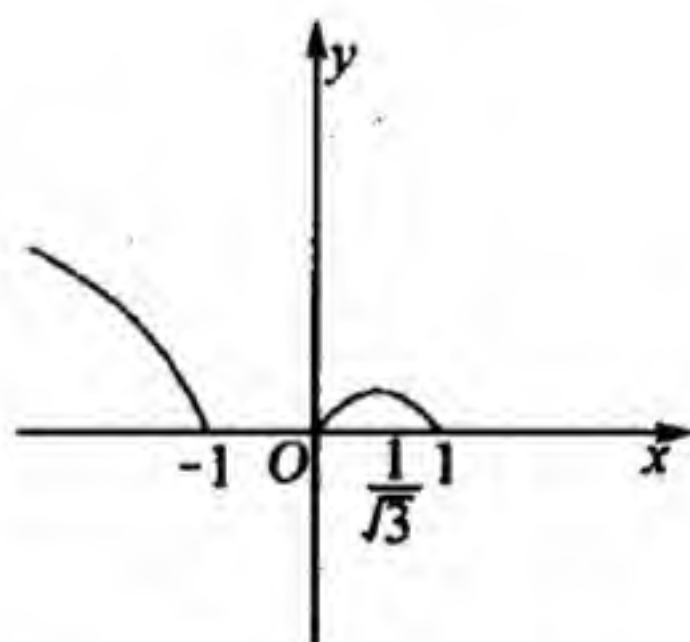
故当 $x \geq 0$ 时, 图形由 $y = x+1$ 及 $y = \frac{1}{x-1}$ 叠加而成.

当 $x < 0$ 时, 图形由 $y = -x+1$ 及 $y = -\frac{1}{x+1}$ 叠加而成, 如

324.1 题图 3 中实线所示.



324.1 题图 3



324.1 题图 4

(4) 函数的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$,

当 x 由 $-\infty$ 增至 -1 时, y 由 $+\infty$ 减至 0 .

在 $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, 函数单调增加;

在 $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$ 函数单调减少, 如 324.1 题图 4 所示.

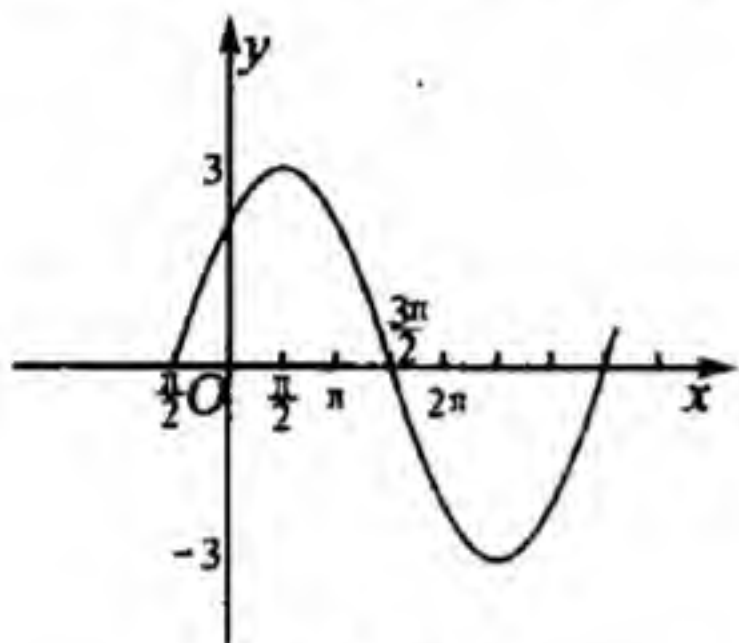
(5) 将 $y = \sin x$ 的图形向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位. 再沿 Ox 轴的方向

拉长 2 倍,然后再沿 Oy 轴的方向拉长 3 倍,如 324.1 题图 5 所示.

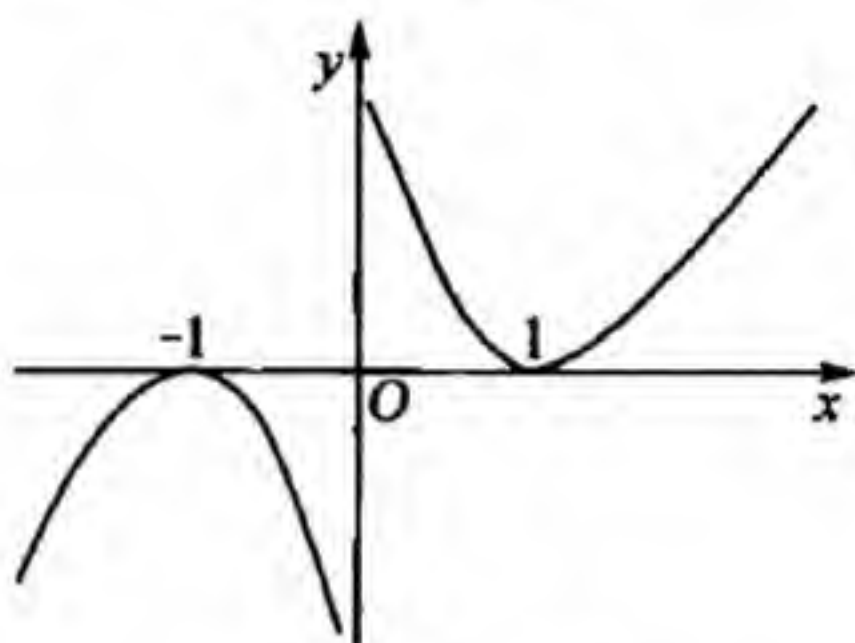
(6) 定义域为 $x \neq 0$.

当 x 由 $-\infty$ 增至 -1 时, $\frac{\pi x}{1+x^2}$ 由 0 减至 $-\frac{\pi}{2}$,故 y 由 $-\infty$ 增至 0.

当 x 由 -1 增至 0 时, $\frac{\pi x}{1+x^2}$ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增加到 0^- ,故 y 由 0 减至 $-\infty$,且图形关于原点对称,如 324.1 题图 6 所示.



324.1 题图 5



324.1 题图 6

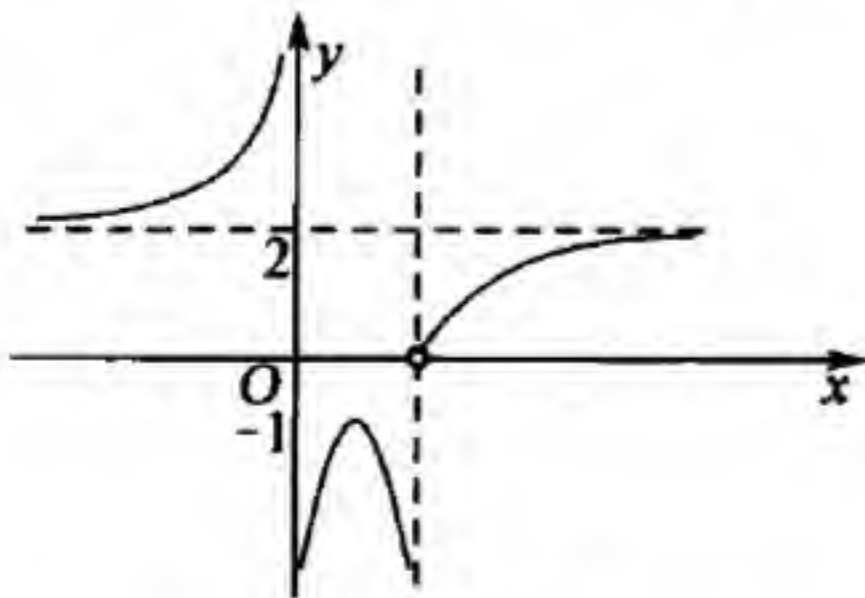
(7) 定义域为 $x \neq 0$,且 $x \neq 1$.

$y = 2, x = 0, x = 1$ 为图形的渐近线,如 324.1 题图 7 所示.

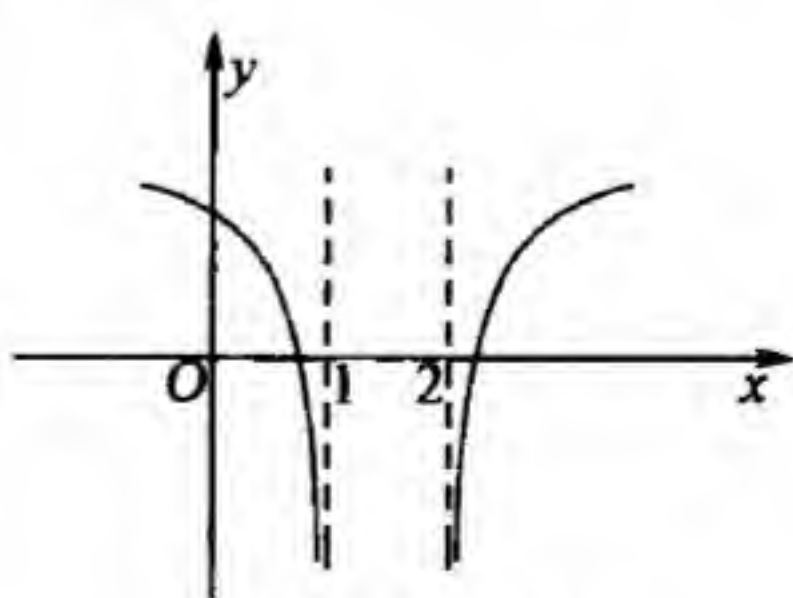
(8) 函数的定义域 $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

当 x 由 $-\infty$ 增至 1 时 $x^2 - 3x + 2$ 由 $+\infty$ 减至 0. 故 y 由 $+\infty$ 减到 $-\infty$

当 x 由 2 增至 $+\infty$ 时, $x^2 - 3x + 2$ 由 0 增加到 $+\infty$. 故 y 由 $-\infty$ 增加到 $+\infty$,如 324.1 题图 8 所示.



324.1 题图 7



324.1 题图 8

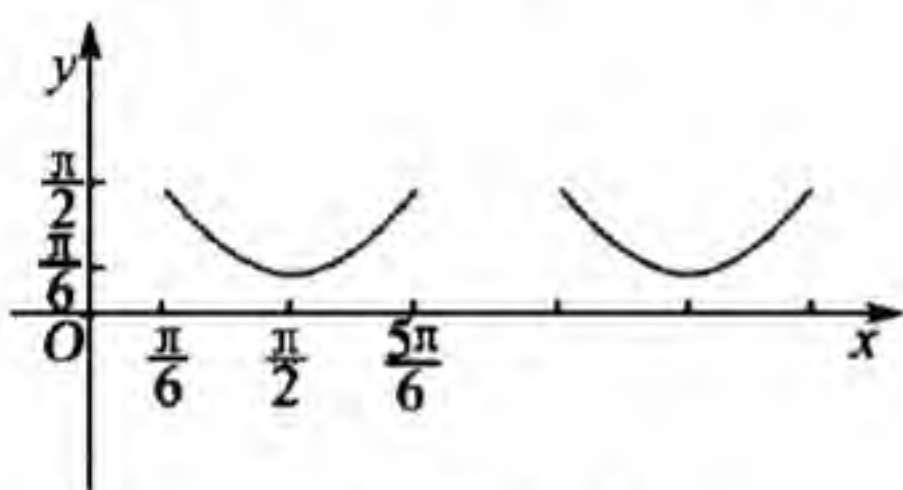
(9) 函数为周期为 2π 的周期函数定义域为

$$\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \left[2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \right].$$

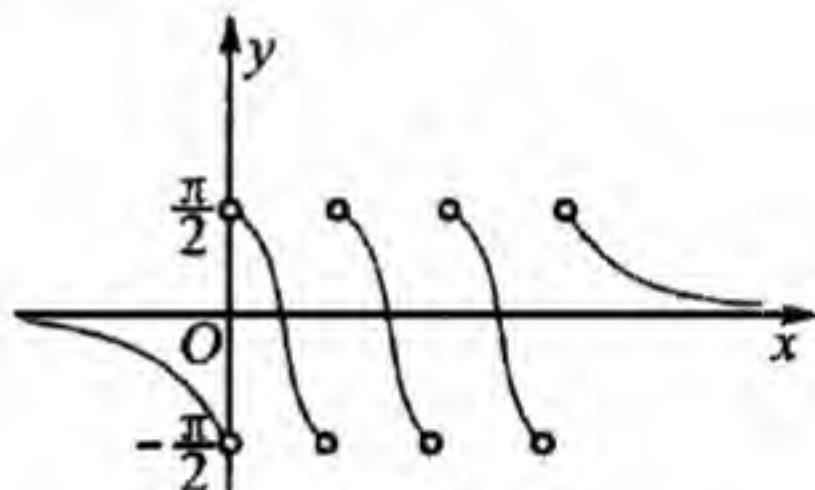
当 x 由 $\frac{\pi}{6}$ 增加至 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{3}{2} - \sin x$ 由 1 减至 $\frac{1}{2}$, 故 y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减至 $\frac{\pi}{6}$; 当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增至 $\frac{5\pi}{6}$ 时, $\frac{3}{2} - \sin x$ 由 $\frac{1}{2}$ 增加至 1, 故 y 由 $\frac{\pi}{6}$ 增加至 $\frac{\pi}{2}$, 如 324.1 题图 9 所示.

(10) 函数的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

$y = 0$ 为图形的渐近线, 如 324.1 图示 10 所示.



324.1 题图 9



324.1 题图 10

(11) 函数为以 2π 为周期的周期函数定义域为

$$\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right).$$

$$y = \frac{\lg \sin x}{\lg \cos x}.$$

当 $x \rightarrow 0^+$ ($x > 0$, 且 x 趋于 0) 时, $y \rightarrow +\infty$.

当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ ($x < \frac{\pi}{2}$, 且 x 趋于 $\frac{\pi}{2}$) 时, $y \rightarrow 0$.

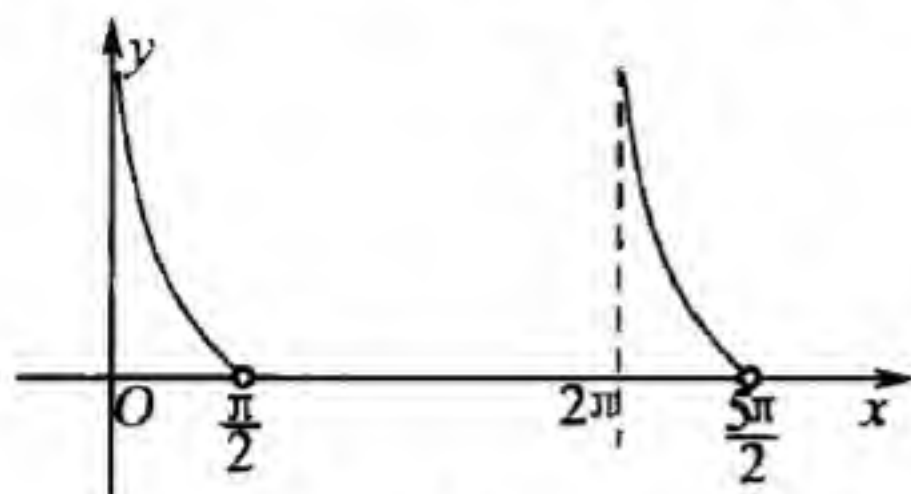
如 324.1 题图 11 所示.

(12) 函数是以 2π 为周期的周期函数.

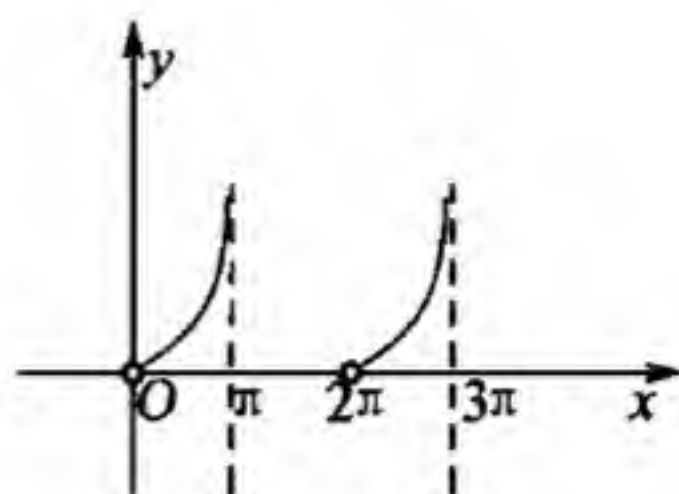
定义域为 $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (2k\pi, (2k+1)\pi)$.

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $y \rightarrow 0$, 当 $x \rightarrow \pi - 0$ 时, $y \rightarrow +\infty$, 且当 $x = \frac{\pi}{2}$

时, $y = 1$, 如 324.1 题图 12 所示.



324.1 题图 11



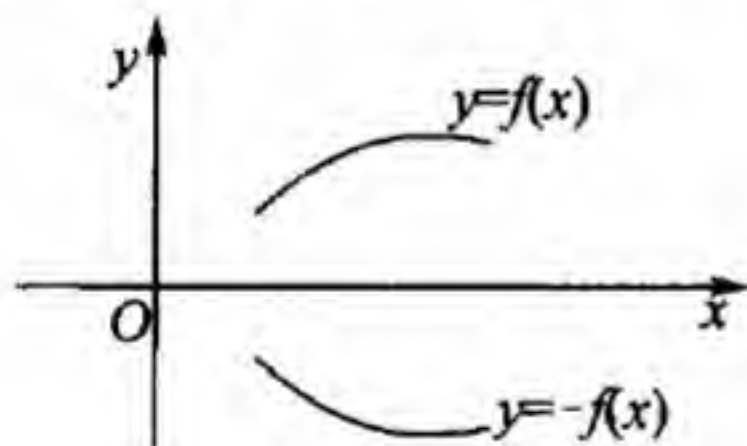
324.1 题图 12

【325】 已知函数 $y = f(x)$ 的图形, 作出下列各函数的图形:

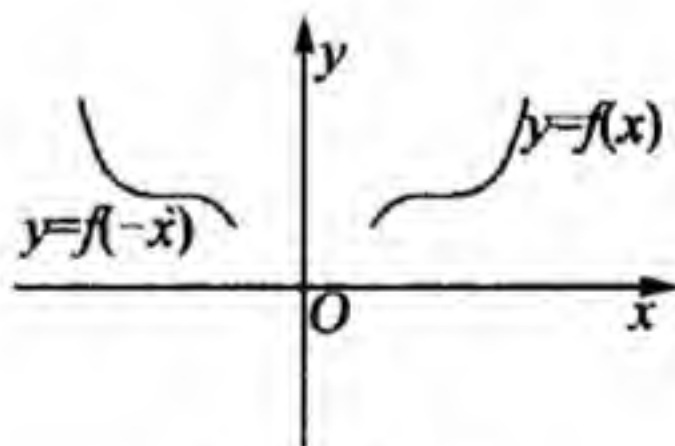
- (1) $y = -f(x)$; (2) $y = f(-x)$;
(3) $y = -f(-x)$.

解 (1) 函数 $y = -f(x)$ 的图形和函数 $y = f(x)$ 的图形关于 Ox 轴对称, 如 325 题图 1 所示.

(2) 函数 $y = f(-x)$ 的图形和函数 $y = f(x)$ 的图形关于 Oy 轴对称, 如 325 题图 2 所示.



325 题图 1



325 题图 2

(3) 函数 $y = -f(-x)$ 的图形和函数 $y = f(x)$ 的图形关于坐标原点对称. 如图所示.

【326】 已知函数 $y = f(x)$ 的图形, 作出下列各函数的图形:

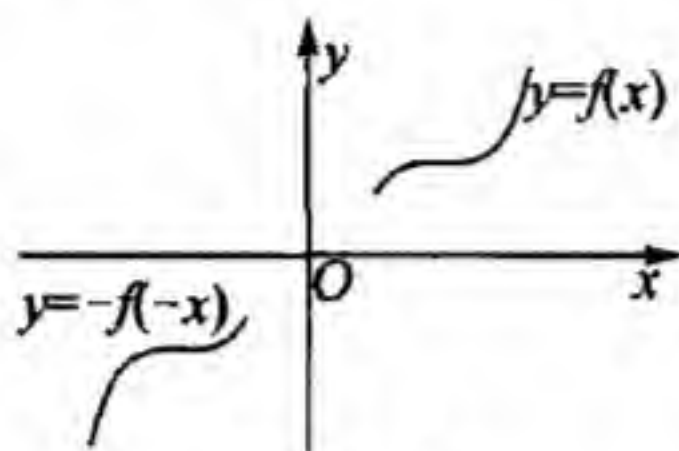
- (1) $y = f(x - x_0)$; (2) $y = y_0 + f(x - x_0)$;
(3) $y = f(2x)$; (4) $y = f(kx + b)$ ($k \neq 0$).

解 (1) 函数 $y = f(x - x_0)$ 的图形可由 $y = f(x)$ 的图形向左(或向右)平移距离 $|x_0|$ 得到:

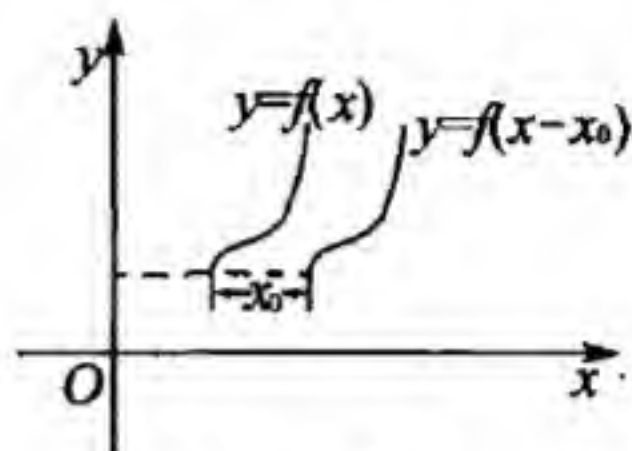
当 $x > 0$ 时, 向右平移;

当 $x < 0$ 时, 向左平移.

如 326 题图 1 所示.



325 题图 3



326 题图 1

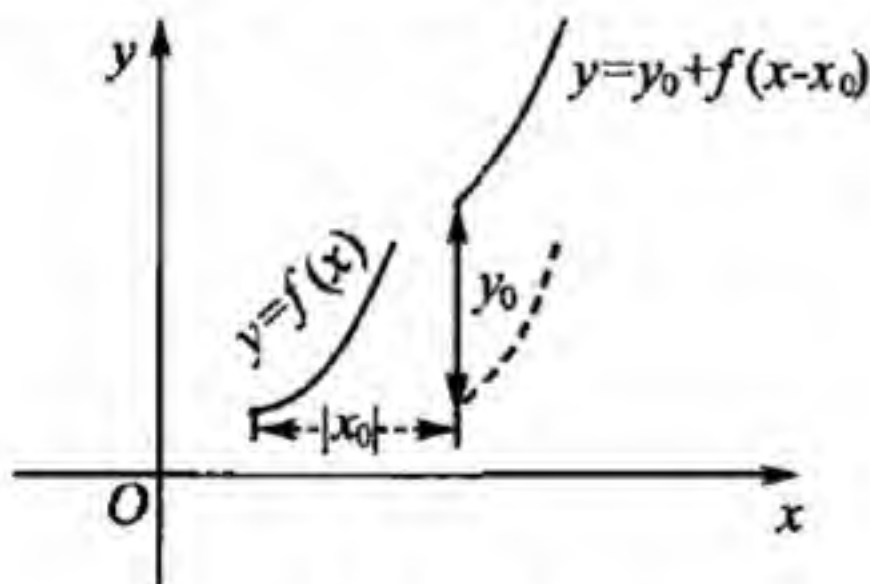
(2) 将 $y = f(x)$ 的图形平移距离 $|x_0|$, 得到 $y = f(x - x_0)$ 的图形, 再将其上下平移距离 $|y_0|$, 即得 $y = y_0 + f(x - x_0)$ 的图形.

当 $y_0 > 0$ 时, 向上平移;

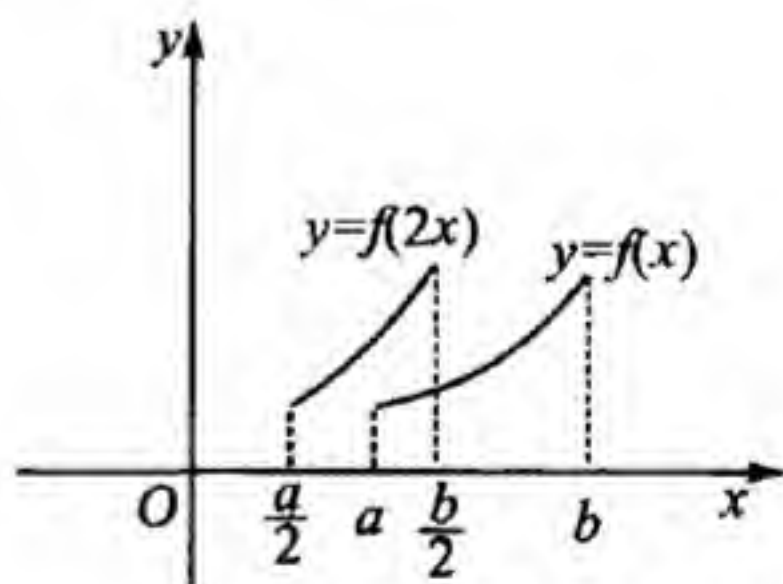
当 $y_0 < 0$ 时, 向下平移.

如 326 题图 2 所示.

(3) $y = f(2x)$ 的图形可由 $y = f(x)$ 的图形沿 Ox 轴方向缩小二倍得到, 如 326 题图 3 所示.



326 题图 2



326 题图 3

(4) 若 $k > 0$, $y = f(kx + b)$ 的图形可由 $y = f(x)$ 的图形先沿 Ox 轴方向压缩 ($k > 1$), 或放大 $\frac{1}{k}$ 倍 ($0 < k < 1$), 然后将所得图形向左 (或向右) 平移距离 $|b|$, 若 $k < 0$, 作图形 $y = f(x)$ 关于 Oy 轴对称的图形, 得到 $y = f(-x)$ 的图形, 将其沿 Ox 轴方向

压缩 $|k|$ 倍 ($|k| > 1$) 或放大 $\frac{1}{|k|}$ 倍 ($0 < |k| < 1$), 然后将所得图形平移距离 $|b|$, 如 326 题图 4

【326. 1】 设 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } |x| > 1 \text{ 时.} \end{cases}$

作出函数

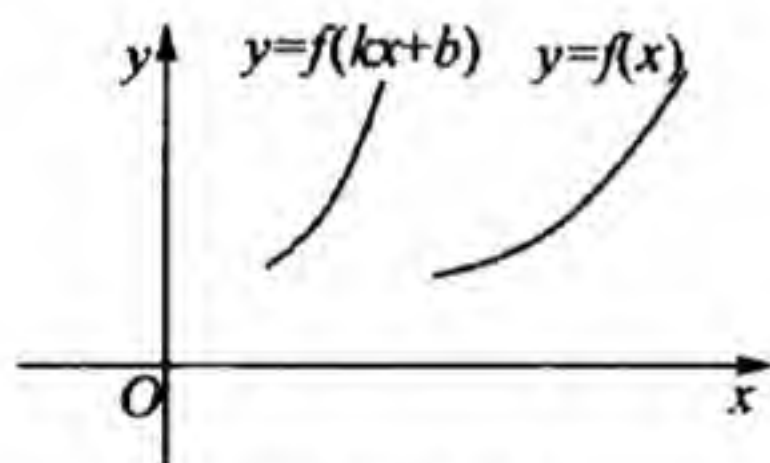
$$y = \frac{1}{2} [f(x-t) + f(x+t)],$$

当 $t = 0, t = 1$ 和 $t = 2$ 时的图形.

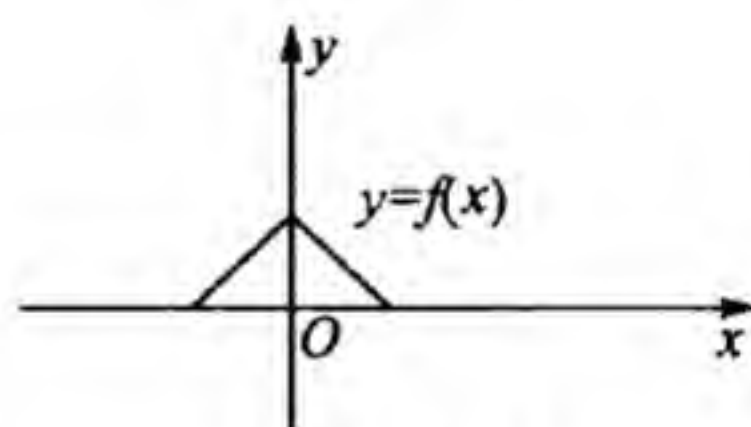
解 (1) 当 $t = 0$ 时,

$$y = \frac{1}{2} [f(x-t) + f(x+t)] = f(x).$$

如 326. 1 题图 1 所示.



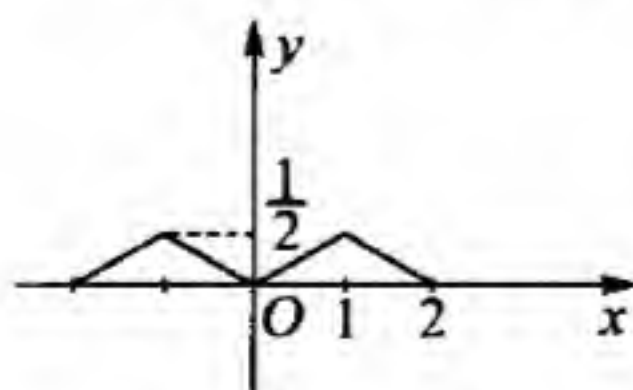
326 题图 4



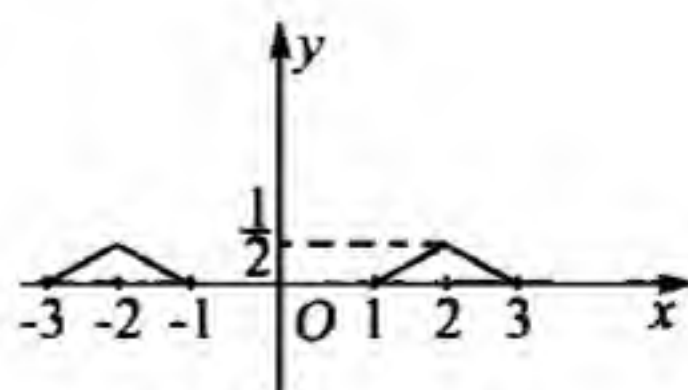
326. 1 题图 1

(2) 将 $y = f(x)$ 向右平移 1 个单位得 $y = f(x-1)$ 的图形, 向左平移 1 个单位得 $y = f(x+1)$ 的图形, 将 $y = f(x-1)$ 及 $y = f(x+1)$ 的图形叠加再将所得图形沿 Oy 轴的方向压缩 2 倍即得所求图形, 如 326. 1 题图 2 所示.

(3) 如 326. 1 题图 3 所示.



326. 1 题图 2



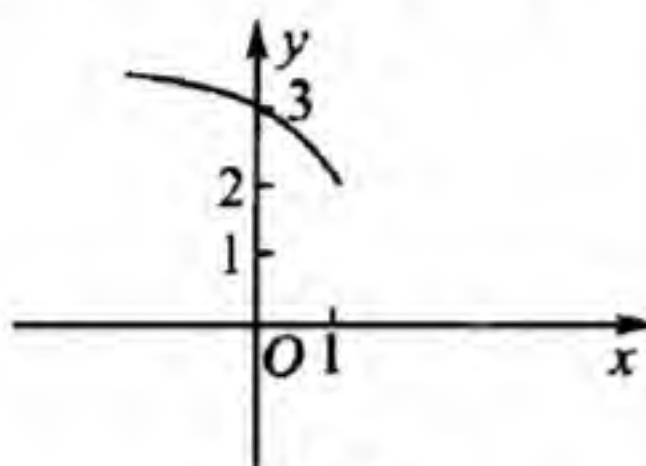
326. 1 题图 3

【327】 作出以下函数的图形:

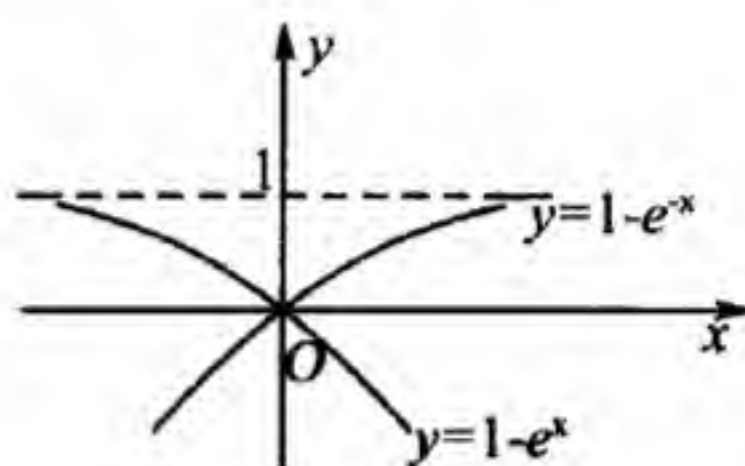
- (1) $y = 2 + \sqrt{1-x}$; (2) $y = 1 - e^{-x}$;
 (3) $y = \ln(1+x)$; (4) $y = -\arcsin(1+x)$;
 (5) $y = 3 + 2\cos 3x$.

解 (1) 如 327 题图 1 所示.

(2) 如 327 题图 2 所示.



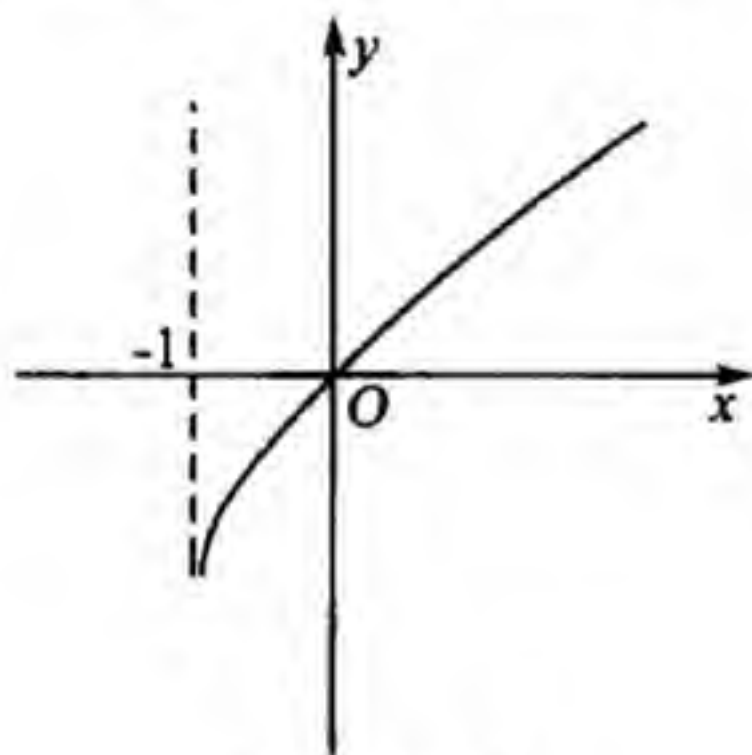
327 题图 1



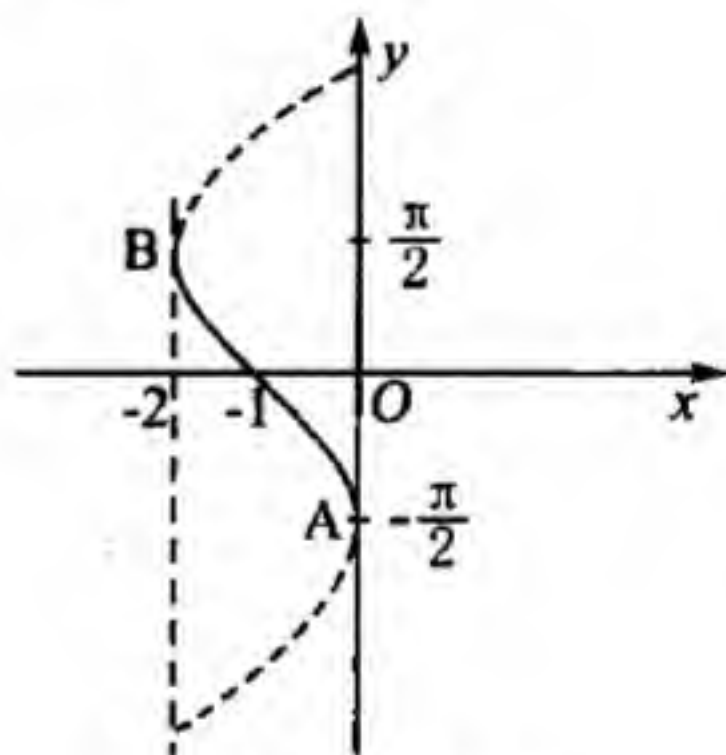
327 题图 2

(3) 如 327 题图 3 所示.

(4) 如 327 题图 4 所示的曲线 \widehat{AB}



327 题图 3



327 题图 4

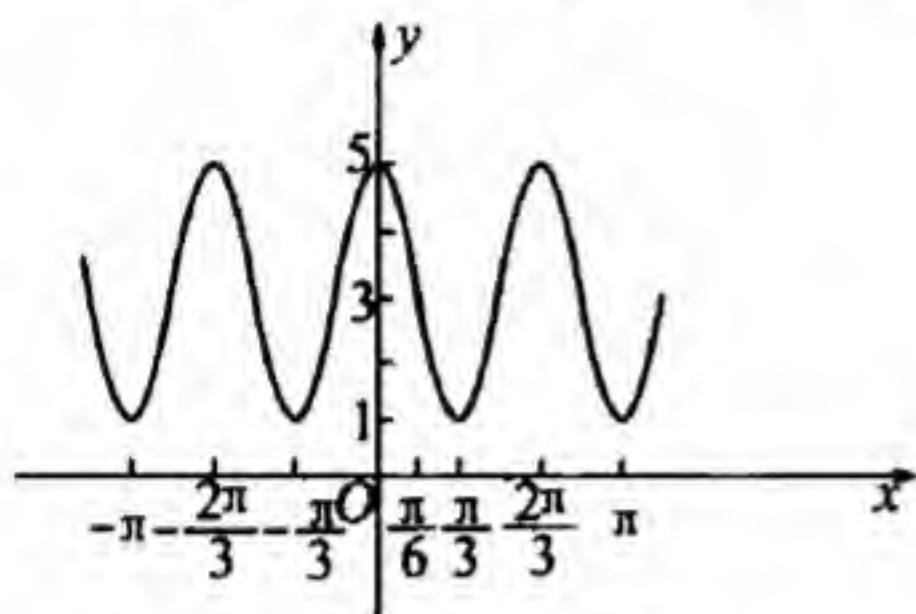
(5) 如 327 题图 5 所示.

【328】 已知函数 $y = f(x)$ 的图形, 作出以下函数的图形:

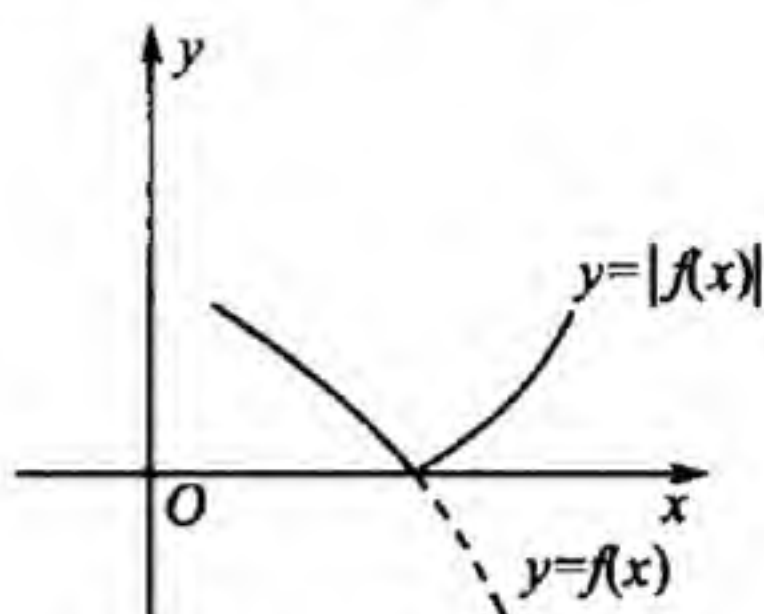
- (1) $y = |f(x)|$;
 (2) $y = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$;
 (3) $y = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$.

解 (1) 当 $f(x) \geq 0$ 时, $y = f(x)$.

当 $f(x) < 0$ 时, $y = -f(x)$, 如 328 题图 1 所示.



327 题图 5



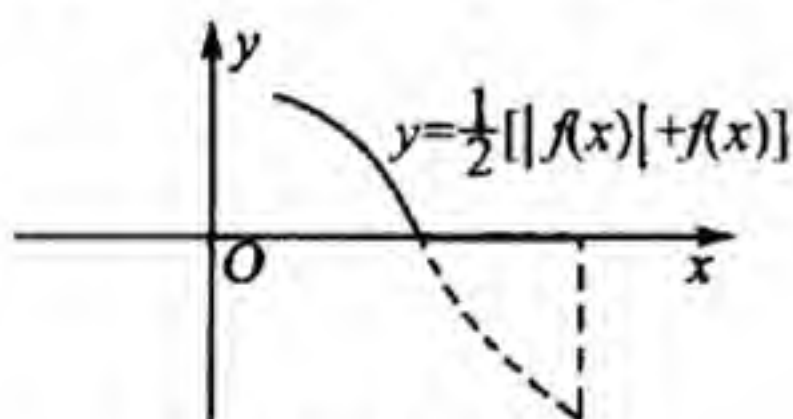
328 题图 1

(2) 当 $f(x) \geq 0$ 时, $y = f(x)$.

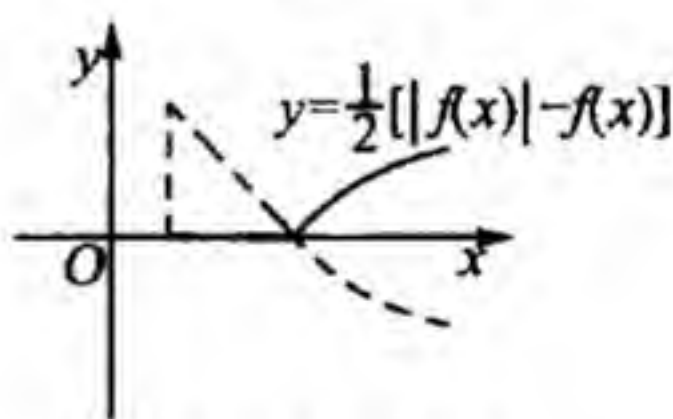
当 $f(x) < 0$ 时, $y = 0$, 如 328 题图 2 所示.

(3) 当 $f(x) \leq 0$ 时, $y = -f(x)$.

当 $f(x) > 0$ 时, $y = 0$, 如 328 题图 3 所示.



328 题图 2



328 题图 3

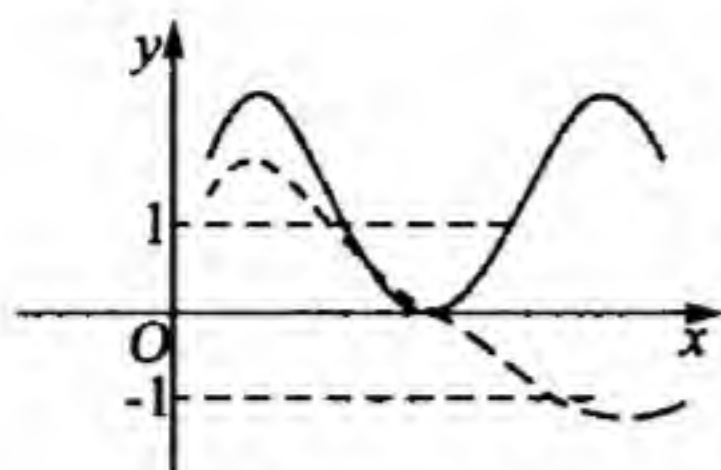
【329】 已知函数 $y = f(x)$ 的图形, 作出以下函数的图形:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------|
| (1) $y = f^2(x)$; | (2) $y = \sqrt{f(x)}$; |
| (3) $y = \ln f(x)$; | (4) $y = f(f(x))$; |
| (5) $y = \operatorname{sgn} f(x)$; | (6) $y = [f(x)]$. |

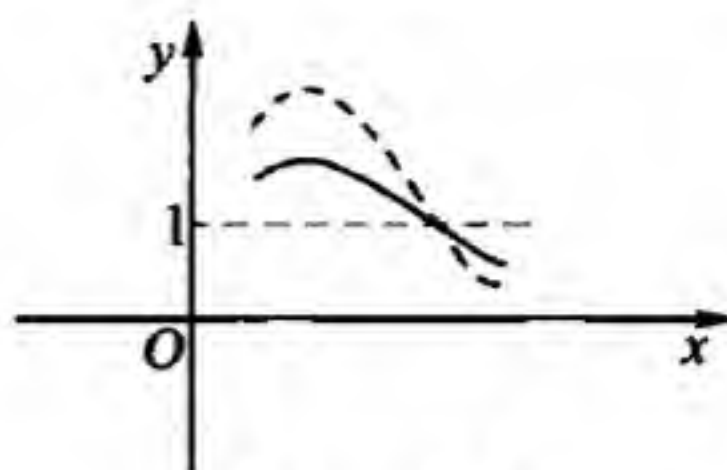
解 (1) 以 $y = 1$ 为图形的分界线.

如 329 题图 1 所示, 虚线表 $y = f(x)$ 的图形, 实线表 $y = [f(x)]^2$ 的图形.

(2) 如 329 题图 2 所示, 虚线表 $y = f(x)$ 的图形, 实线表 $y = \sqrt{f(x)}$ 的图形.



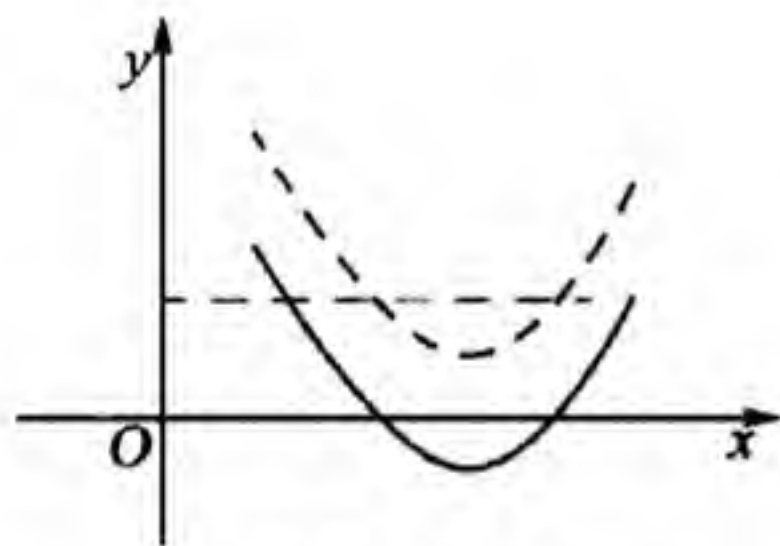
329 题图 1



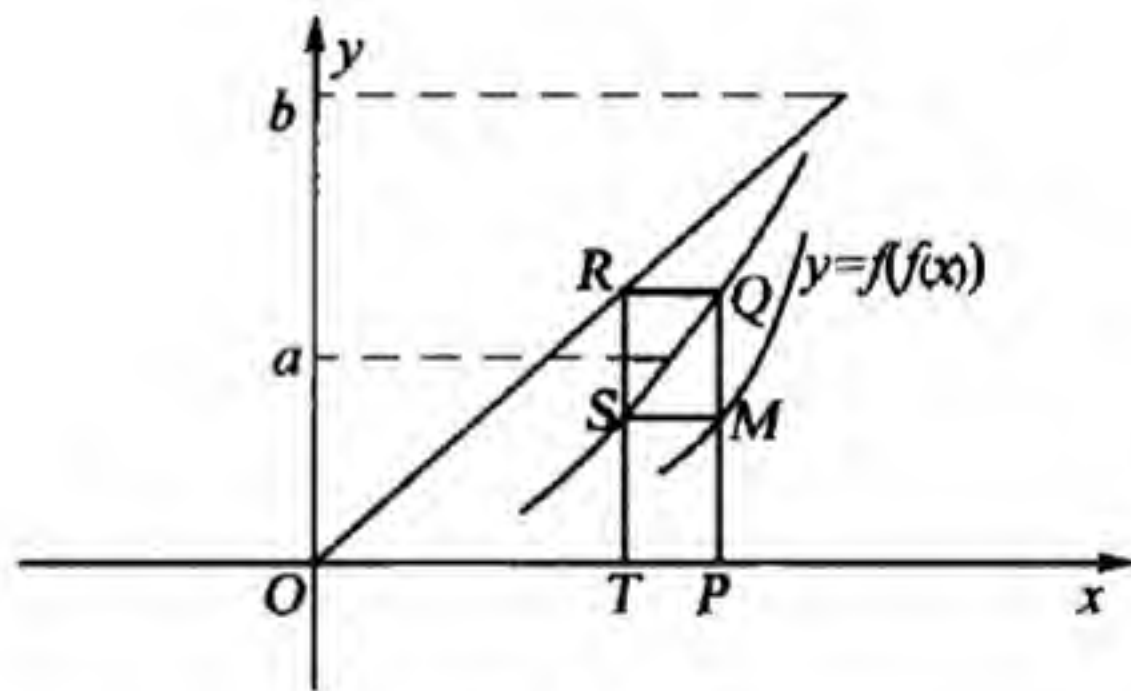
329 题图 2

(3) 函数的定义域为使得 $f(x) > 0$ 的 x 全体, 且 $\ln f(x) < f(x)$.

如 329 题图 3 所示, 虚线表 $y = f(x)$ 的图形, 实线表 $y = \ln f(x)$ 的图形.



329 题图 3



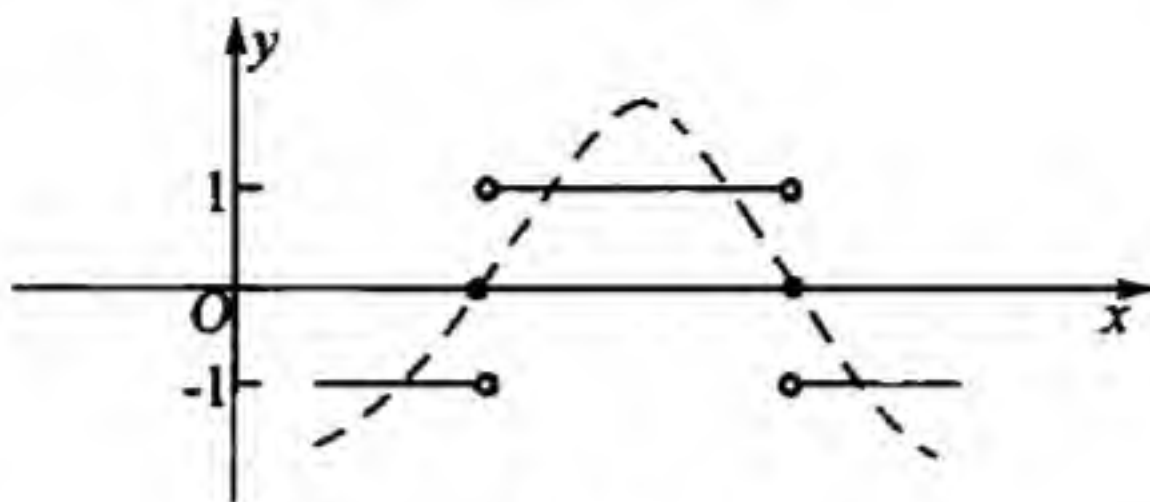
329 题图 4

(4) 不妨设 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, 则当 $a \leq f(x) \leq b$ 时, y 才有定义. 设 P 点是 Ox 轴上横坐标为 x 的点且 $a \leq f(x) \leq B$. 过 P 点作垂直于 Ox 轴的直线, 它与 $y = f(x)$ 的图形相交于 Q 点, 则 $PQ = f(x)$, 过 Q 点引水平线与直线 $y = x$ 交于 R 点, 过 R 点作直线垂直于 Ox 轴, 垂足为 T . 且与 $y = f(x)$ 的图形相交于 S 点, 则 $OT = TR = PQ = f(x)$. 因而 $TS = f(f(x))$. 过 S 点作垂直于 PQ 的直线, 垂足为 M , 此即 $y = f(f(x))$ 图形上的点, 如图 329 题图 4 所示.

(5) 当 $f(x) > 0$ 时, $y = 1$; 当 $f(x) = 0$ 时, $y = 0$.

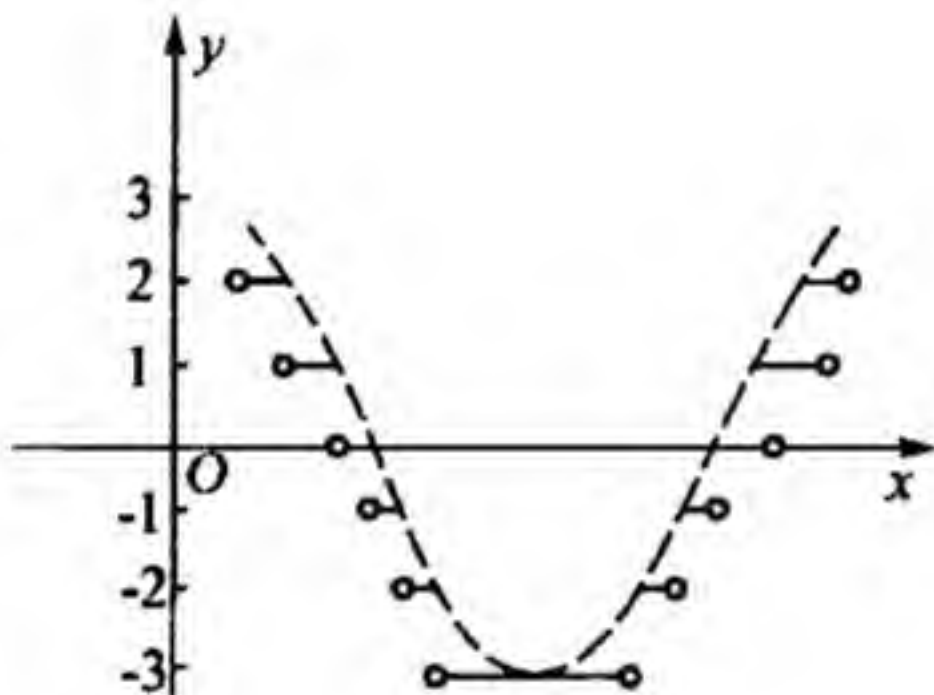
当 $f(x) < 0$ 时, $y = -1$, 如 329 题图 5 所示.

虚线表 $y = f(x)$ 的图形, 实线表 $y = \operatorname{sgn} f(x)$ 的图形.



329 题图 5

(6) 当 $n \leq f(x) \leq n+1$ 时, $y = n$ (n 为整数), 如 329 题图 6 所示.



329 题图 6

【329. 1】 设

$$f(x) = (x-a)(b-x) \quad (a < b),$$

作出以下函数的图形:

- | | |
|---------------------------------------|------------------------|
| (1) $y = f(x);$ | (2) $y = f^2(x);$ |
| (3) $y = \frac{1}{f(x)};$ | (4) $y = \sqrt{f(x)};$ |
| (5) $y = e^{f(x)};$ | (6) $y = \lg f(x);$ |
| (7) $y = \operatorname{arccot} f(x).$ | |

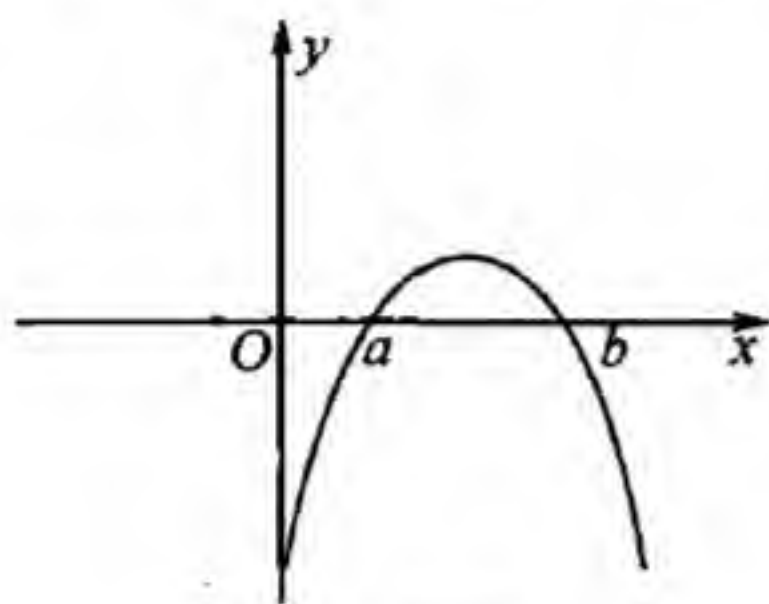
解 (1) $f(x) = -x^2 + (a+b)x - ab$

$$= -\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

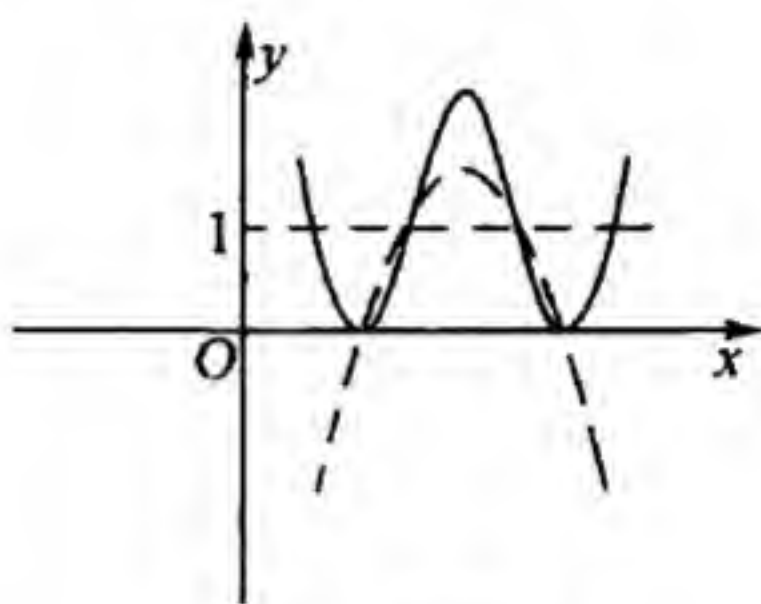
所以 $y = f(x)$ 的图形为开口向下的抛物线, 顶点为

$\left(\frac{a+b}{2}, \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right)$, 如 329.1 题图 1 所示.

(2) 如 329.1 题图 2 所示, 其中虚线表 $y = f(x)$ 的图形, 实线表 $y = f^2(x)$ 的图形(设 $\frac{b-a}{2} > 1$).



329.1 题图 1



329.2 题图 2

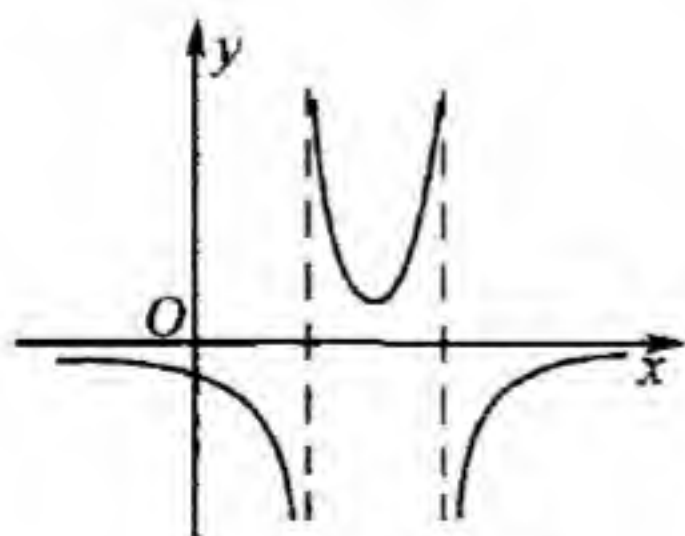
(3) 定义域为 $(-\infty, a) \cup (a, b) \cup (b, +\infty)$, 且

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{(x-a)(b-x)} \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{1}{x-a} - \frac{1}{b-a} \frac{1}{x-b} \end{aligned}$$

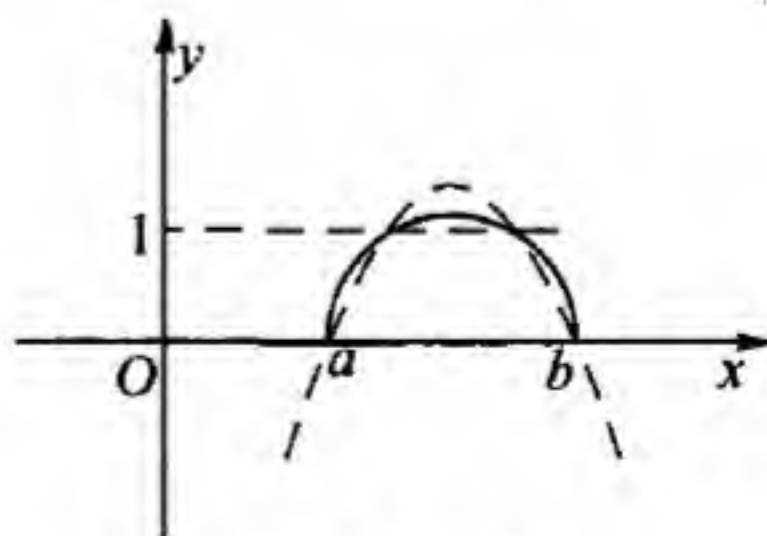
$y = 0, x = a$ 及 $x = b$ 为图形的渐近线.

函数的图形为 $y = \frac{1}{b-a} \frac{1}{x-a}$ 及 $y = -\frac{1}{b-a} \frac{1}{x-b}$ 的图形的叠加, 如 329.1 题图 3 所示.

(4) 定义域为 $[a, b]$, 如 329.1 题图 4 所示, 虚线表 $y = f(x)$ 的图形, 实线表 $y = \sqrt{f(x)}$ 的图形(设 $\frac{b-a}{2} > 1$).



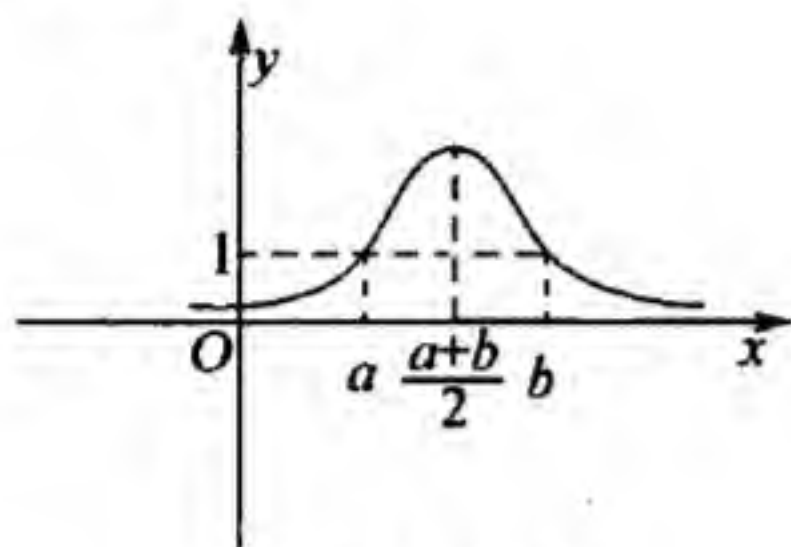
329.1 题图 3



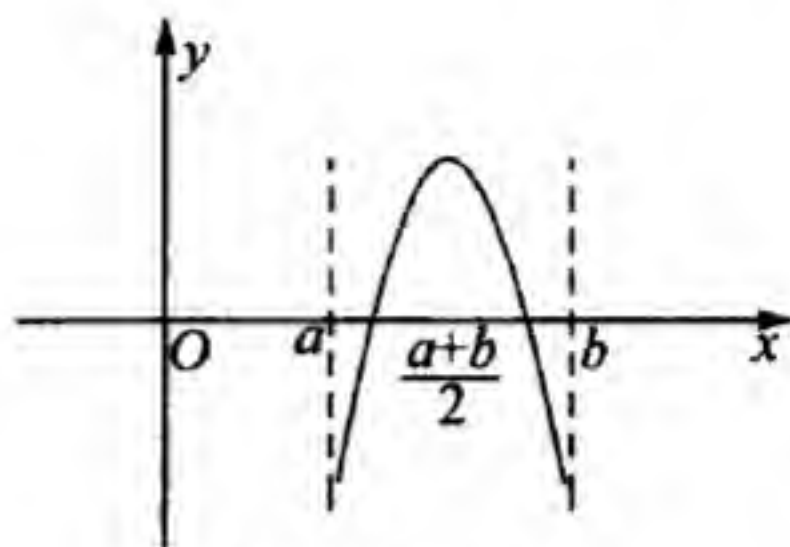
329.2 题图 4

(5) 如 329.1 题图 5 所示.

(6) 存在域 (a, b) , $x = a$ 及 $x = b$ 为图形的渐近线, 如 329.1 题图 6 所示.

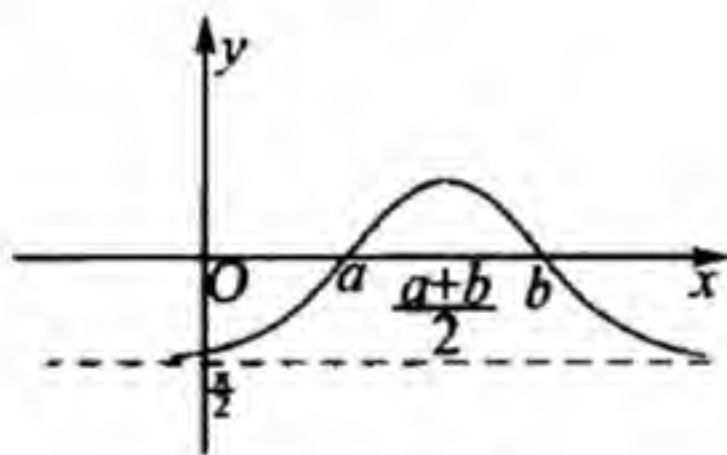


329.1 题图 5



329.2 题图 6

(7) 如 329.1 题图 7 所示.



329.1 题图 7

【329.2】 作出下列各函数在: (a) $f(x) = x^2$, (b) $f(x) = x^3$ 时的图形:

(1) $y = \arcsin[\sin f(x)]$;

(2) $y = \arcsin[\cos f(x)]$;

(3) $y = \arccos[\sin f(x)]$;

(4) $y = \arccos[\cos f(x)]$;

(5) $y = \arctan[\tan f(x)]$.

解 (1) (a) 当 $0 \leq x^2 \leq \frac{\pi}{2}$, 即 $-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 时, $y = x^2$.

当 $\frac{\pi}{2} \leq x^2 \leq \frac{3\pi}{2}$, 即 $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leq |x| \leq \sqrt{\frac{3\pi}{2}}$ 时, $y = \pi - x^2$.

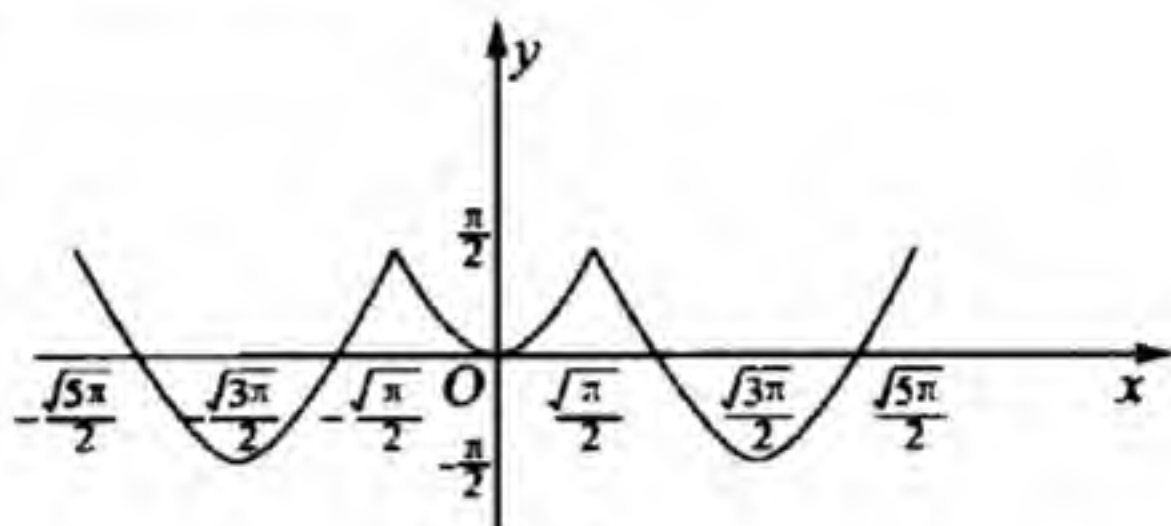
一般地, 当 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x^2 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时,

$$y = x^2 - 2k\pi \quad (k = 1, 2, \dots).$$

当 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x^2 \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 时,

$$y = (\pi - x^2) + 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

如 329.2 题图 1(a) 所示.



329.2 题图 1(a)

(b) 当 $-\frac{\pi}{2} \leq x^3 \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $-\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \leq x \leq \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$, $y = x^3$.

当 $\frac{\pi}{2} \leq x^3 \leq \frac{3\pi}{2}$ 时, 即 $\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \leq x \leq \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}}$, $y = \pi - x^3$.

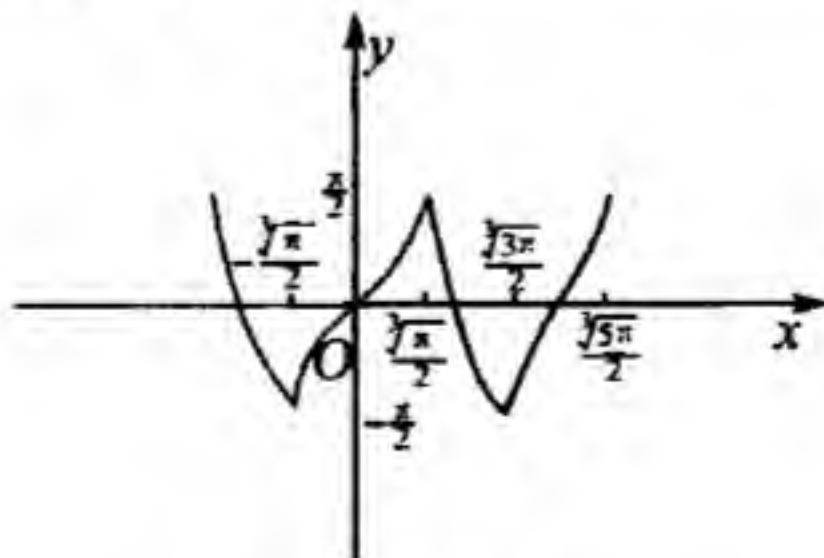
一般地, 当 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x^3 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时,

$$y = x^3 - 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

当 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x^3 \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 时,

$$y = (\pi - x^3) + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

如 329.2 题图 1(b) 所示.



329.2 题图 1(b)

(2) (a) 当 $0 \leq x^2 \leq \pi$, 即 $-\sqrt{\pi} \leq x \leq \sqrt{\pi}$ 时,

$$y = \frac{\pi}{2} - x^2.$$

当 $\pi \leq x^2 \leq 2\pi$, 即 $\sqrt{\pi} \leq |x| \leq \sqrt{2\pi}$ 时,

$$y = x^2 - \frac{3\pi}{2} = \left(\frac{\pi}{2} + x^2\right) - 2\pi.$$

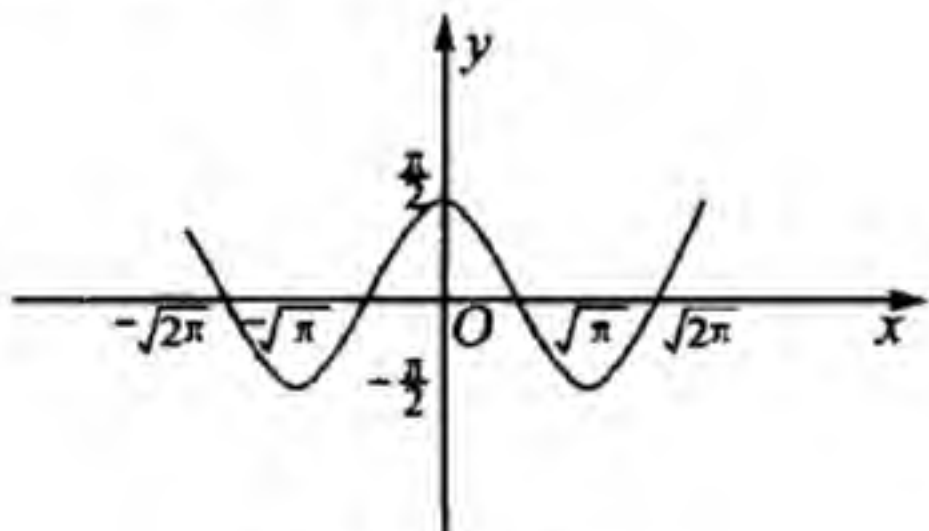
一般地, 当 $(2k-1)\pi \leq x^2 \leq 2k\pi$ 时,

$$y = \left(\frac{\pi}{2} + x^2\right) - 2k\pi \quad (k = 1, 2, \dots).$$

当 $2k\pi \leq x^2 \leq (2k+1)\pi$ 时,

$$y = \left(\frac{\pi}{2} - x^2\right) + 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

如 329.2 题图 2(a) 所示.



329.2 题图 2(a)

(b) 当 $-\pi \leq x^3 \leq 0$ 时, 即

$$-\sqrt[3]{\pi} \leq x \leq 0, \quad y = \frac{\pi}{2} + x^3.$$

当 $0 \leq x^3 \leq \pi$ 时, 即 $0 \leq x \leq \sqrt[3]{\pi}$, $y = \frac{\pi}{2} - x^3$.

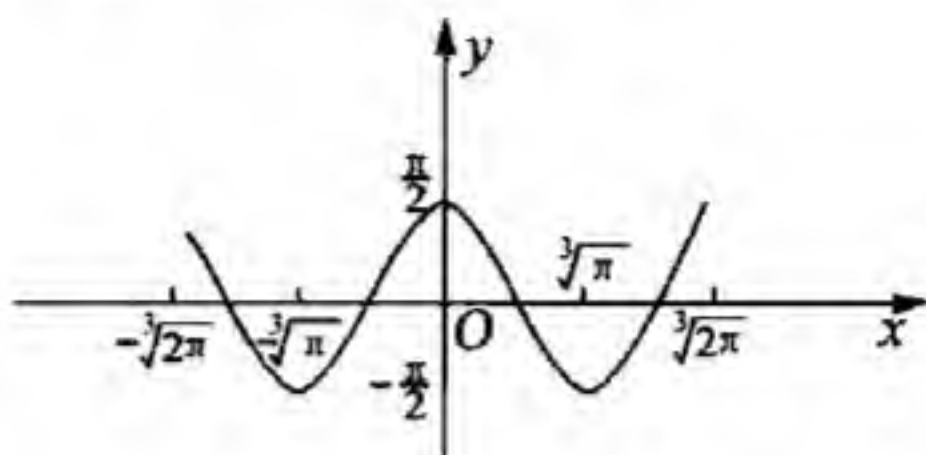
一般地, 当 $(2k-1)\pi \leq x^3 \leq 2k\pi$ 时,

$$y = \left(\frac{\pi}{2} + x^3\right) - 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

当 $2k\pi \leq x^3 \leq (2k+1)\pi$ 时,

$$y = \left(\frac{\pi}{2} - x^3\right) + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

如 329.2 题图 2(b) 所示.



329.2 题图 2(b)

$$(3) (a) \cos y = \sin f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - f(x)\right),$$

且 $0 \leq y \leq \pi$.

$$\text{当 } 0 \leq x^2 \leq \frac{\pi}{2} \text{ 时, } y = \frac{\pi}{2} - x^2;$$

$$\text{当 } \frac{\pi}{2} \leq x^2 \leq \frac{3\pi}{2} \text{ 时, } y = x^2 - \frac{\pi}{2};$$

$$\text{当 } \frac{3\pi}{2} \leq x^2 \leq \frac{5\pi}{2} \text{ 时, } y = \frac{\pi}{2} - x^2 + 2\pi;$$

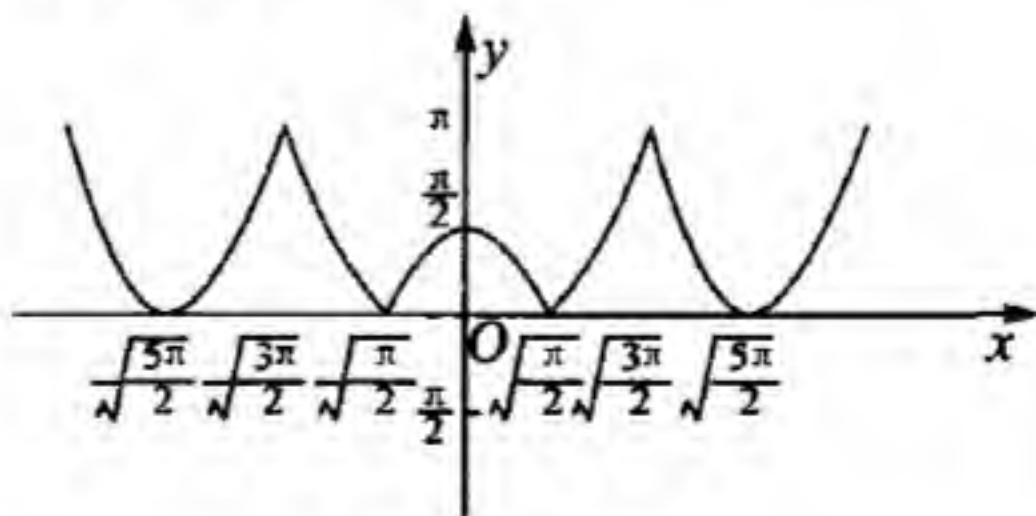
一般地, 当 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x^2 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时,

$$y = \frac{\pi}{2} - x^2 + 2k\pi \quad (k = 1, 2, \dots);$$

当 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x^2 \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 时,

$$y = x^2 - \frac{\pi}{2} - 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

如 329.2 题图 3(a) 所示.



329.2 题图 3(a)

(b) 当 $-\frac{\pi}{2} \leq x^3 \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $y = \frac{\pi}{2} - x^3$;

当 $\frac{\pi}{2} \leq x^3 \leq \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = x^3 - \frac{\pi}{2}$.

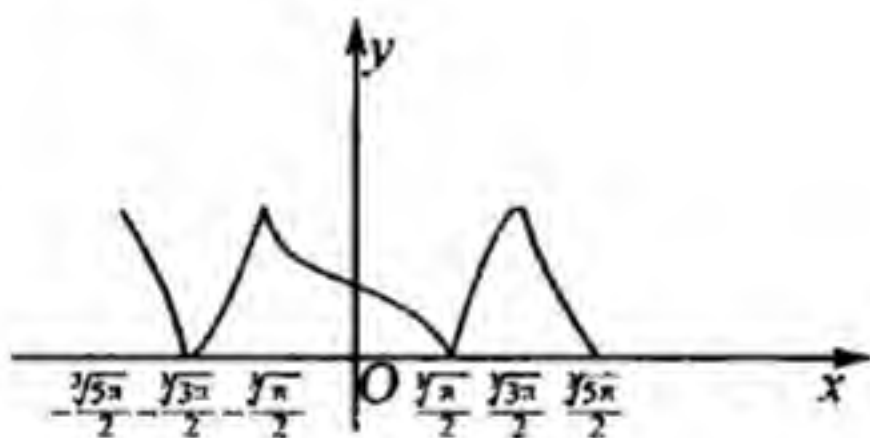
一般地, 当 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x^3 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时,

$$y = \frac{\pi}{2} - x^3 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

当 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x^3 \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 时,

$$y = x^3 - \frac{\pi}{2} - 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

如 329.2 题图 3(b) 所示.



329.2 题图 3(b)

(4) (a) 当 $0 \leq x^2 \leq \pi$, 即 $-\sqrt{\pi} \leq x \leq \sqrt{\pi}$ 时, $y = x^2$, 当 $\pi \leq x^2 \leq 2\pi$ 时

$$y = 2\pi - x^2.$$

一般地, 当 $(2k-1)\pi \leq x^2 \leq 2k\pi$ 时,

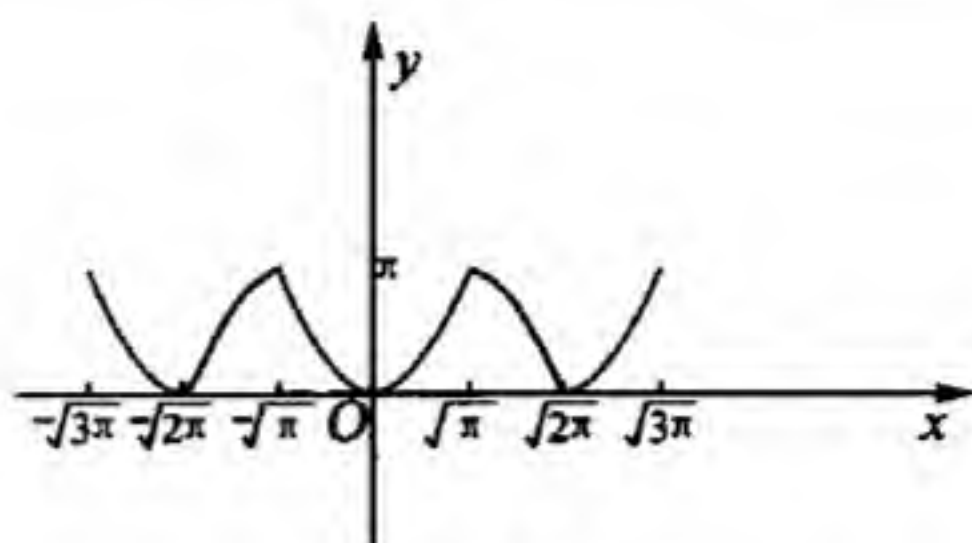
$$y = 2k\pi - x^2 \quad (k = 1, 2, \dots);$$

当 $2k\pi \leq x^2 \leq (2k+1)\pi$ 时,

$$y = x^2 - 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

y 的零点为 $x = \pm \sqrt{2k\pi}$. 而 $\lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt{2(k+1)\pi} - \sqrt{2k\pi}) = 0$

所以当 x 趋于无穷时, 零点越来越密集, 即 y 的图形的振动越来越频密, 如 329.2 题图 4(a) 所示.



329.2 题图 4(a)

(b) 当 $0 \leq x^3 \leq \pi$ 时, $y = x^3$;

当 $\pi \leq x^3 \leq 2\pi$ 时, $y = 2\pi - x^3$;

当 $-\pi \leq x^3 \leq 0$ 时, $y = -x^3$.

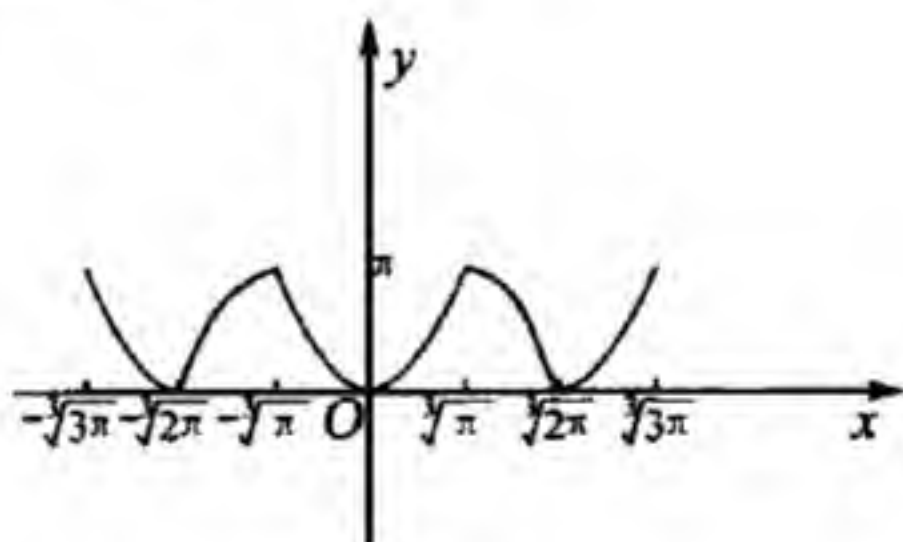
一般地, 当 $(2k-1)\pi \leq x^3 \leq 2k\pi$ 时,

$$y = 2k\pi - x^3 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

当 $2k\pi \leq x^3 \leq (2k+1)\pi$ 时,

$$y = x^3 - 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

如 329.2 题图 4(b) 所示.



329.2 题图 4(b)

(5) (a) 当 $0 < x^2 < \frac{\pi}{2}$, 即 $-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 时,

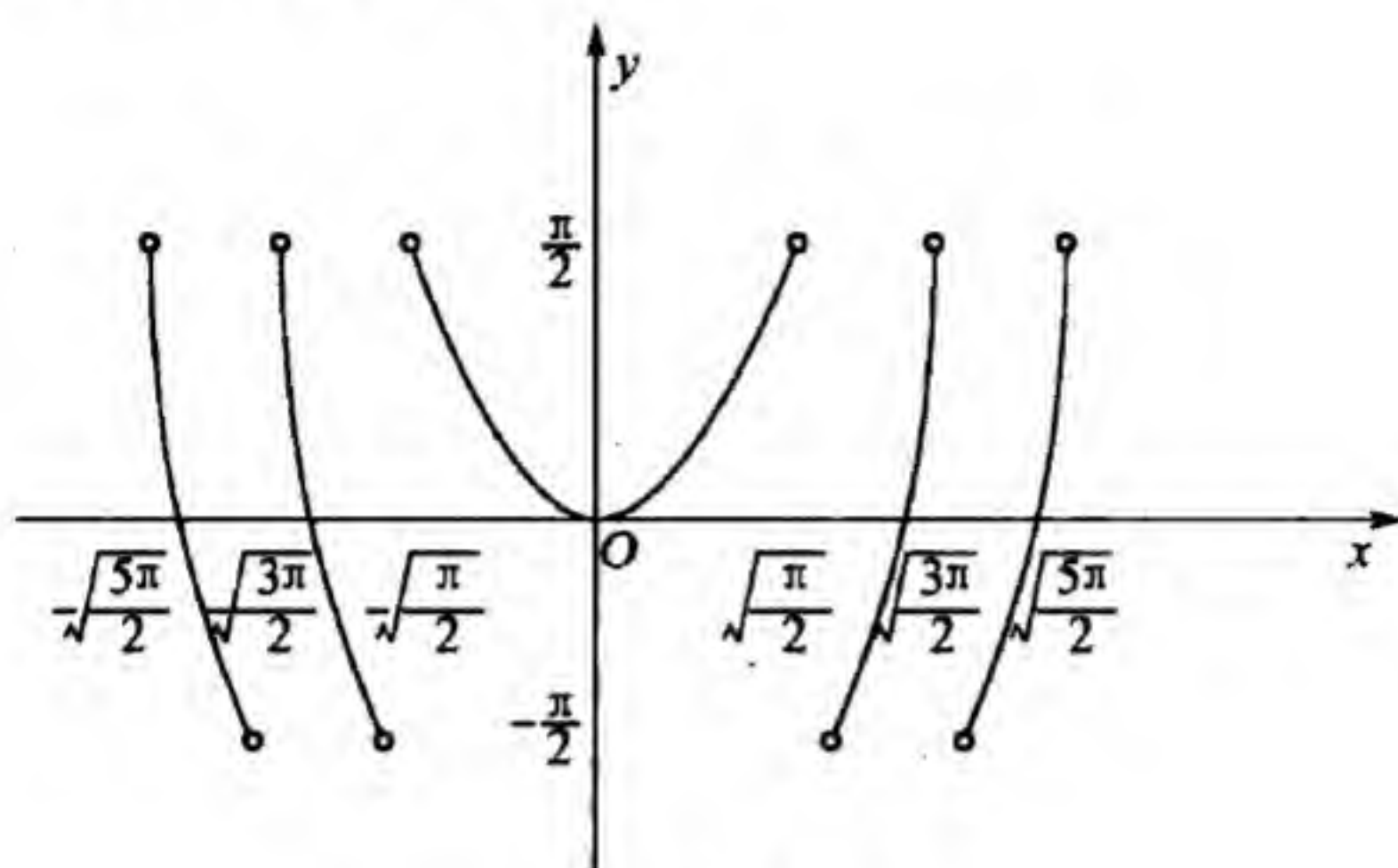
$$y = x^2,$$

当 $\frac{\pi}{2} < x^2 < \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = x^2 - \pi$;

当 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x^2 < \frac{\pi}{2} + k\pi$ 时,

$$y = x^2 - k\pi \quad (k = 1, 2, \dots).$$

如 329.2 题图 5(a) 所示.



329.2 题图 5(a)

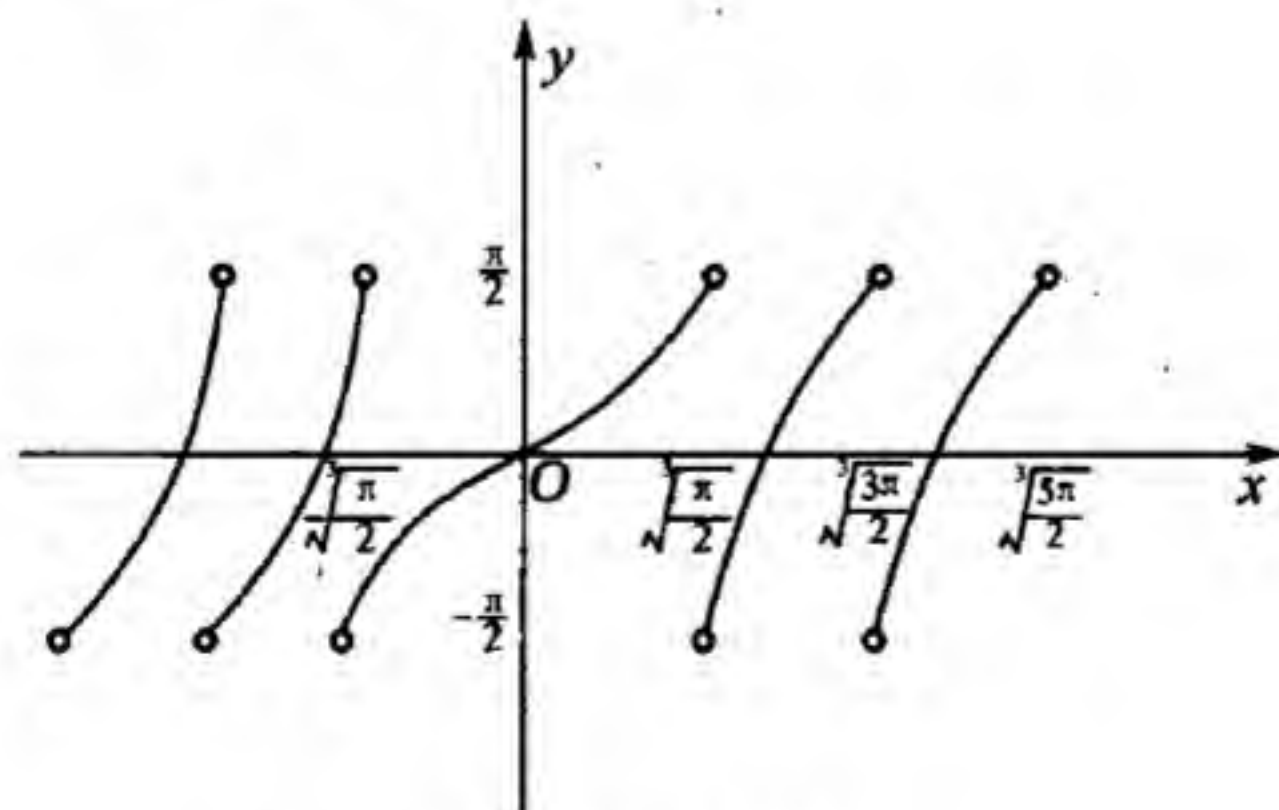
(b) 当 $-\frac{\pi}{2} < x^3 < \frac{\pi}{2}$ 时, $y = x^3$;

当 $\frac{\pi}{2} < x^3 < \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = x^3 - \pi$.

一般地, 当 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ 时,

$$y = x - k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

如 329.2 题图 5(b) 所示.

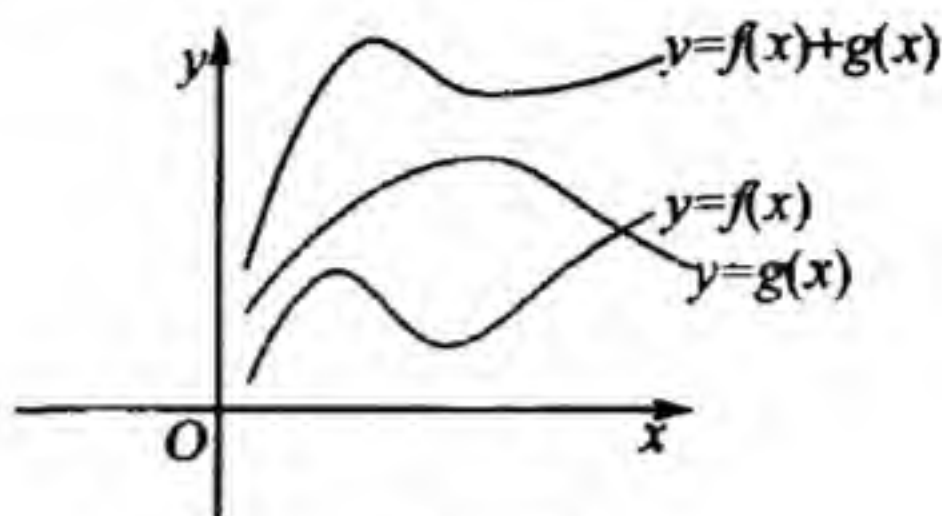


329.2 题图 5(b)

【330】 已知函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图形, 作出以下函数的图形:

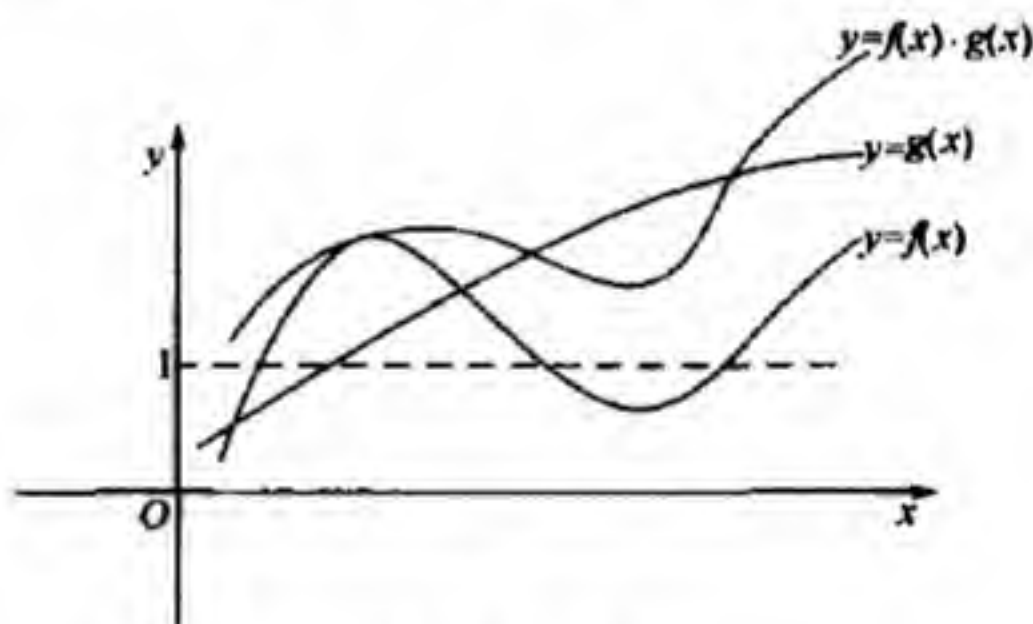
(1) $y = f(x) + g(x)$; (2) $y = f(x)g(x)$; (3) $y = f(g(x))$.

解 (1) 利用图形相加法即得如 330 题图 1 所示.



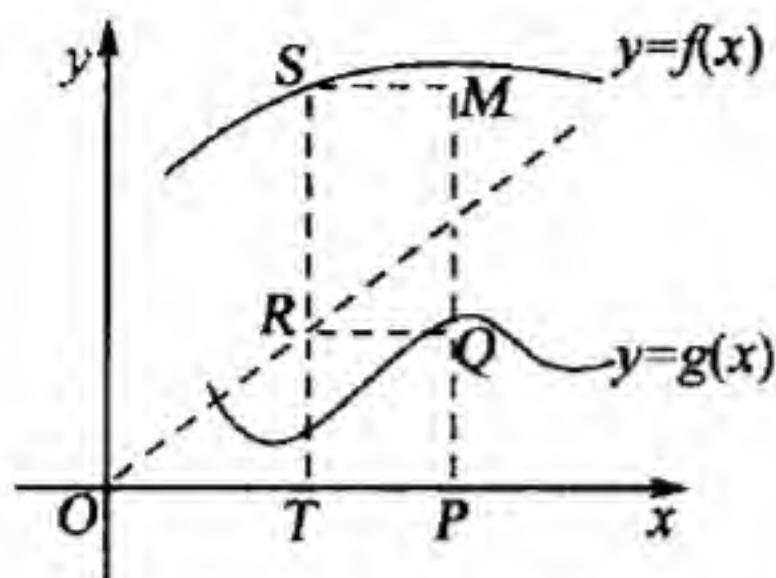
330 题图 1

(2) 利用图形相乘法即, 如 330 题图 2 所示.

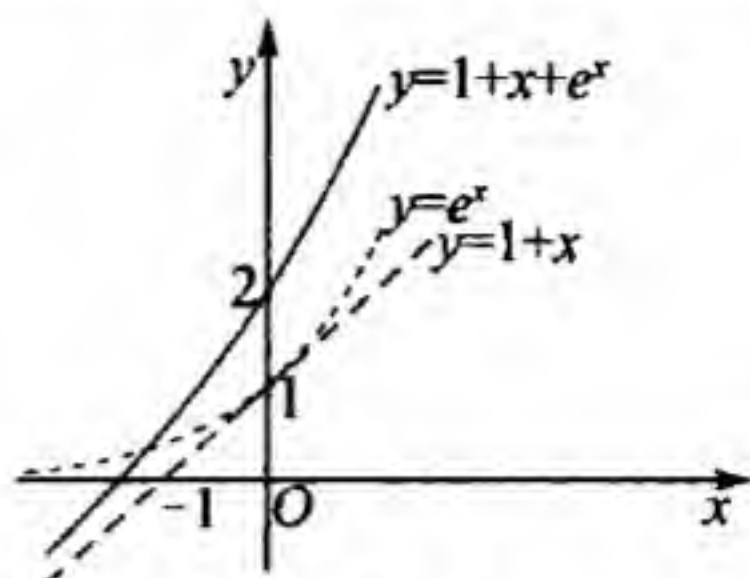


330 题图 2

(3) 设 P 点是 Ox 轴上横坐标为 x 的点. 通过 P 点引垂直于 Ox 轴的直线. 它和 $y = g(x)$ 的图形相交于 Q 点 (设定值 PQ 在 $f(x)$ 的存在域内). 则 $PQ = g(x)$, 过 Q 点作平行于 Ox 轴的直线, 它与 $y = x$ 交于 R 点, 过 R 点作垂直于 Ox 轴的直线. 它与 Ox 轴及 $y = f(x)$ 的图形的交点分别为 T 与 S , 则 $OT = TR = PQ = g(x)$, 因而, $TS = f(g(x))$, 最后, 过 S 作垂直于直线 PQ 的直线, 交 PQ 于 M 点. M 点即为函数 $y = f(g(x))$ 图形上的一点. 对 $g(x)$ 落在 $f(x)$ 的定义域内的每点, 应用同样的方法, 即得 $y = f(g(x))$ 的图形.



330 题图 3



331 题图

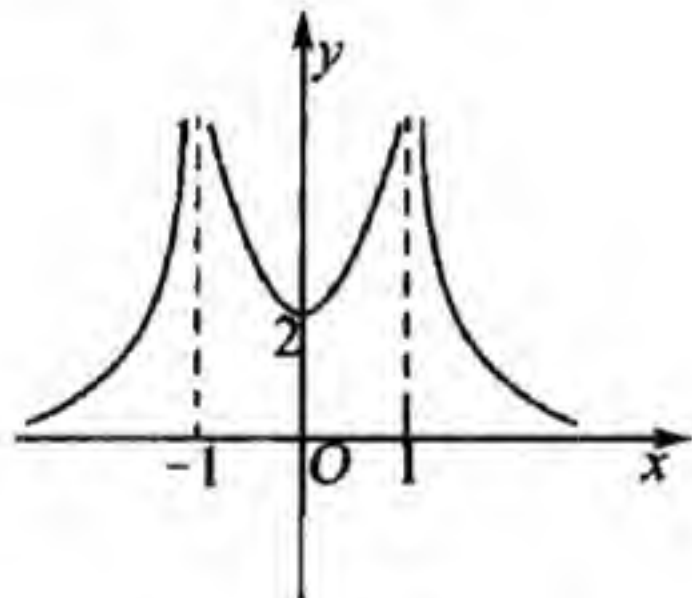
运用图形相加法,作出以下各函数的图形(331 ~ 339).

【331】 $y = 1 + x + e^x$.

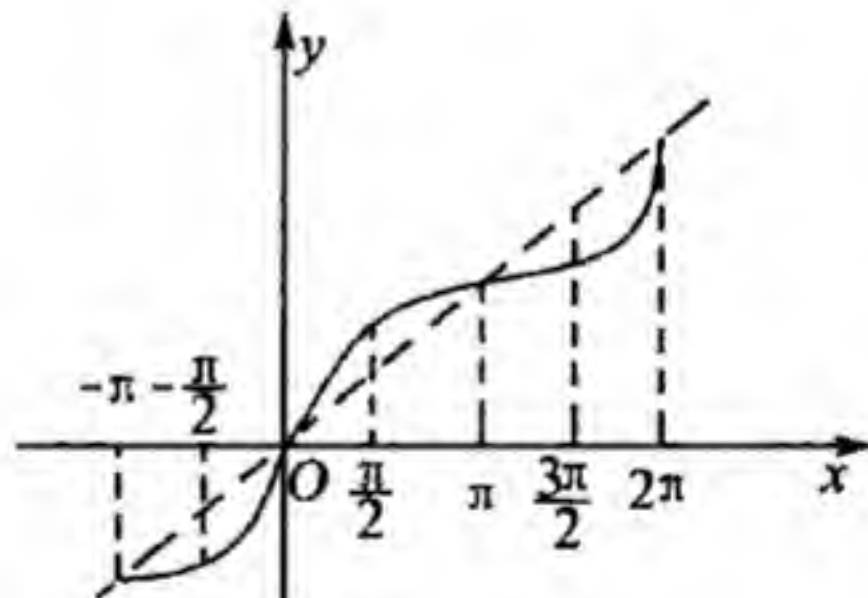
解 如 331 题图所示.

【332】 $y = (x+1)^{-2} + (x-1)^{-2}$.

解 图形关于 Oy 轴对称,且以 $y=0, x=-1$ 及 $x=1$ 为渐近线,如 332 题图所示.



332 题图



333 题图

【333】 $y = x + \sin x$.

解 如 333 题图所示.

【334】 $y = x + \arctan x$.

解 如 334 题图所示.

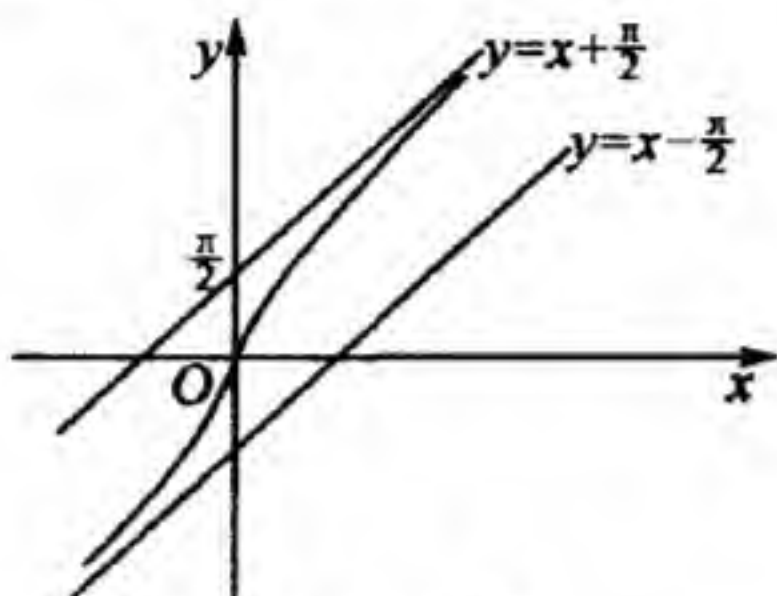
【335】 $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x$.

解 图形关于 Oy 轴对称,又

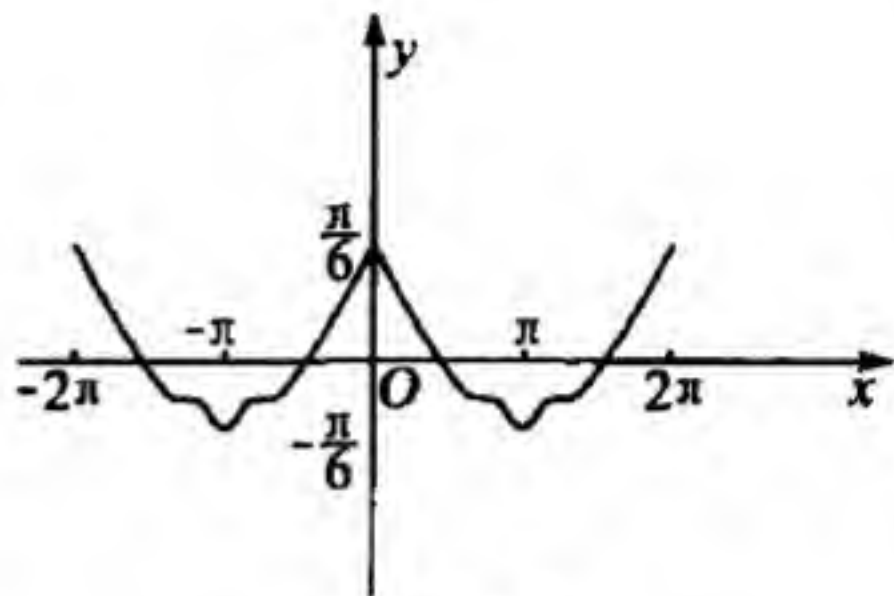
$$\cos(2k\pi - x) + \frac{1}{2} \cos 2(2k\pi - x) + \frac{1}{3} \cos 3(2k\pi - x)$$

$$= \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x,$$

所以,图形关于直线 $x = k\pi$ 对称,函数是以 2π 为周期的函数,如 335 题图所示.



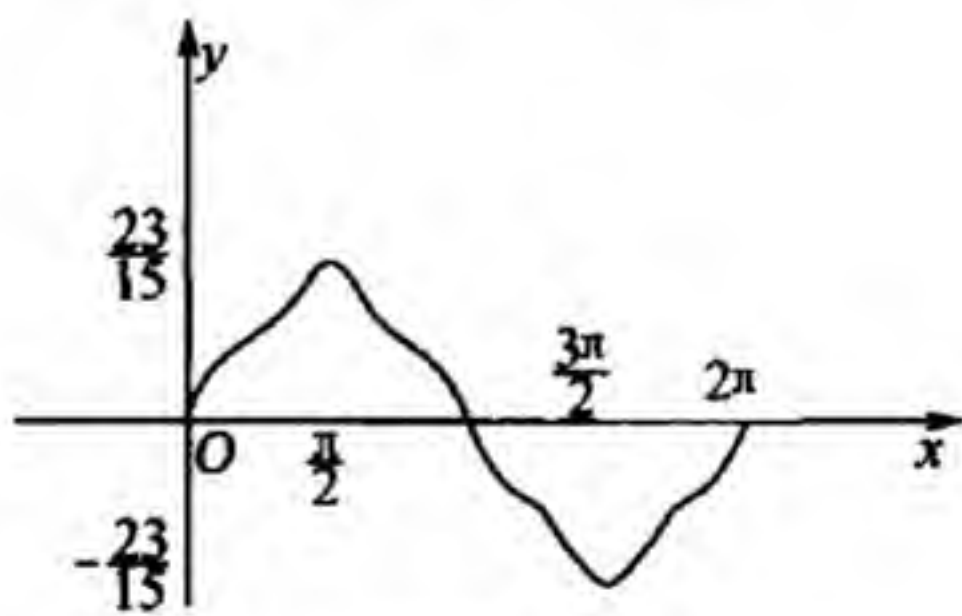
334 题图



335 题图

【336】 $y = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x.$

解 图形关于原点对称,且 y 是以 2π 为周期的周期函数,并且 $f(x + \pi) = -f(x)$,如 336 题图所示.

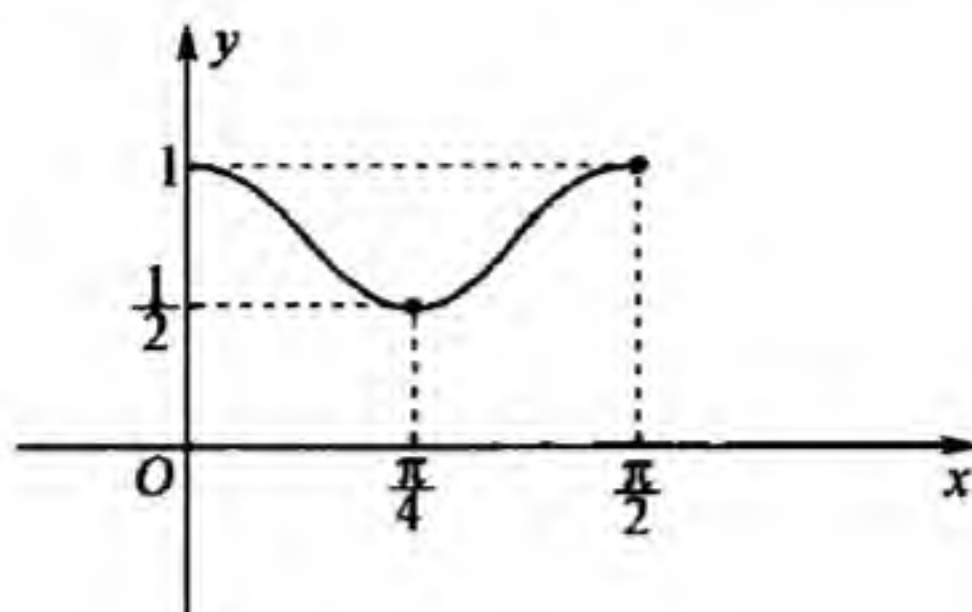


336 题图

【337】 $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

解 $y = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x,$

图形关于 Oy 轴对称,且函数以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期,在 $x = 0$ 及 $x = \frac{\pi}{2}$ 取极大值 1,在 $x = \frac{\pi}{4}$ 取极小值 $\frac{1}{2}$,如 337 题图.



337 题图

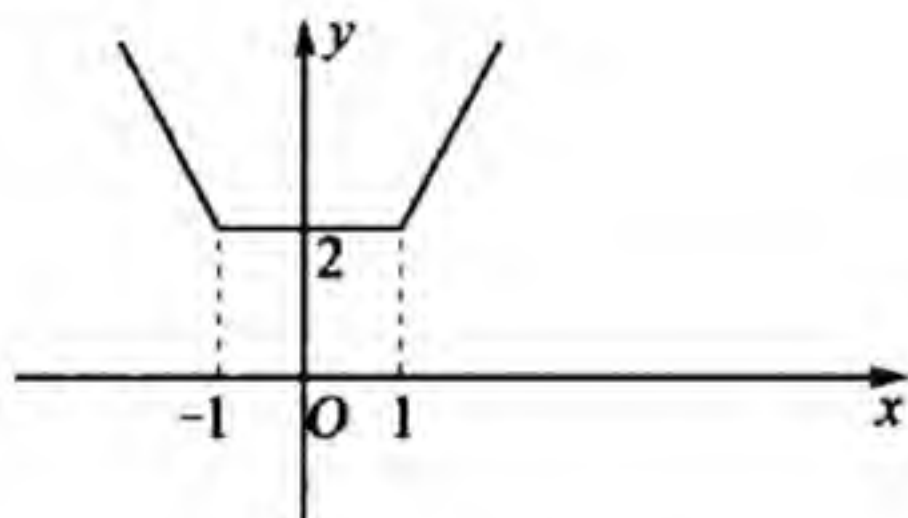
【338】 $y = |1 - x| + |1 + x|$.

解 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $y = 2$

当 $x < -1$ 时, $y = -2x$;

当 $x > 1$ 时, $y = 2x$.

如 338 题图所示.



338 题图

【339】 $y = |1 - x| - |1 + x|$.

解 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $y = -2x$;

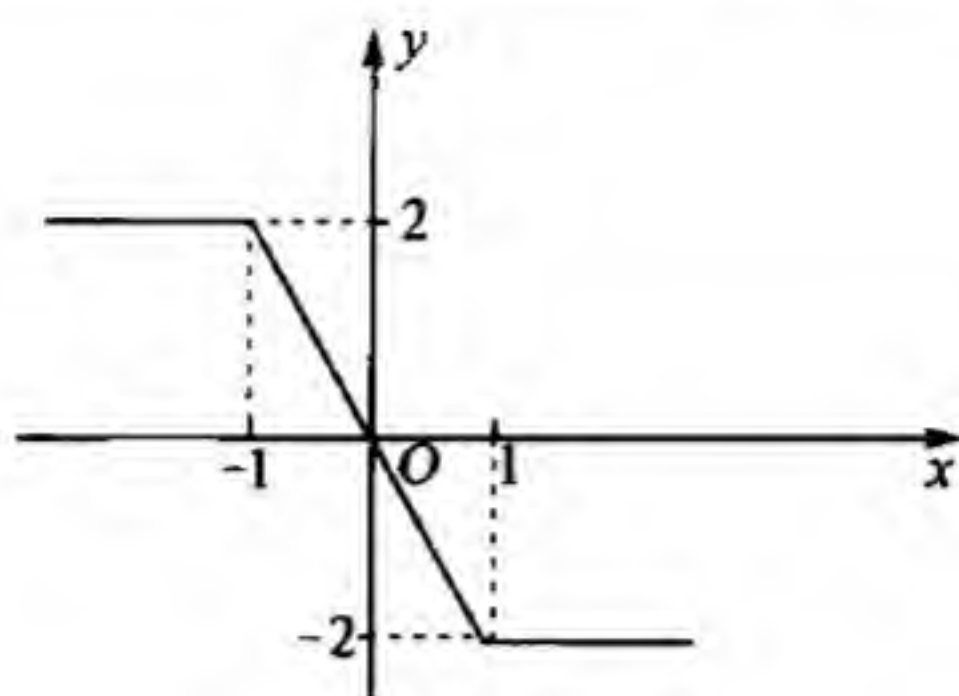
当 $x < -1$ 时, $y = 2$;

当 $x > 1$ 时, $y = -2$.

如 339 题图所示.

【340】 作出以下双曲线函数的图形:

(1) $y = \operatorname{ch} x$, 其中 $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$;



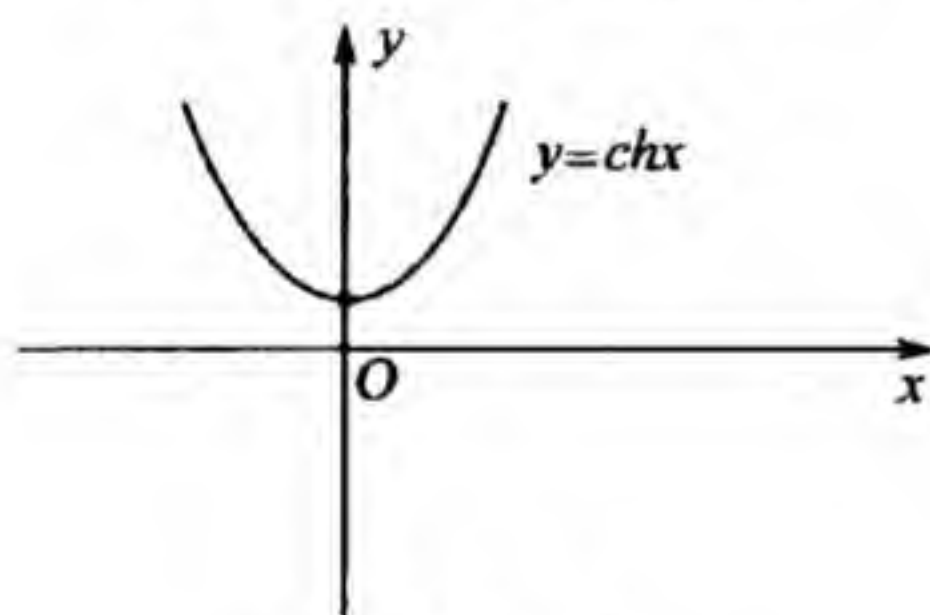
339 题图

(2) $y = \operatorname{sh} x$, 其中 $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$;

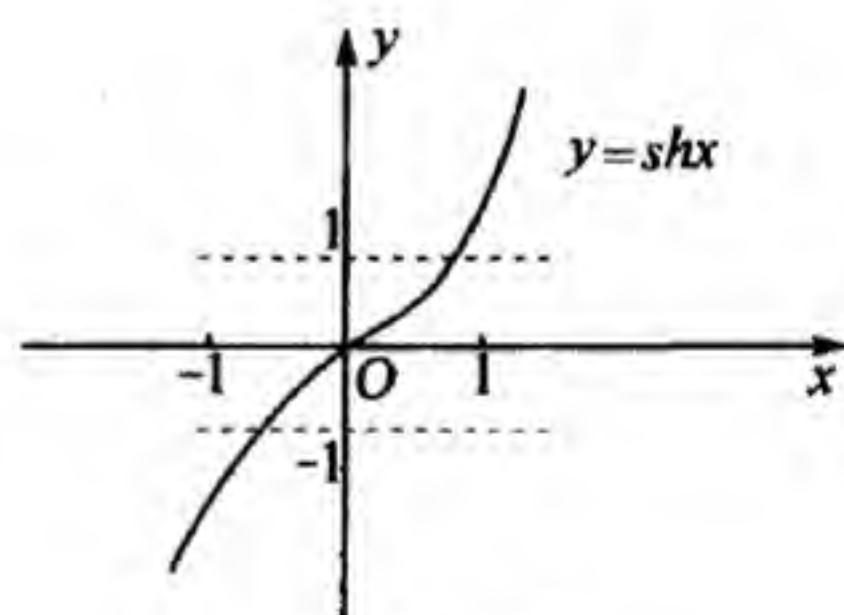
(3) $y = \operatorname{th} x$, 其中 $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

解 (1) 如 340 题图 1 所示.

(2) 如 340 题图 2 所示.



340 题图 1



340 题图 2

(3) 如 340 题图 3 所示.

运用图形相乘法, 作出以下函数的图形(341 ~ 348).

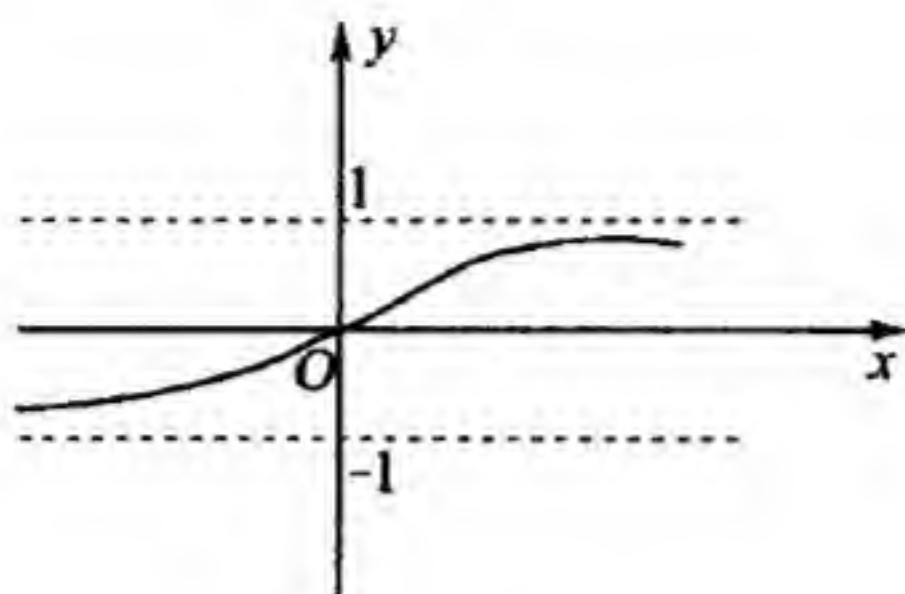
【341】 $y = x \sin x$.

解 图形关于 Oy 轴对称, 且

$$|x \sin x| \leq |x|$$

即图形夹在两直线 $y = x$ 和 $y = -x$ 之间.

当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$;

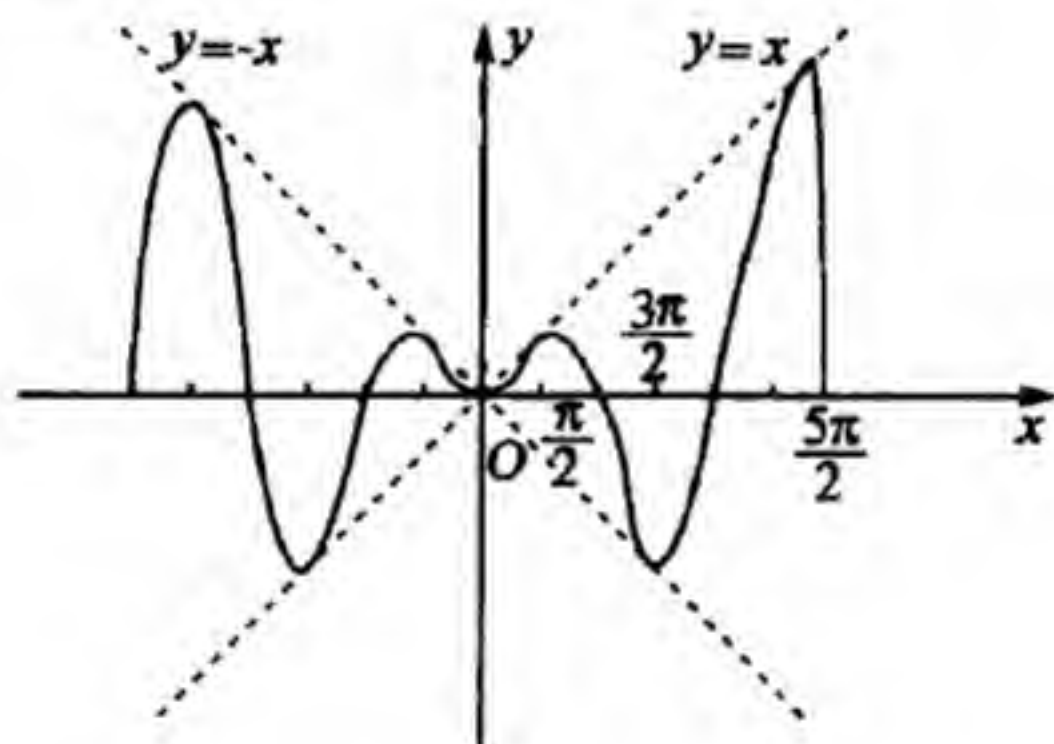


340 题图 3

当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $y = x$;

当 $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = -x$.

如 341 题图所示.



341 题图

【342】 $y = x \cos x$.

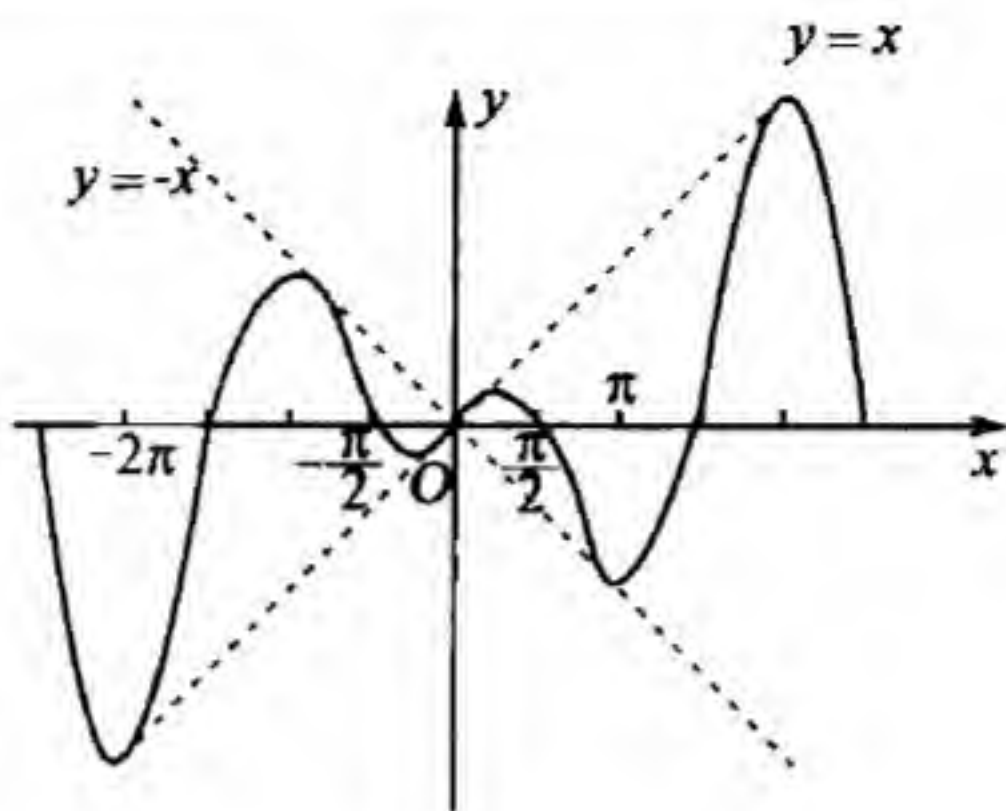
解 图形关于原点对称, 且夹在直线 $y = x$ 与 $y = -x$ 之间.

当 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 0$;

当 $x = 2k\pi$ 时, $y = x$;

当 $x = (2k+1)\pi$ 时, $y = -x$.

如 342 题图所示.



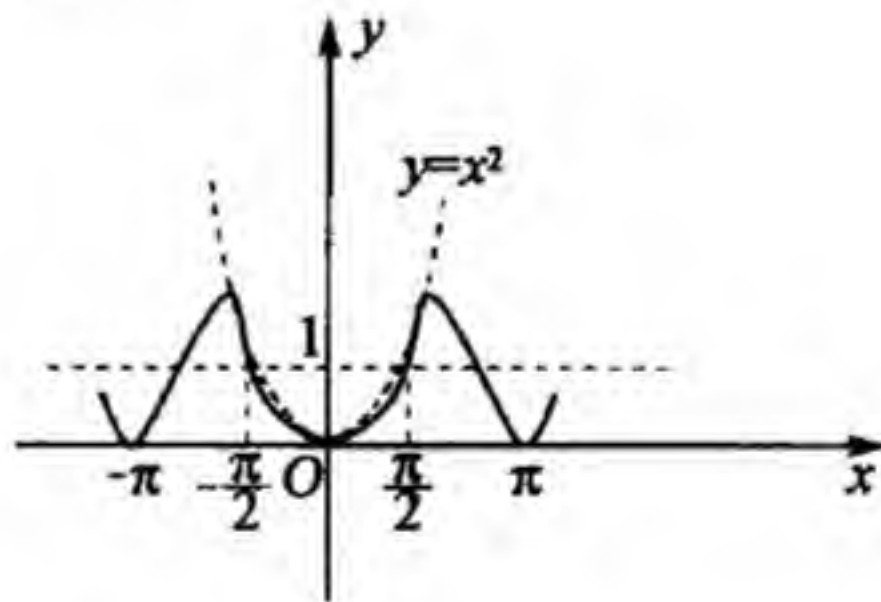
342 题图

【343】 $y = x^2 \sin^2 x$.

解 图形关于 Oy 轴对称, 且 $0 \leq y \leq x^2$
 当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$;

当 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $y = x^2$.

如 343 题图所示.



343 题图

【344】 $y = \frac{\sin x}{1+x^2}$.

解 图形关于原点对称, 且

$$-\frac{1}{1+x^2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

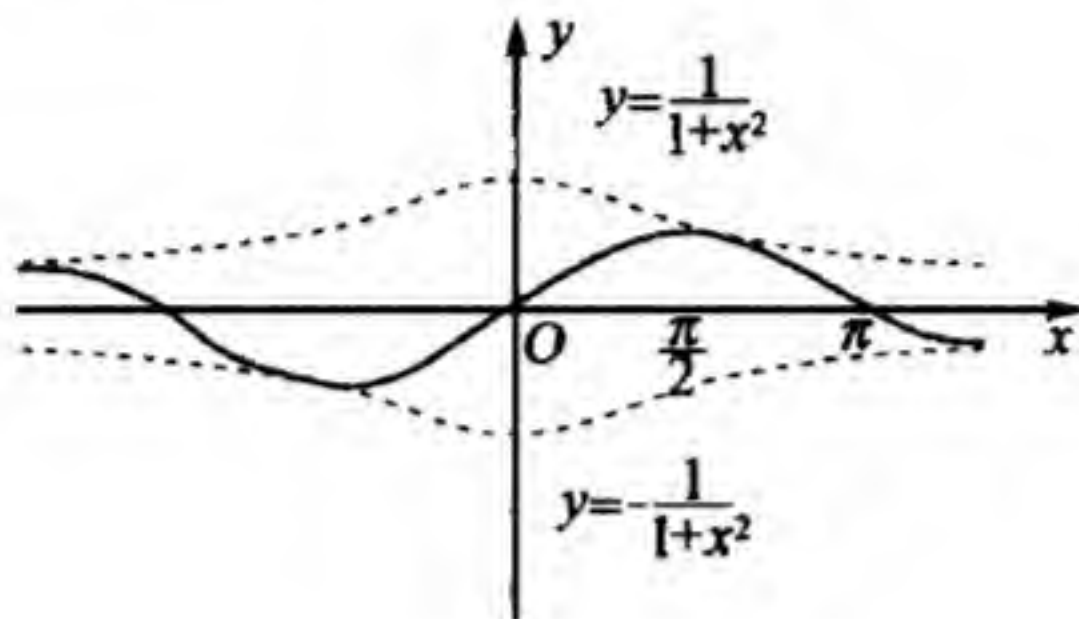
当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$;

当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $y = \frac{1}{1+x^2}$;

当 $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = -\frac{1}{1+x^2}$;

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$.

如 344 题图所示.



344 题图

【345】 $y = e^{-x^2} \cos 2x$.

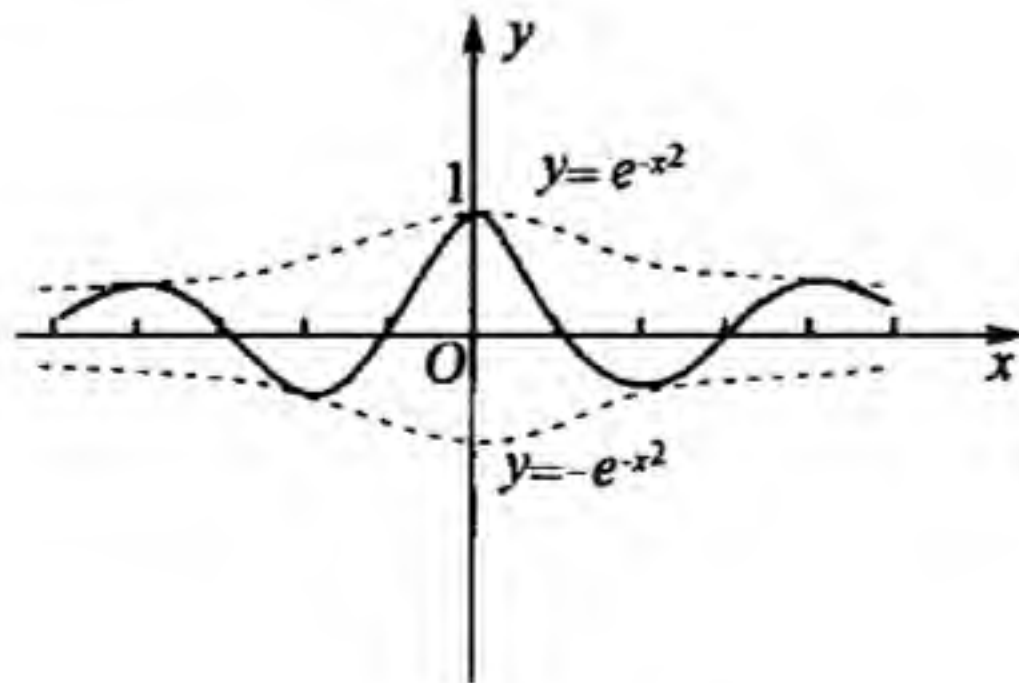
解 图形关于 Oy 轴对称, 且位于曲线 $y = e^{-x^2}$ 及 $y = -e^{-x^2}$ 之间.

当 $x = \frac{1}{2}(k\pi + \frac{\pi}{2})$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) 时, $y = 0$;

当 $x = \frac{1}{2}(2k+1)\pi$ 时, $y = -e^{-x^2}$;

当 $x = k\pi$ 时, $y = e^{-x^2}$.

如 345 题图所示.



345 题图

【346】 $y = x \operatorname{sgn}(\sin x)$.

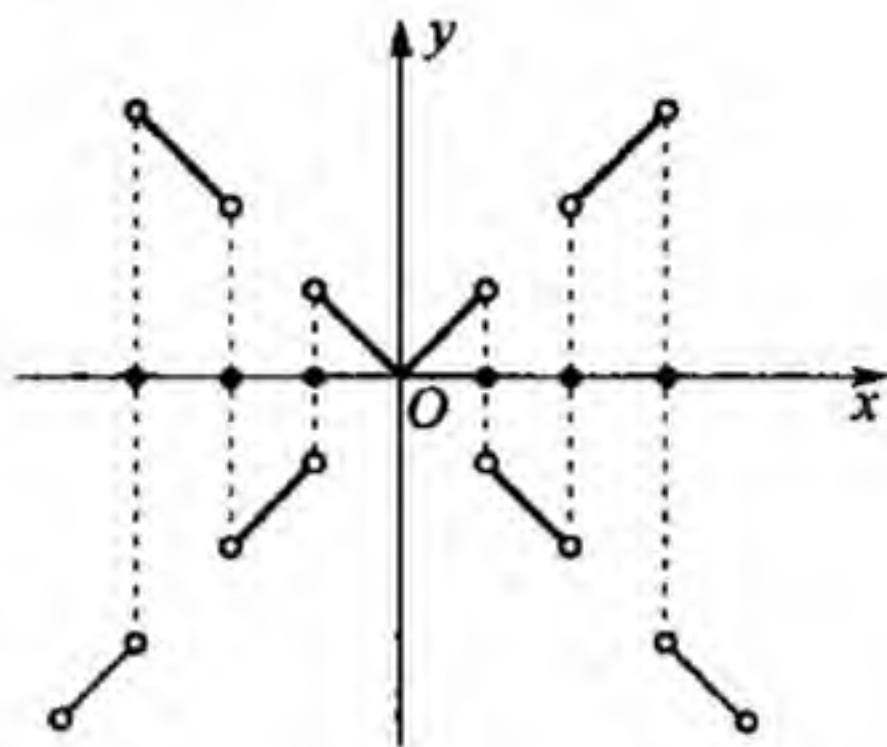
解 图形关于 Oy 轴对称.

当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \dots)$ 时, $y = 0$;

当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时, $y = x$;

当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时, $y = -x$.

如 346 题图所示.



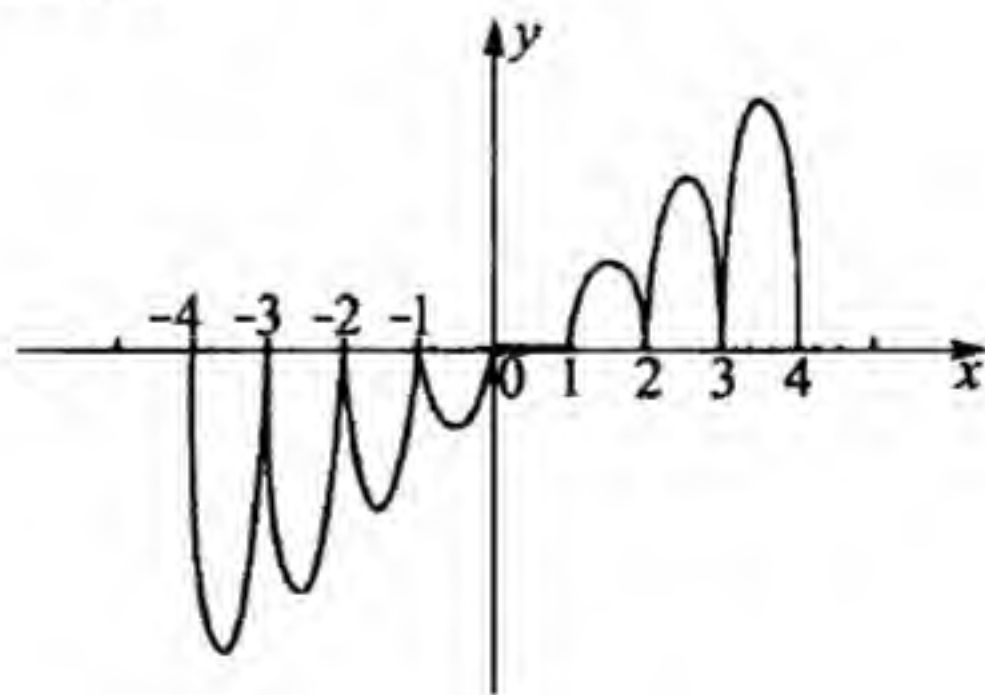
346 题图

【347】 $y = [x] |\sin \pi x|$.

解 当 $x = k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$

当 $k < x < k+1$ 时, $y = k \cdot |\sin \pi x|$.

如 347 题图所示.



347 题图

【348】 $y = \cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$.

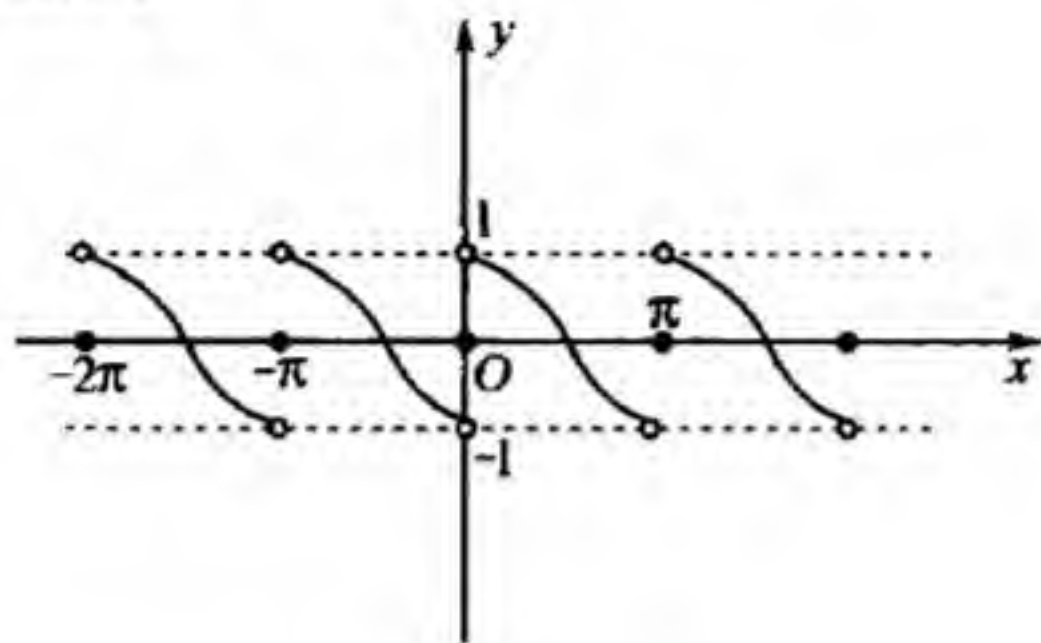
解 图形关于原点对称, 函数是以 π 为周期的周期函数.

当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$;

当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时, $y = \cos x$;

当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时, $y = -\cos x$.

如 348 题图所示.



348 题图

【349】 设

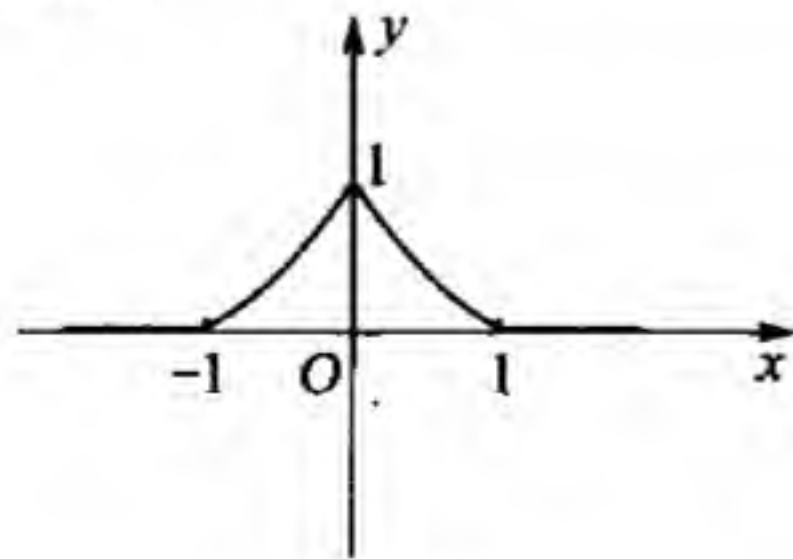
$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{若 } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

作出函数 $y = f(x)f(a-x)$, 当: (1) $a = 0$; (2) $a = 1$; (3) $a = 2$ 时的图形.

解 (1) $y = f(x)f(-x)$

$$= \begin{cases} (1+x)^2, & -1 \leq x < 0, \\ (1-x)^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

如 349 题图 1 所示.



349 题图 1

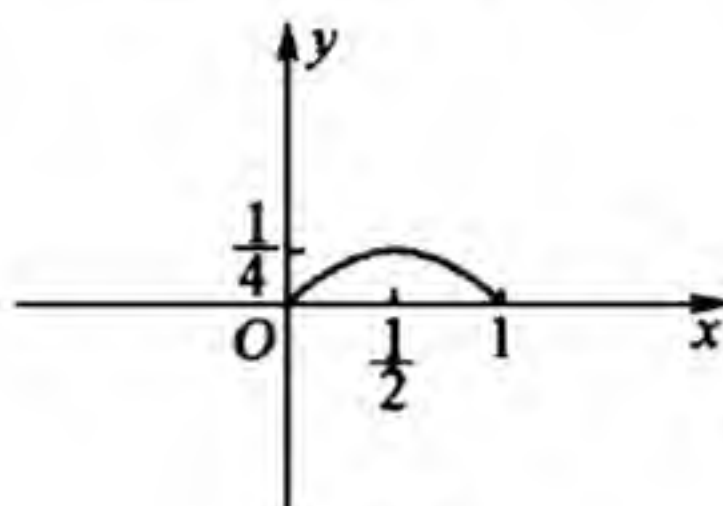
(2) $y = f(x)f(1-x)$

$$= \begin{cases} x - x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

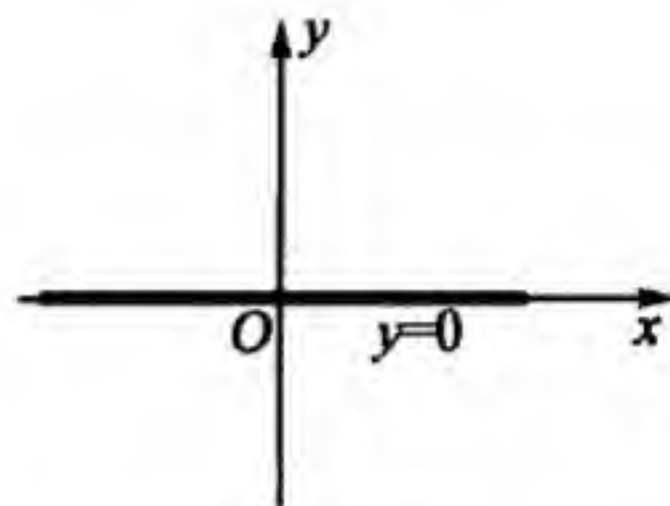
如 349 题图 2 所示.

$$(3) y = f(x)f(2-x) \equiv 0$$

如 349 题图 3 所示.



349 题图 2



349 题图 3

【350】 作出函数 $y = x + \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$ 的图形.

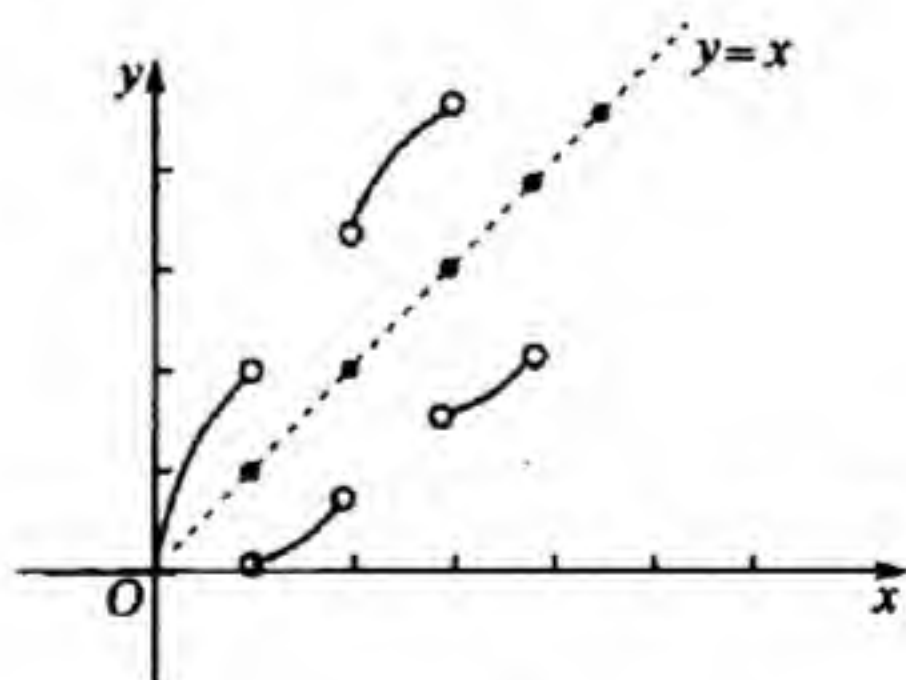
解 定义域为 $x \geq 0$.

当 $2k < x < 2k+1$ 时, $y = x + \sqrt{x}$;

当 $2k+1 < x < 2k+2$ 时, $y = x - \sqrt{x}$;

当 $x = k$ 时, $y = x (k = 0, 1, 2, \dots)$.

如 350 题图所示.



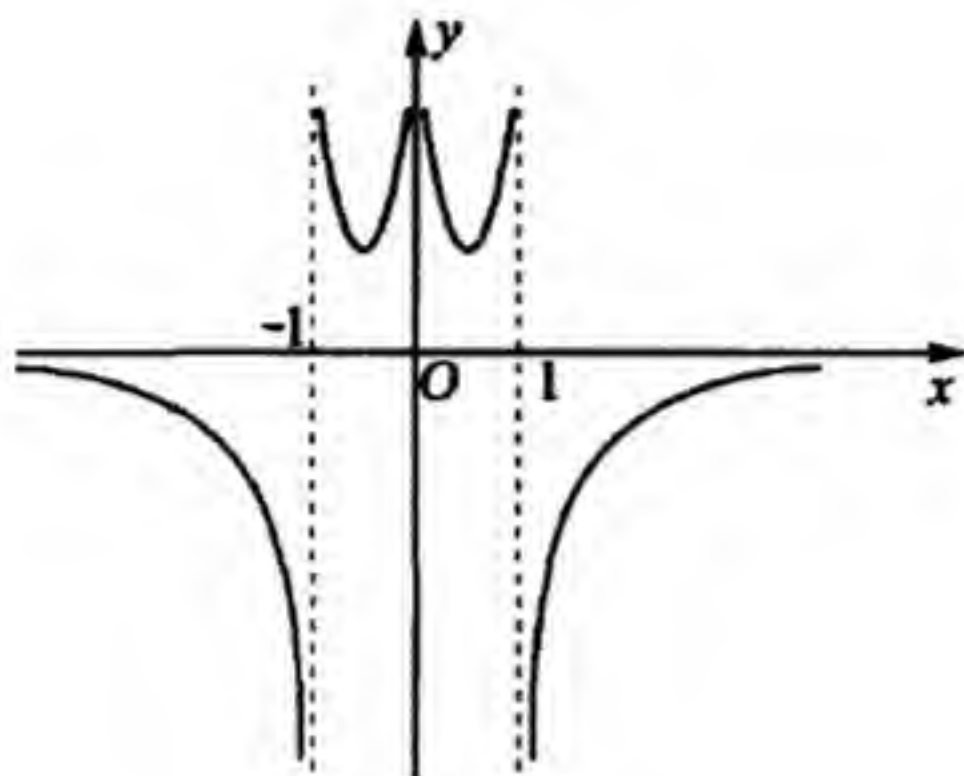
350 题图

作出函数 $y = \frac{1}{f(x)}$ 的图形, 设 (351 ~ 355).

【351】 $f(x) = x^2(1-x^2)$.

解 $y = \frac{1}{x^2(1-x^2)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2}.$

利用图形相加法, 将 $y = \frac{1}{x^2}$ 及 $y = \frac{1}{1-x^2}$ 的图形相加即得. 如 351 题图所示.



351 题图

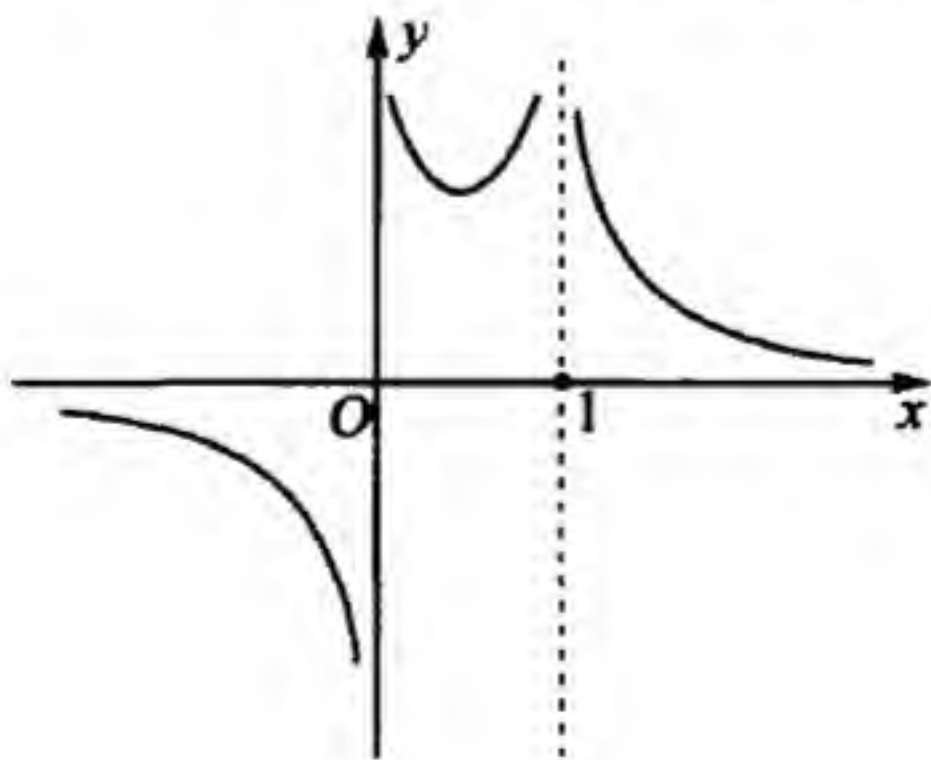
【352】 $f(x) = x(1-x)^2.$

解 $y = \frac{1}{x(1-x)^2};$

定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty).$

当 $x > 0$ 时, $y > 0$; 当 $x < 0$ 时, $y < 0$.

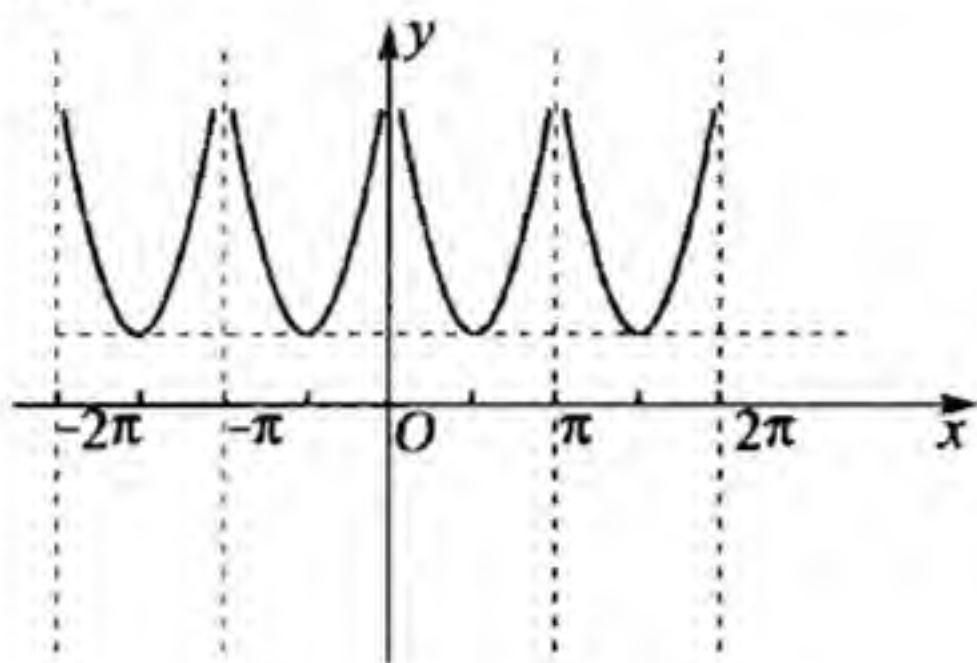
图形以 $x = 0, x = 1$ 及 $y = 0$ 为渐近线. 如 352 题图所示.



352 题图

【353】 $f(x) = \sin^2 x$.

解 $y = \frac{1}{\sin^2 x}$ 是一周期为 π 的周期函数. 图形关于 Oy 轴对称. 如 353 题图所示.



353 题图

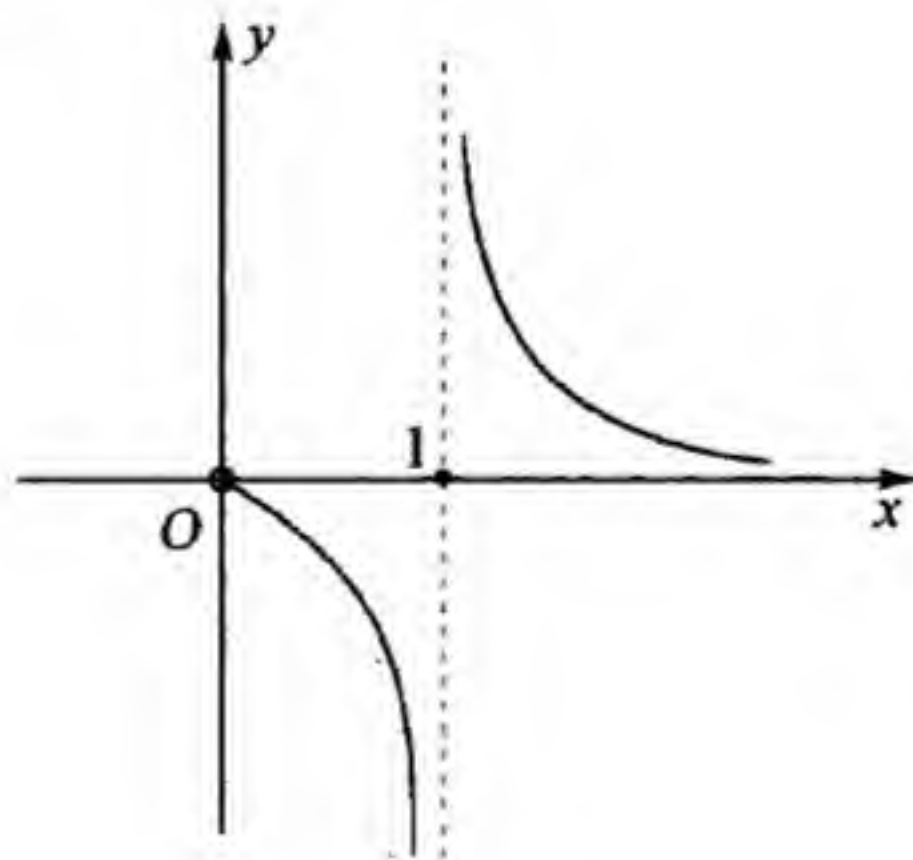
【354】 $f(x) = \ln x$.

解 $y = \frac{1}{\ln x}$.

当 $0 < x < 1$ 时, y 由 0 单调下降到 $-\infty$;

当 $1 < x < +\infty$ 时, y 由 $+\infty$ 单调下降到 0.

如 354 题图所示.



354 题图

【355】 $f(x) = e^x \sin x$.

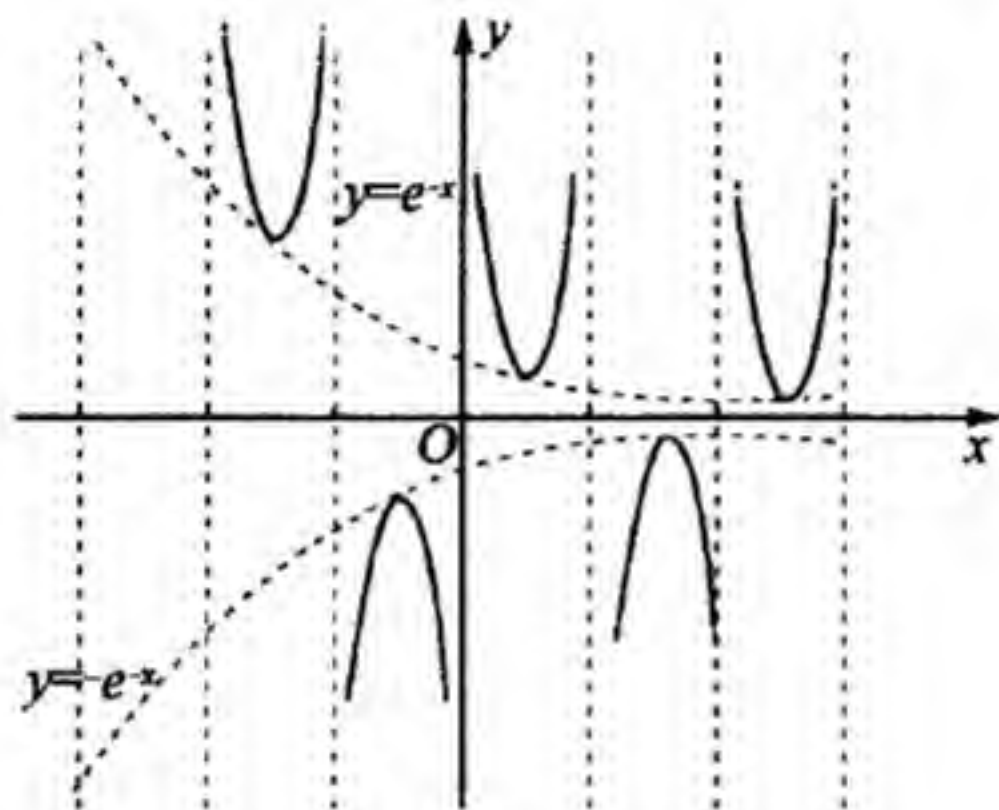
解 $y = e^{-x} \csc x \quad |y| \geq e^{-x},$

当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $y = e^{-x}$;

当 $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = -e^{-x}$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

利用图形的相乘法即得函数的图形. 如 355 题图所示.



355 题图

【356】 作出复合函数 $y = f(u)$ 的图形 (其中 $u = 2\sin x$). 设:

$$f(u) = \begin{cases} -1, & \text{当 } -\infty < u < -1 \text{ 时,} \\ u, & \text{当 } -1 \leq u \leq 1 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } 1 < u < +\infty \text{ 时.} \end{cases}$$

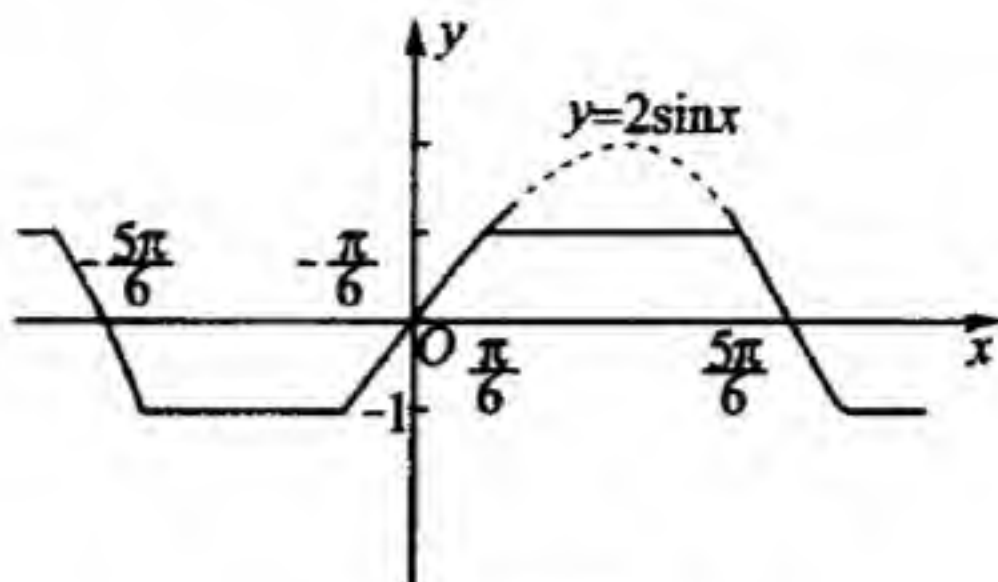
解 当 $|x - k\pi| \leq \frac{\pi}{6}$ 时, $y = 2\sin x$;

当 $2k\pi + \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ 时, $y = 1$;

当 $(2k-1)\pi + \frac{\pi}{6} < x < (2k-1)\pi + \frac{5\pi}{6}$ 时, $y = -1$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$).

如 356 题图所示.



356 题图

【357】 设 $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$

及 $\psi(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x < 0, \\ x^2, & \text{若 } x \geq 0. \end{cases}$

绘制以下函数的图形:

- (1) $y = \varphi[\varphi(x)]$; (2) $y = \varphi[\psi(x)]$;
(3) $y = \psi[\varphi(x)]$; (4) $y = \psi[\psi(x)]$.

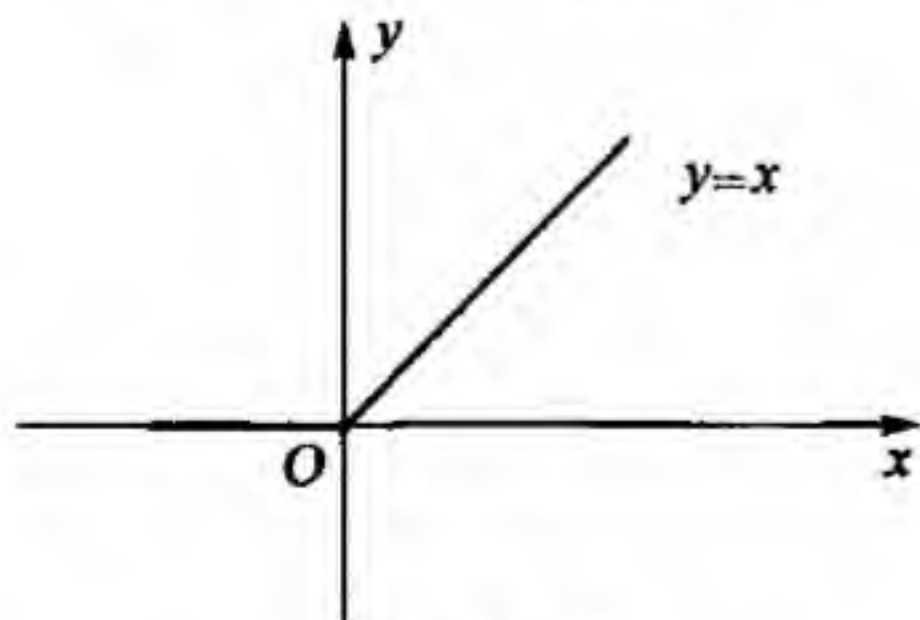
解 (1) $\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases}$

所以 $\varphi[\varphi(x)] = \varphi(x)$

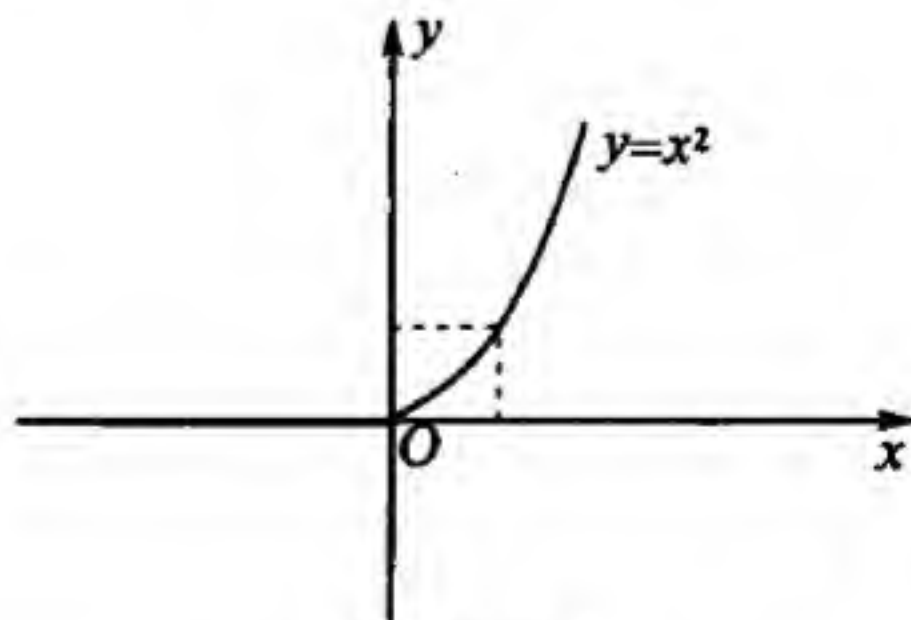
如 357 题图 1 所示.

(2) $\varphi[\varphi(x)] = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

如 357 题图 2 所示.



357 题图 1



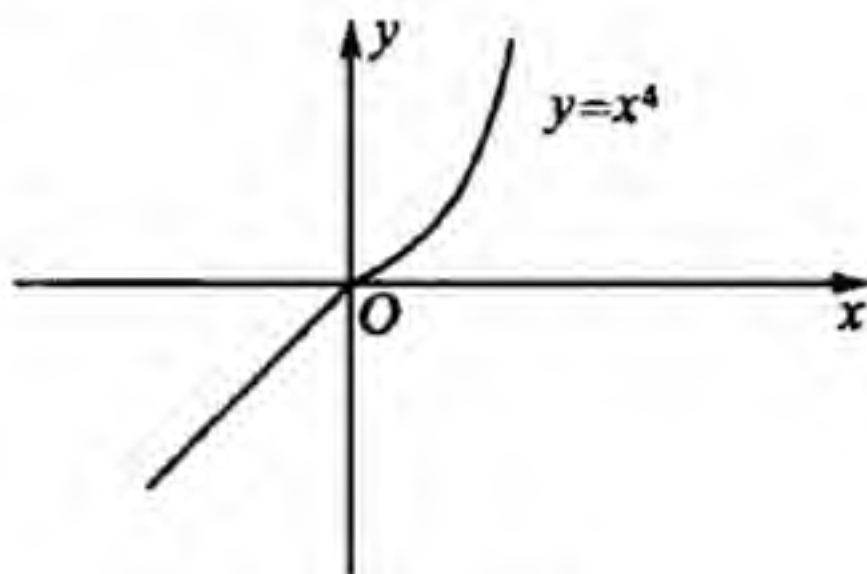
357 题图 2

$$(3) \psi[\varphi(x)] = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

图形与(2)的图形完全一样.

$$(4) \psi[\psi(x)] = \begin{cases} x^4, & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$$

如 357 题图 3 所示.



357 题图 3

【358】 假设

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{若 } |x| > 1, \end{cases}$$

和
$$\psi(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{若 } |x| \leq 2; \\ 2, & \text{若 } |x| > 2. \end{cases}$$

作出以下函数的图形:

$$(1) y = \varphi[\varphi(x)]; \quad (2) y = \varphi[\psi(x)];$$

$$(3) y = \psi[\varphi(x)]; \quad (4) y = \psi[\psi(x)].$$

解 (1) $\varphi[\varphi(x)] = 1$.

如 358 题图 1 所示.

(2) $\varphi[\psi(-x)] = \varphi[\psi(x)]$, 所以图形关于 oy 轴对称.

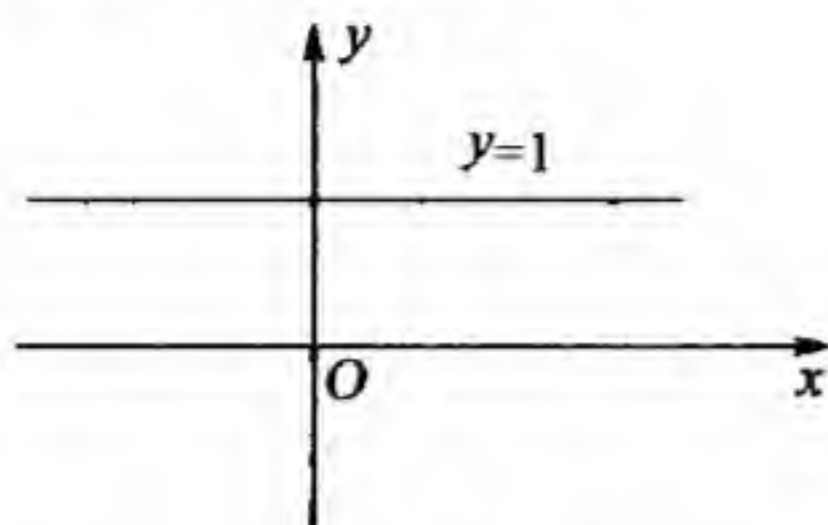
当 $x > 2$ 时, $\psi(x) = 2$, 所以 $\varphi[\psi(x)] = 0$

当 $0 \leq x < 1$ 时, $\psi(x) = 2 - x^2$, 而 $1 < 2 - x^2 \leq 2$, 所以 $\varphi[\psi(x)] = 0$.

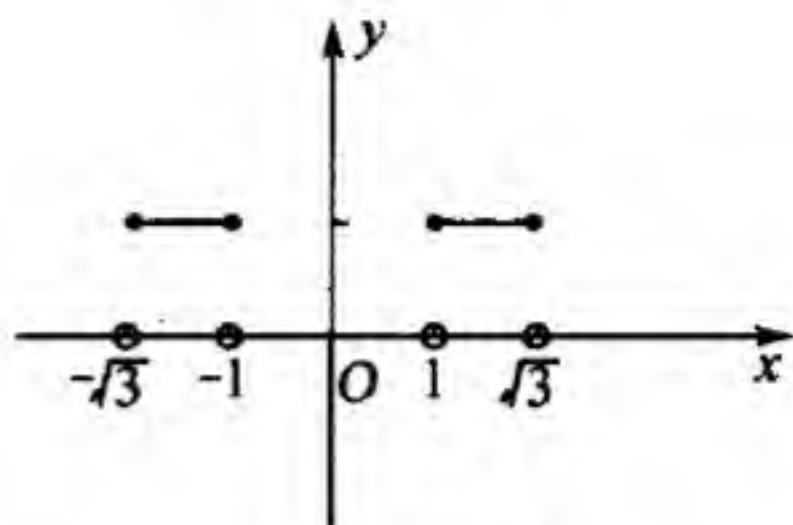
当 $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ 时, $-1 \leq 2 - x^2 \leq 1$, 所以 $\varphi[\psi(x)] = 1$.

当 $\sqrt{3} < x \leq 2$ 时, $-2 \leq 2 - x^2 < -1$, 所以 $\varphi[\psi(x)] = 0$.

如 358 题图 2 所示.



358 题图 1



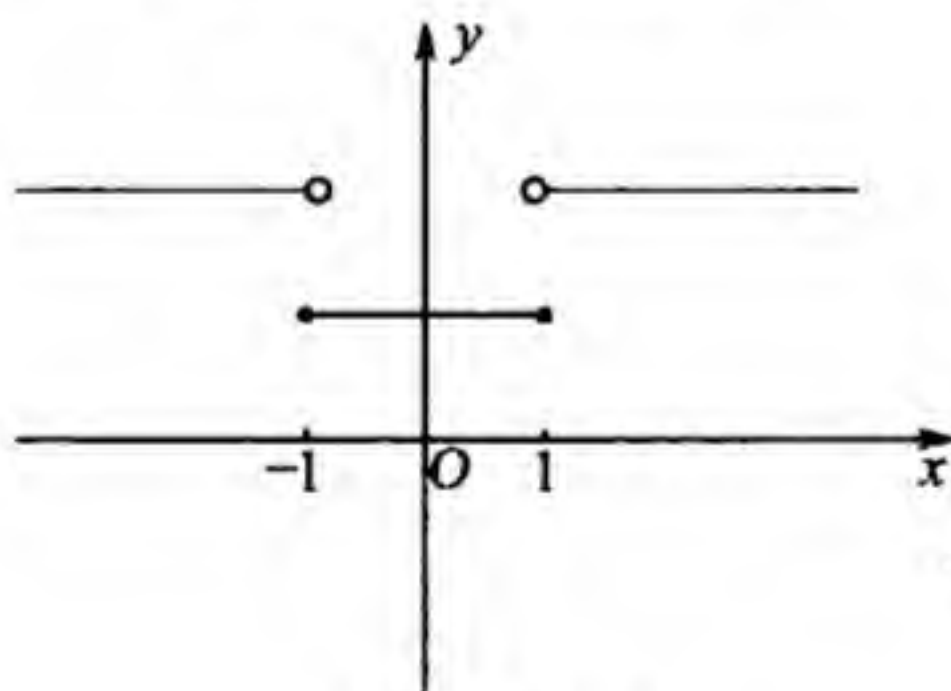
358 题图 2

$$(3) \psi[\varphi(x)] = \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| \leq 1, \\ 2, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

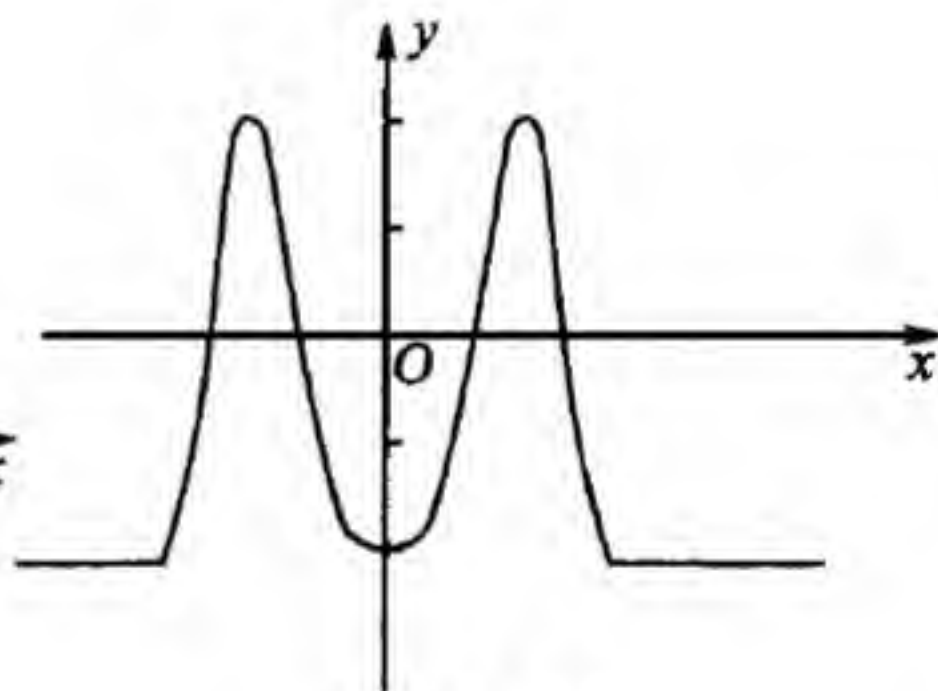
如 358 题图 3 所示.

$$(4) \psi[\varphi(x)] = \begin{cases} 2 - (2 - x^2)^2, & \text{若 } |x| \leq 2, \\ -2, & \text{若 } |x| > 2. \end{cases}$$

如 358 题图 4 所示.



358 题图 3



358 题图 4

【359】 将定义于正数域 $x > 0$ 内的函数 $f(x)$, 拓展到负数域 $x < 0$ 内, 使所得的函数为 (1) 偶函数; (2) 奇函数. 设

$$(1) f(x) = 1 - x; \quad (2) f(x) = 2x - x^2;$$

$$(3) f(x) = \sqrt{x}; \quad (4) f(x) = \sin x;$$

$$(5) f(x) = e^x; \quad (6) f(x) = \ln x.$$

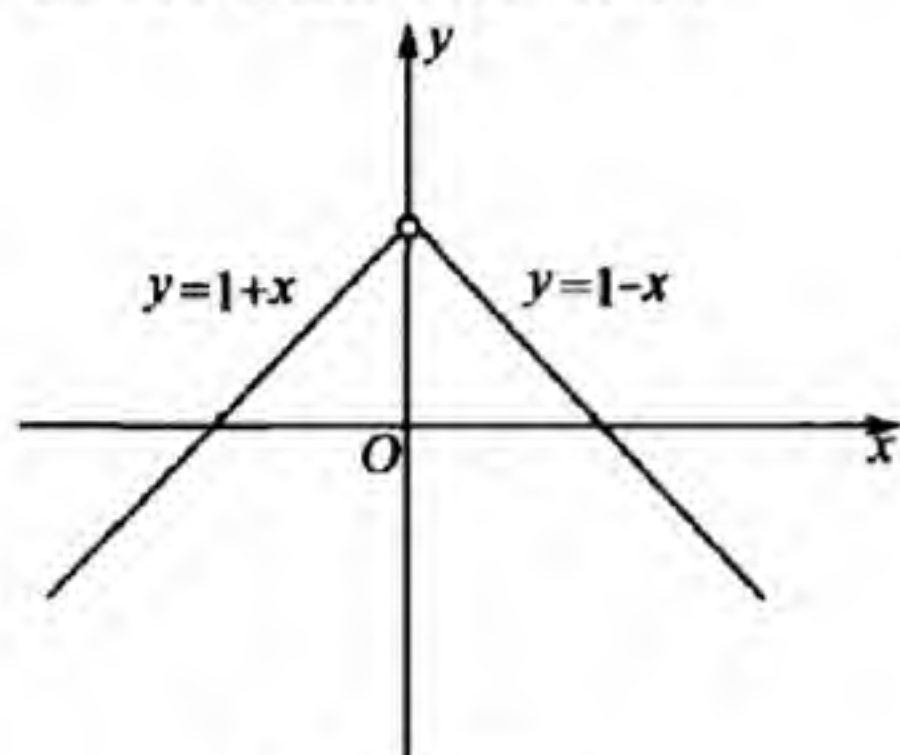
作出对应函数的图形.

解 (1) (a) 定义

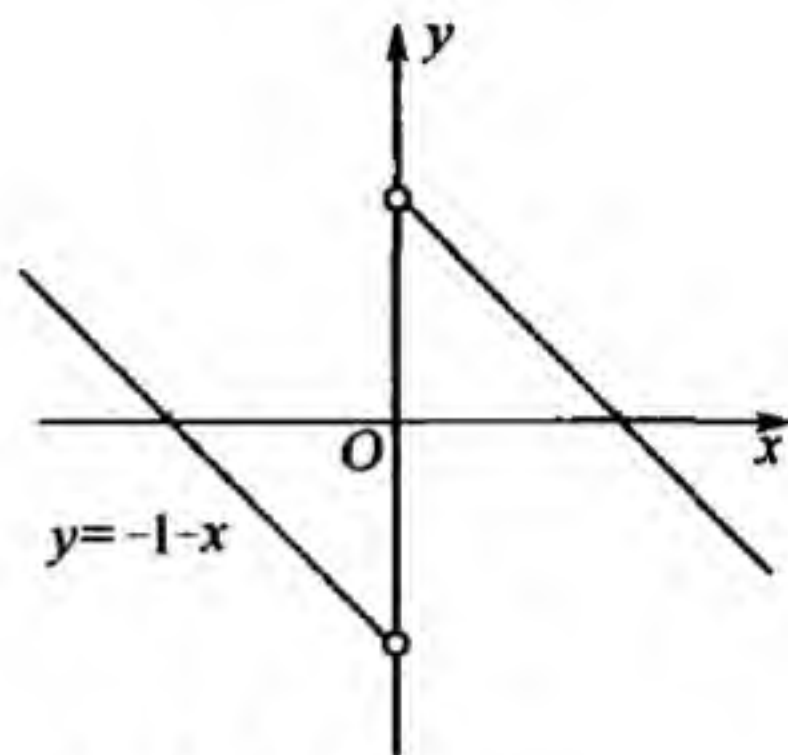
$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{若 } x > 0, \\ 1+x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

则 $f(x)$ 为偶函数.

如 359 题图 1(a) 所示.



359 题图 1(a)



359 题图 1(b)

$$(b) f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{若 } x > 0, \\ -(1+x), & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

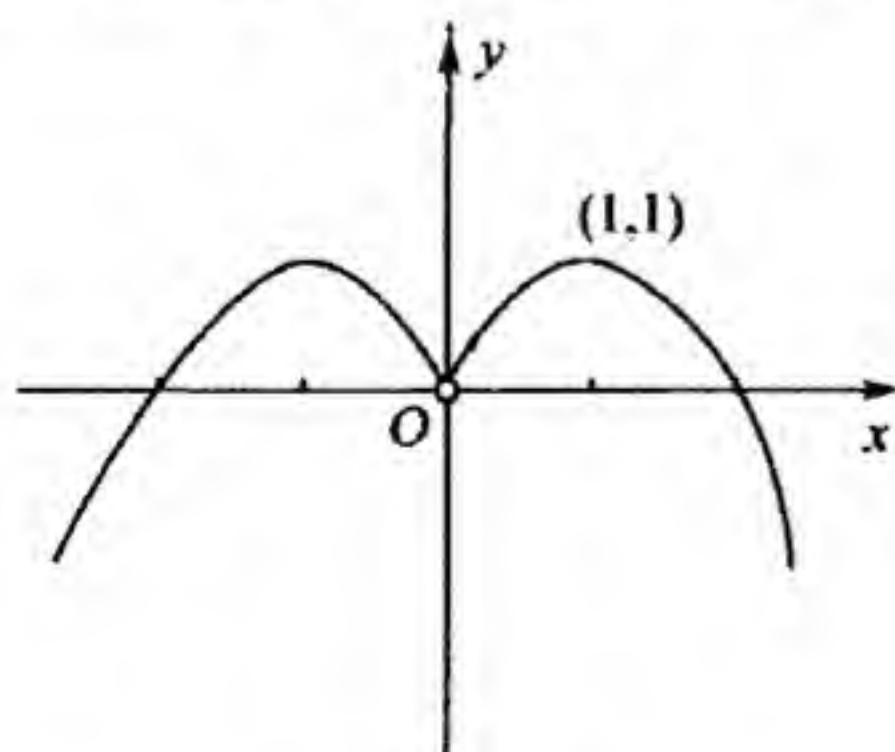
则 $f(x)$ 为奇函数.

如 359 题图 1(b) 所示.

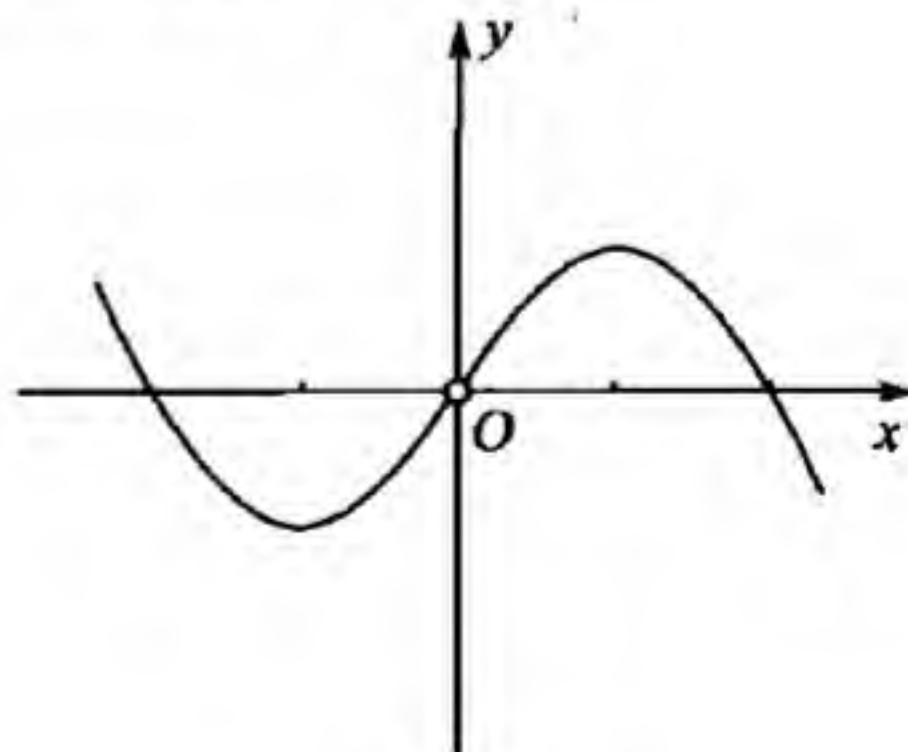
(2) (a) 定义

$$f(x) = \begin{cases} 2x-x^2, & \text{若 } x > 0, \\ -2x-x^2, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

则 $f(x)$ 为偶函数, 如 359 题图 2(a) 所示.



359 题图 2(a)



359 题图 2(b)

(b) 定义

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & \text{若 } x > 0, \\ 2x + x^2, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

则 $f(x)$ 为奇函数. 如 359 题图 2(b) 所示.

$$(3) (a) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{若 } x > 0, \\ \sqrt{-x}, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

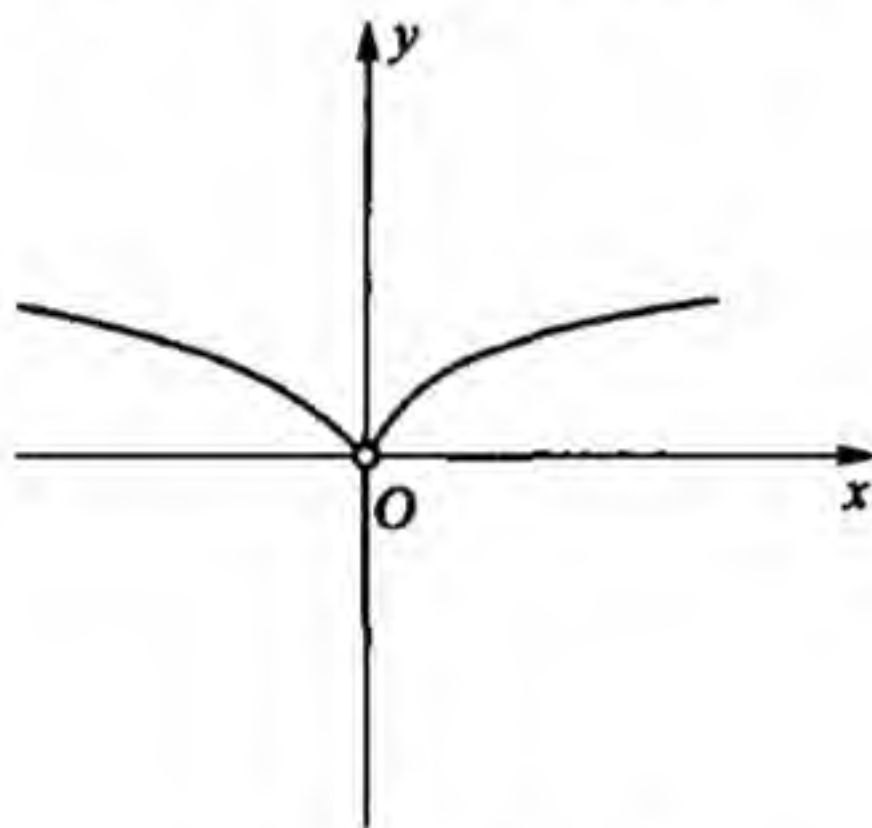
即 $f(x) = \sqrt{|x|}$.

则 $f(x)$ 为偶函数. 如 359 题图 3(a) 所示.

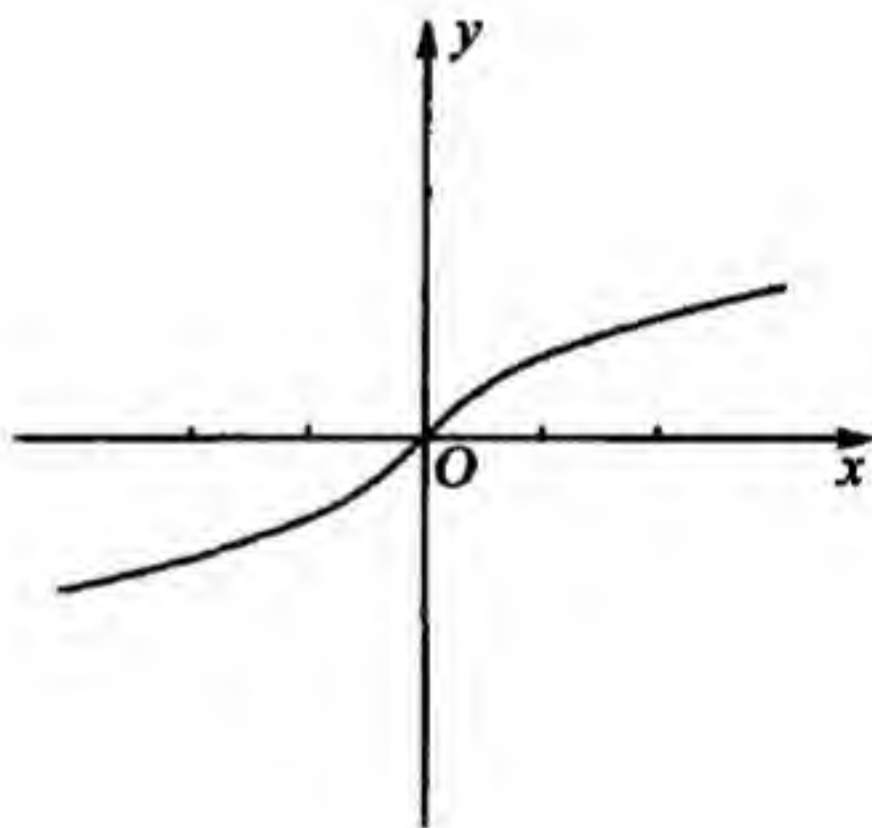
$$(b) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{若 } x > 0, \\ -\sqrt{-x}, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

则 $f(x)$ 为奇函数.

如 359 题图 3(b) 所示.

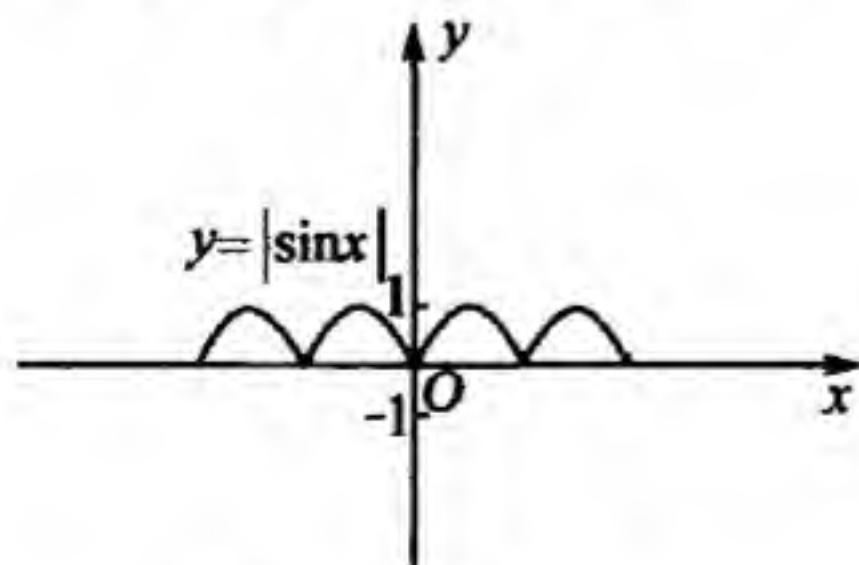


359 题图 3(a)

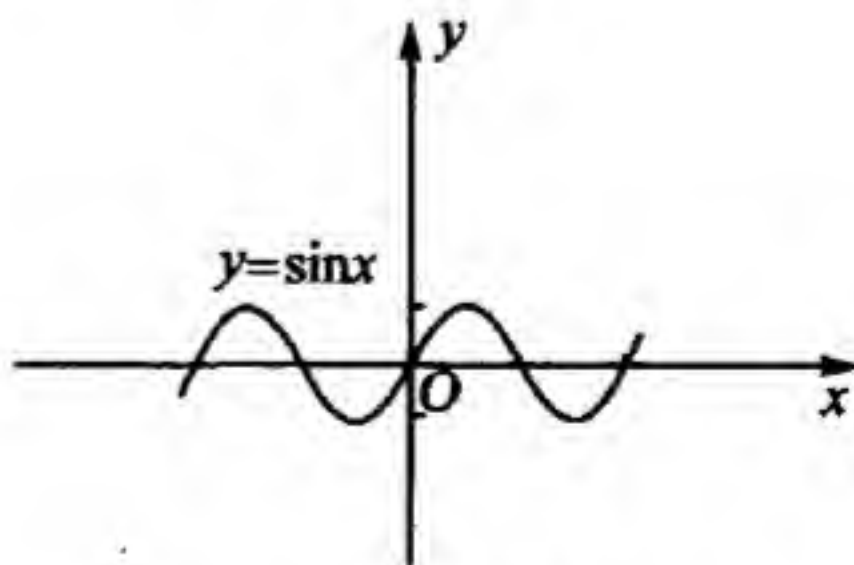


359 题图 3(b)

(4) (a) 定义 $f(x) = |\sin x|$, $f(x)$ 即为偶函数, 如 359 题图 4(a) 所示.



359 题图 4(a)



359 题图 4(b)

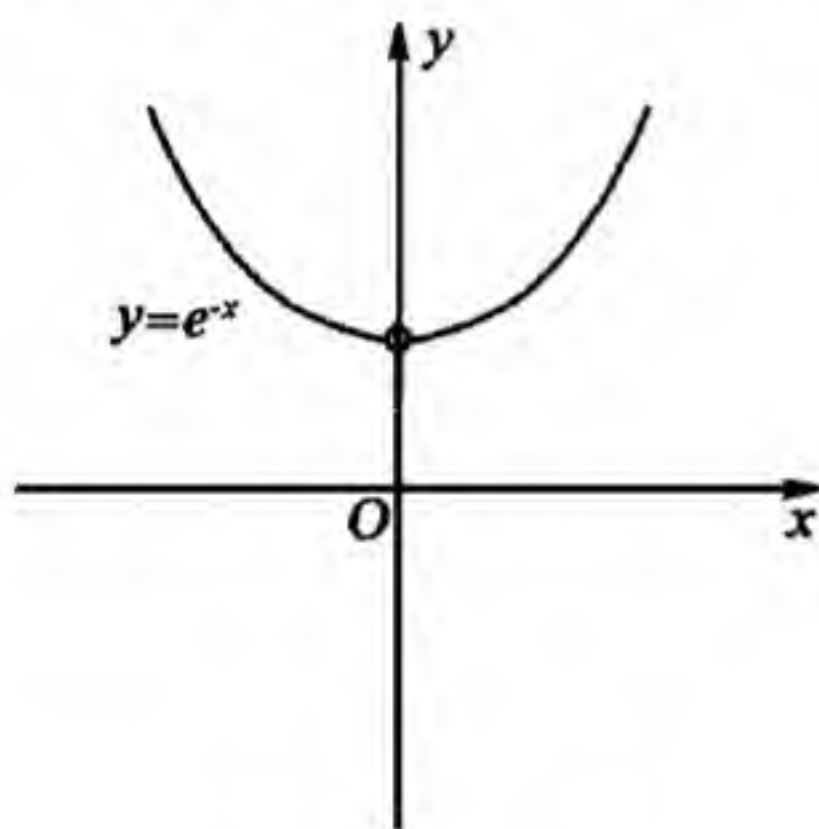
(b) 定义 $f(x) = \sin x$, $f(x)$ 为奇函数,
如 359 题图 4(b) 所示.

(5) (a) 定义 $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{若 } x > 0, \\ e^{-x}, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$

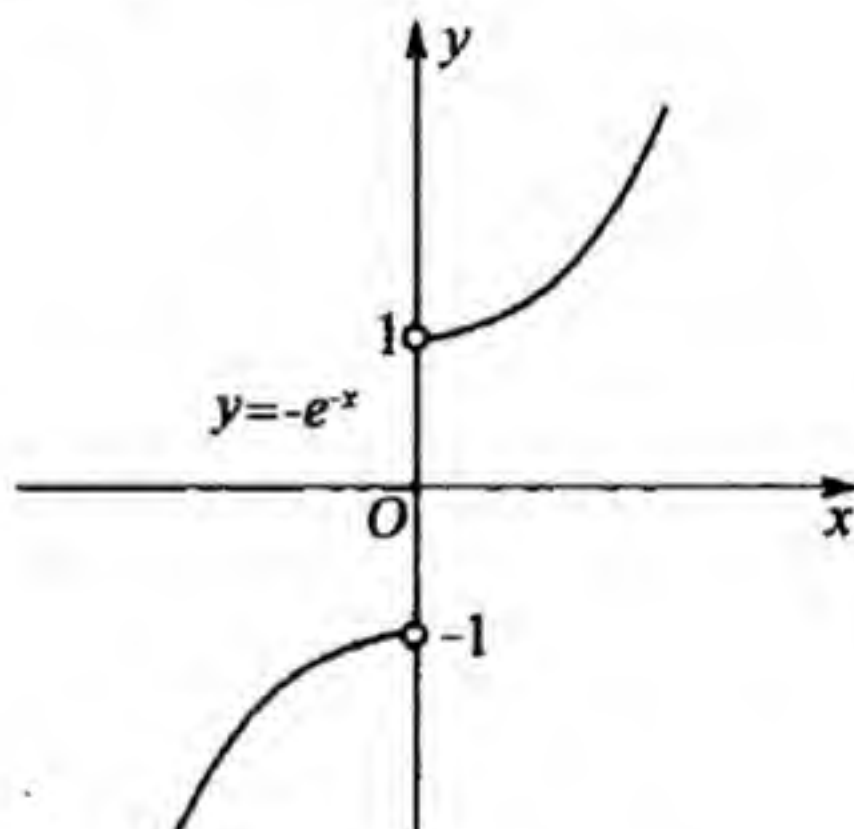
则 $f(x)$ 为偶函数. 如 359 题图 5(a) 所示.

(b) 定义 $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{若 } x > 0, \\ -e^{-x}, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$

则 $f(x)$ 为奇函数. 如 359 题 5(b) 所示.



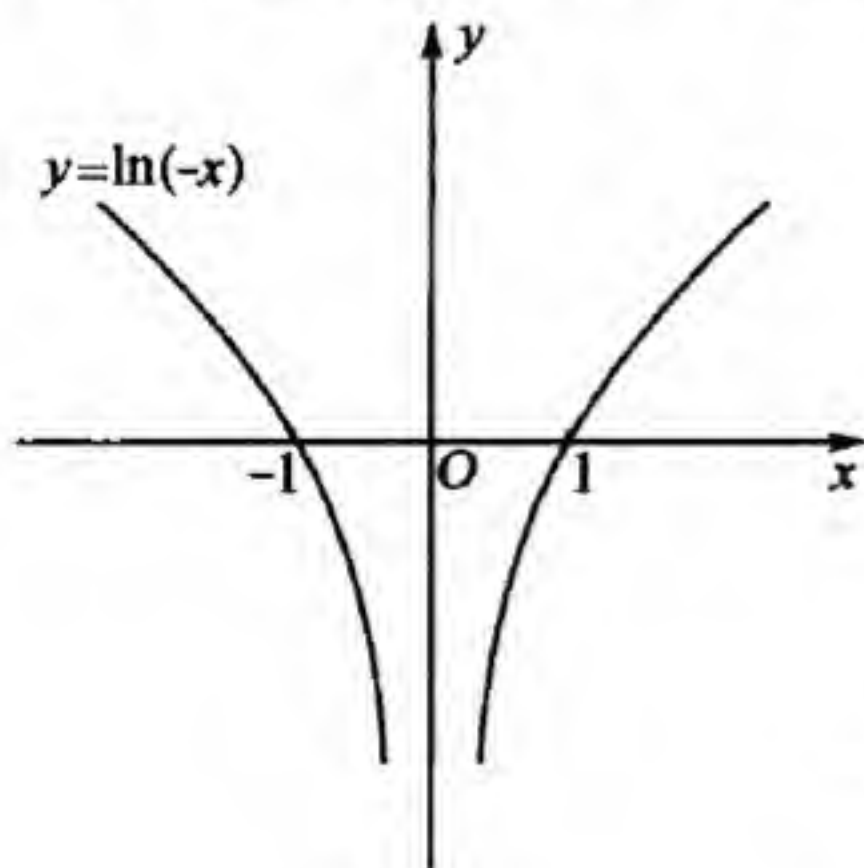
359 题图 5(a)



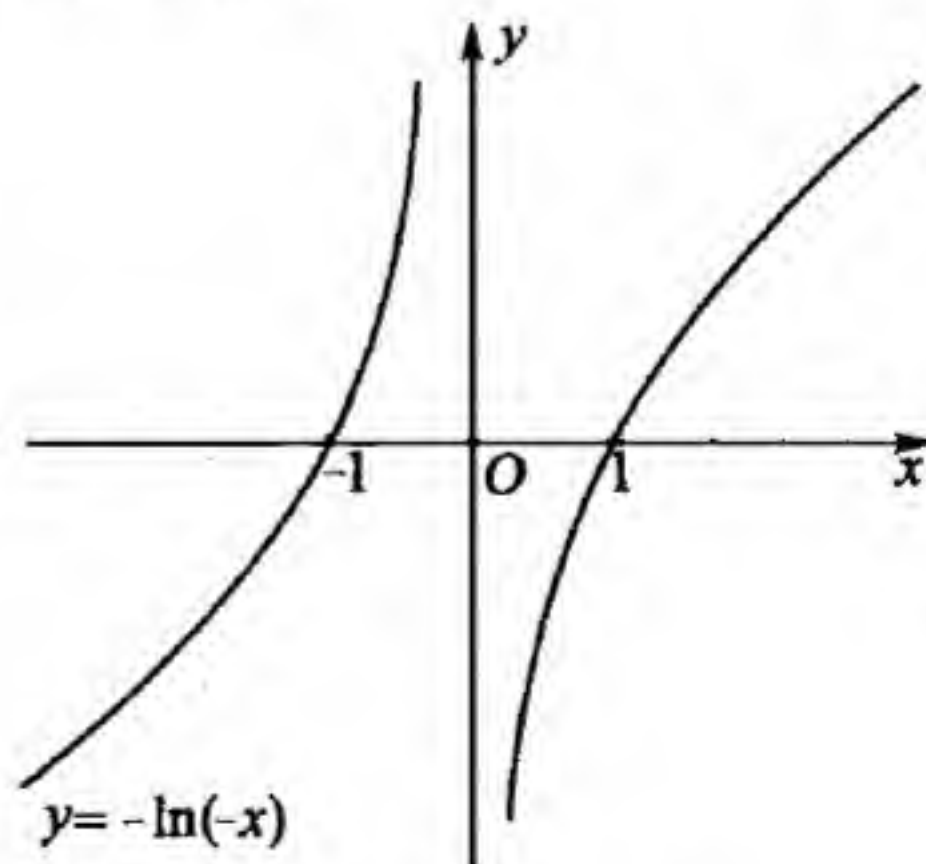
359 题图 5(b)

(6) (a) 定义 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{若 } x > 0, \\ \ln(-x), & \text{若 } x < 0. \end{cases}$

则 $f(x)$ 为偶函数. 如 359 题图 6(a) 所示.



359 题图 6(a)



359 题图 6(b)

$$(b) \text{ 定义 } f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{若 } x > 0, \\ -\ln(-x), & \text{若 } x < 0, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 为奇函数. 如 359 题图 6(b) 所示.

【360】 以下函数的图形关于何垂直轴对称:

$$(1) y = ax^2 + bx + c; \quad (2) y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2};$$

$$(3) y = \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x} \quad (0 < a < b);$$

$$(4) y = a + b\cos x.$$

解 (1) $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$

图形关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称.

$$(2) \text{ 令 } x' = x - \frac{1}{2}, y' = y \text{ 则函数变为}$$

$$y' = \frac{1}{\left(x' + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - x'\right)^2}.$$

由此可知图形在坐标系 $x'Oy'$ 中关于 Oy' 轴对称, 即图形关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称.

或设

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$\text{则 } f(1-x) = f(x),$$

所以图形关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称.

$$(3) \text{ 设 } g(x) = \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x},$$

$$\text{则 } g\left(2 \times \frac{b-a}{2} - x\right) = g(x),$$

所以图形关于直线 $x = \frac{b-a}{2}$ 对称.

$$(4) \text{ 图形关于直线 } x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ 对称.}$$

【361】 确定以下函数图形的对称中心:

$$(1) y = ax + b; \quad (2) y = \frac{ax + b}{cx + d};$$

$$(3) y = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$

$$(4) y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3};$$

$$(5) y = 1 + \sqrt[3]{x-2}.$$

解 (1) 直线上的任一点 $(x_0, ax_0 + b)$ 均为对称中心.

$$(2) y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}},$$

对称中心为 $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

(3) 设对称中心为 (x_0, y_0) , 则对任意 x 有 y 使得

$$y + y_0 = a(x + x_0)^3 + b(x + x_0)^2 + c(x + x_0) + d,$$

$$-y + y_0 = a(-x + x_0)^3 + b(-x + x_0)^2 + c(-x + x_0) + d.$$

由此可得

$$x_0 = -\frac{b}{3a}, y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d.$$

(4) 类似于(3), 可得对称中心为 $(2, 0)$.

(5) 类似于(3), 可得对称中心为 $(2, 1)$.

【362】 作出以下周期函数的图形:

$$(1) y = |\sin x|; \quad (2) y = \operatorname{sgn} \cos x;$$

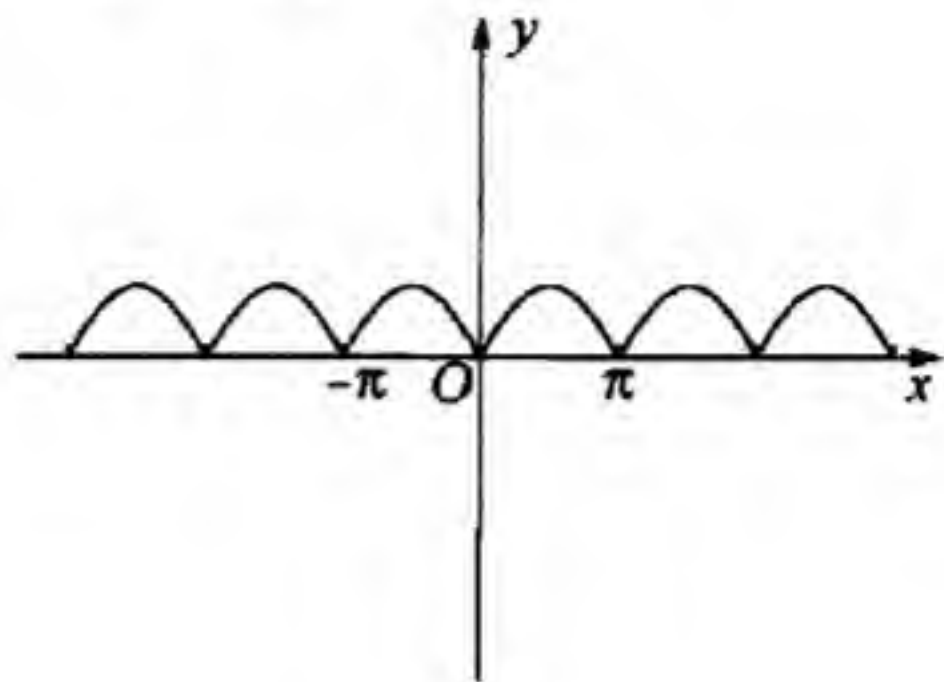
$$(3) y = f(x), \text{ 其中 } f(x) = A \frac{x}{l} \left(2 - \frac{x}{l}\right), \text{ 假设 } 0 \leq x \leq 2l$$

和 $f(x + 2l) \equiv f(x)$.

$$(4) y = [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right];$$

(5) $y = (x)$. 其中: (x) 是从数 x 到与其最近的整数间的距离.

解 (1) 如 362 题图 1 所示.



362 题图 1

(2) 当 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $y = 0$;

当 $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $y = 1$;

当 $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = -1$.

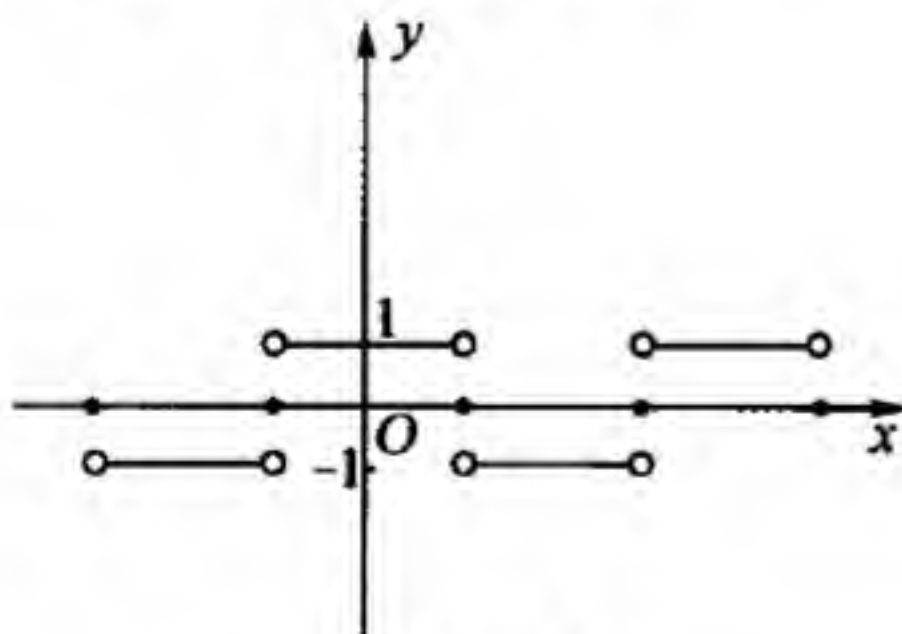
如 362 题图 2 所示.

(3) 由定义知

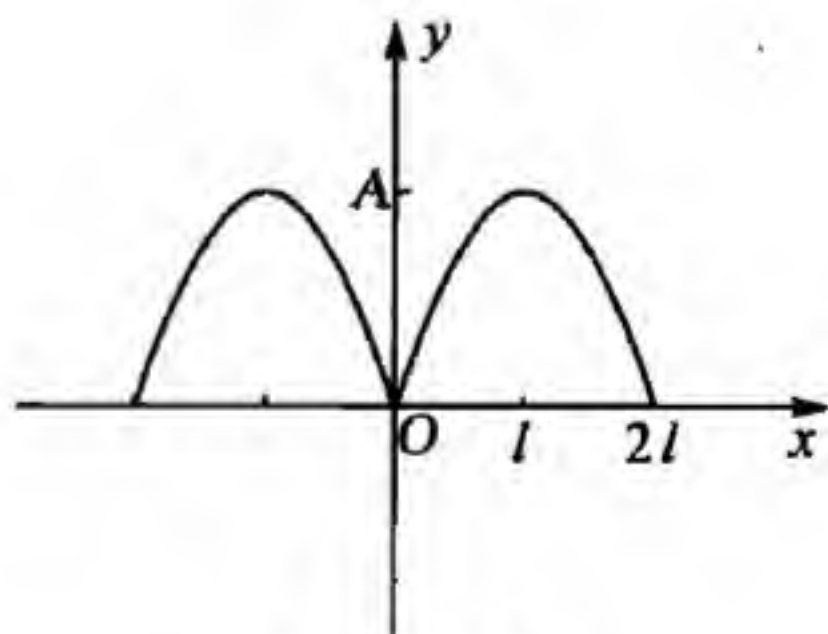
$$f(x + 2kl) = f(x) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

即 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数. 而在 $[0, 2l]$ 内, 图形为一抛物线, 顶点为 (l, A) .

如 362 题图 3 所示.



362 题图 2



362 题图 3

(4) 当 $2k \leq x < 2k + 1$ 时,

$$y = 0 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

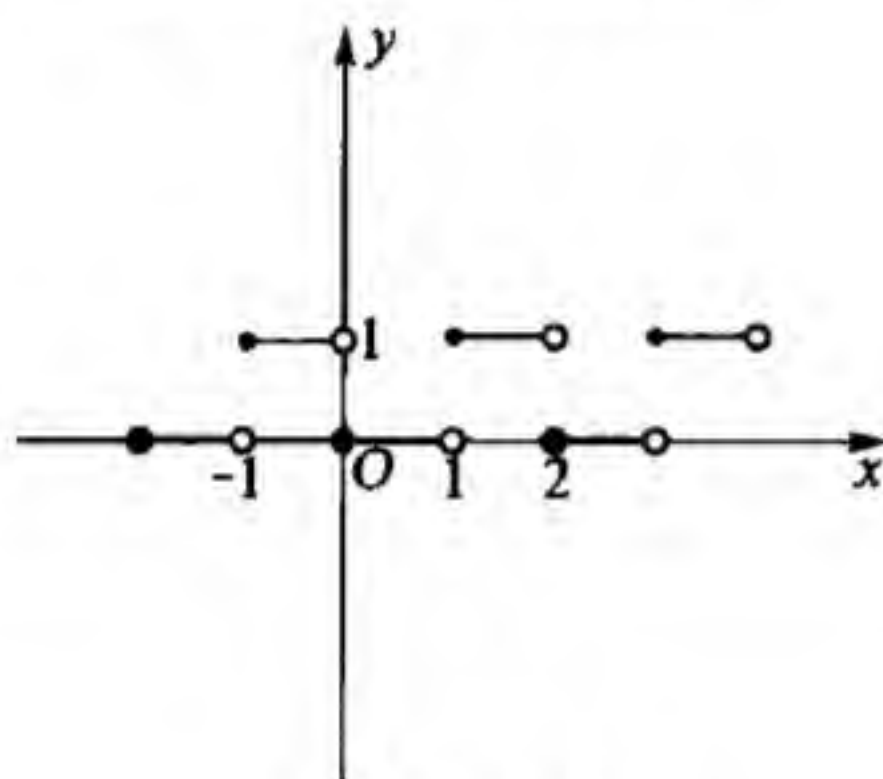
当 $2k+1 \leq x < 2k+2$ 时, $y = 1$.

如 362 题图 4 所示.

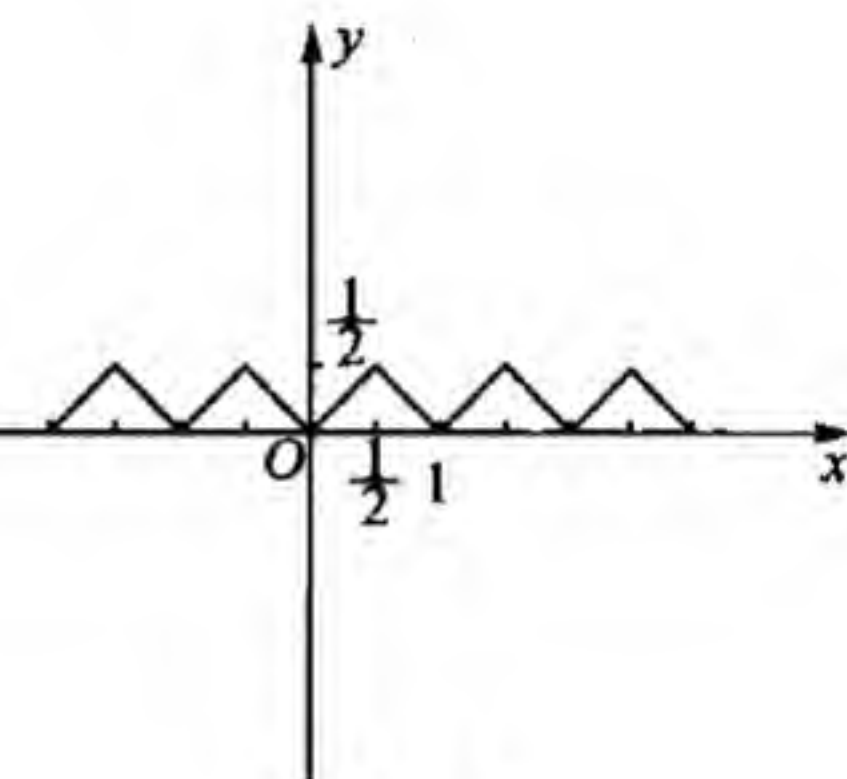
(5) 函数是以 1 为周期的周期函数. 而在 $0 \leq x \leq 1$ 上有

$$y = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1-x, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

如 362 题图 5 所示.



362 题图 4



362 题图 5

【363】 证明: 如果函数

$$y = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

的图形对称于两个垂直轴 $x = a$ 及 $x = b$ ($b > a$), 则函数 $f(x)$ 为周期函数.

证 因为 $f(x)$ 关于直线 $x = a$ 及 $x = b$ 对称, 所以对任何 x 均有

$$f(a+x) = f(a-x), \quad \text{①}$$

$$\text{及} \quad f(b+x) = f(b-x). \quad \text{②}$$

在 ① 式中令 $a+x = t$, 再以 x 代替得

$$f(x) = f(2a-x).$$

同理 $f(x) = f(2b-x)$,

因此 $f(x) = f(2a-x) = f(2b-(2a-x))$

$$= f(2(b-a) + x).$$

由 x 的任意性知 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数. 证毕.

【364】 证明: 如果函数

$$y = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

的图形对称于两个点 $A(a, y_0)$ 和 $B(b, y_1) (b > a)$, 则函数 $f(x)$ 是线性函数和周期函数的和, 特别是若 $y_0 = y_1$, 则函数 $f(x)$ 是周期函数.

证 根据假设, 对任意 x 有

$$f(a+x) - y_0 = y_0 - f(a-x), \quad \text{①}$$

$$f(b+x) - y_1 = y_1 - f(b-x).$$

令 $a+x=t$, 代入 ① 有

$$f(t) = 2y_0 - f(2a-t),$$

所以 $f(x) = 2y_0 - f(2a-x),$

同理 $f(x) = 2y_1 - f(2b-x),$

因此 $f(x) = 2y_0 - f(2a-x)$
 $= 2(y_0 - y_1) + f(2(b-a) + x).$

令 $\varphi(x) = \frac{y_0 - y_1}{b-a}x + f(x).$

则 $\varphi(x + 2(b-a)) = \varphi(x),$

即 $\varphi(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数. 且

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{y_1 - y_0}{b-a}x.$$

特别当 $y_1 = y_0$ 时, $f(x) = \varphi(x).$

【365】 证明: 如果函数

$$y = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

的图形对称于点 $A(a, y_0)$ 和直线 $x = b (b \neq a)$, 则函数 $f(x)$ 为周期函数.

证 由假设对任意的 x , 我们有

$$f(x) = 2y_0 - f(2a - x),$$

$$f(x) = f(2b - x),$$

因此

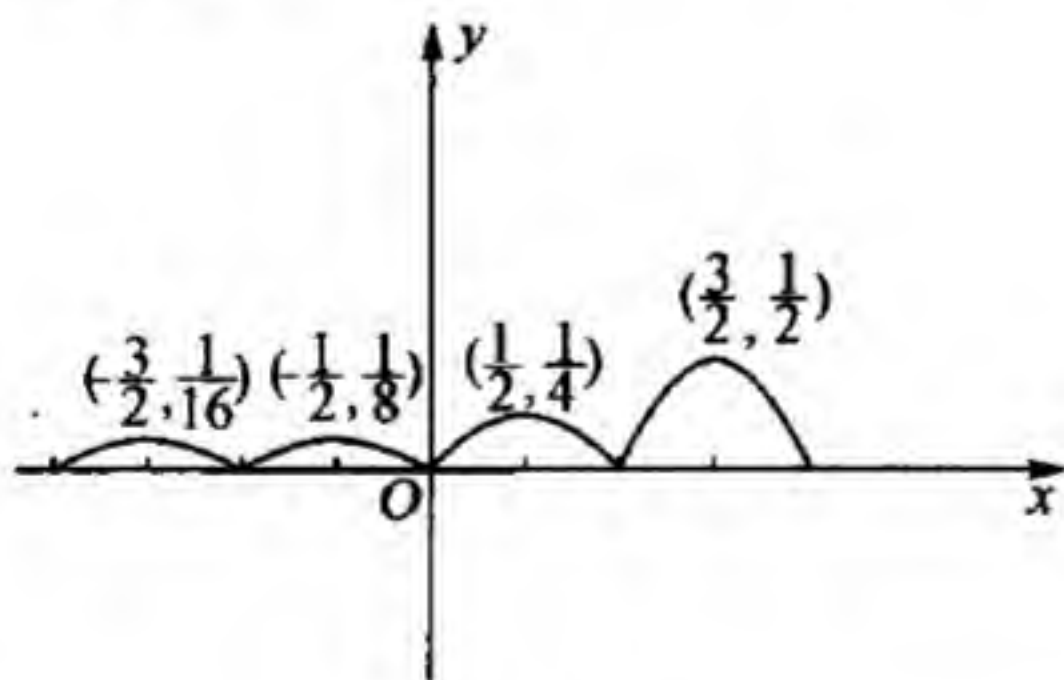
$$\begin{aligned} f(x) &= 2y_0 - f(2a - x) \\ &= 2y_0 - f(2b - (2a - x)) \\ &= 2y_0 - f(2(b - a) + x) \\ &= 2y_0 - \{2y_0 - f[2a - (2(b - a) + x)]\} \\ &= f(4a - 2b - x) \\ &= f(2b - (4a - 2b - x)) \\ &= f(4(b - a) + x). \end{aligned}$$

即 $f(x)$ 是以 $4(b - a)$ 为周期的周期函数.

【366】 设 $f(x+1) = 2f(x)$, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x(1-x)$. 作出函数 $y = f(x) (-\infty < x < +\infty)$ 的图形.

解 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 图形为一抛物线, 顶点为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$; 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 只要将纵坐标放大 2 倍, 依此类推.

如 366 题图所示.



366 题图

【367】 设 $f(x+\pi) = f(x) + \sin x$, 且当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $f(x) = 0$, 作出函数 $y = f(x) (-\infty < x < +\infty)$ 的图形.

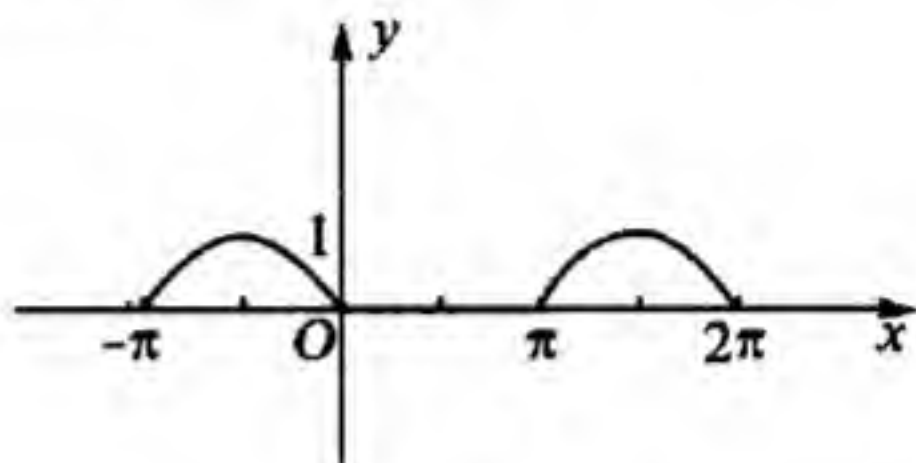
解 由题设知

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= f(x+\pi) + \sin(x+\pi) \\ &= f(x) + \sin x + \sin(x+\pi) = f(x), \end{aligned}$$

即 $f(x)$ 是 2π 为周期的周期函数, 且当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $f(x) = 0$; 当 $\pi \leq x \leq 2\pi$ 时, 令 $x = x_1 + \pi$. 则 $0 < x_1 \leq \pi$, 且

$$f(x) = f(x_1 + \pi) = f(x_1) + \sin x_1 = \sin x_1.$$

如 367 题图所示.



367 题图

【368】 若

(1) $x = y - y^3$;

(2) $x = \frac{1-y}{1+y^2}$;

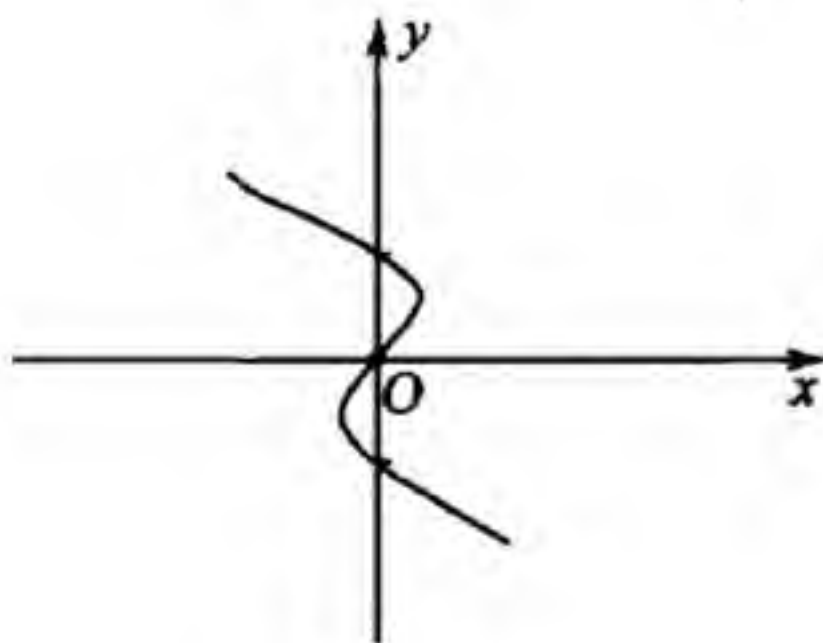
(3) $x = y - \ln y$;

(4) $x^2 = \sin y$.

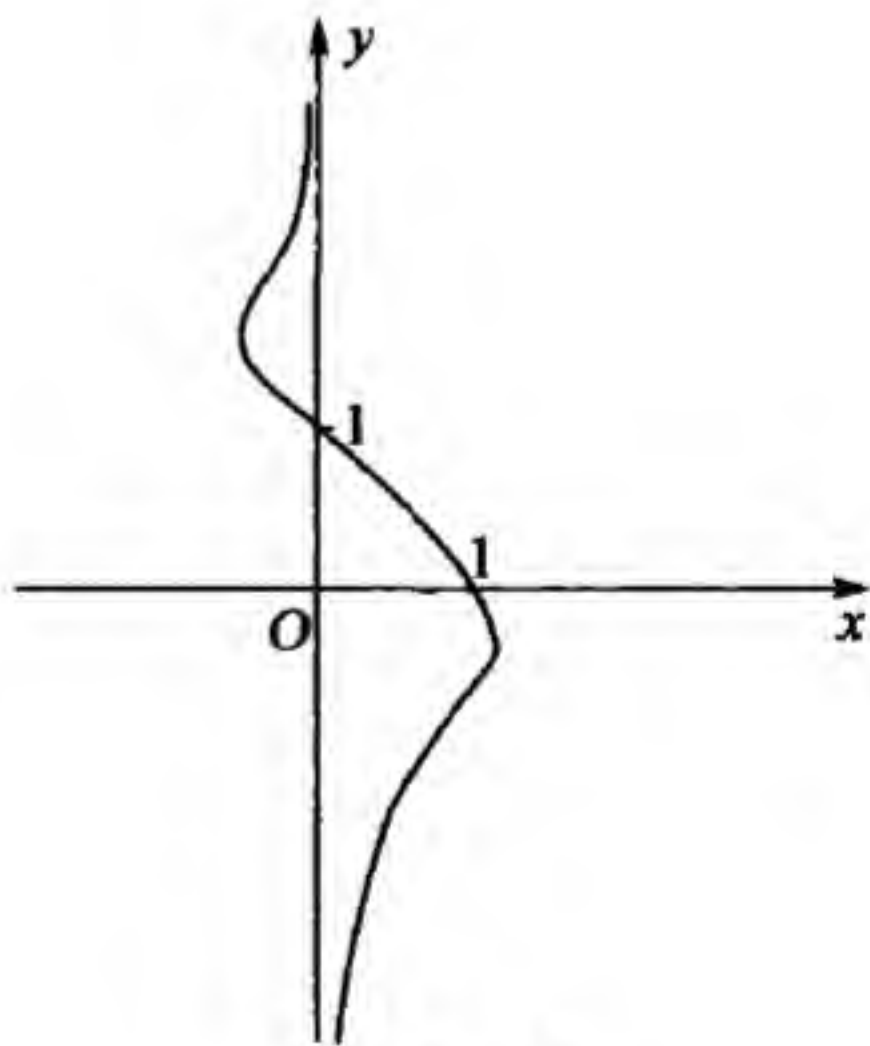
作函数 $y = y(x)$ 的图形.

解 (1) 如 368 题图 1 所示.

(2) 如 368 题图 2 所示.



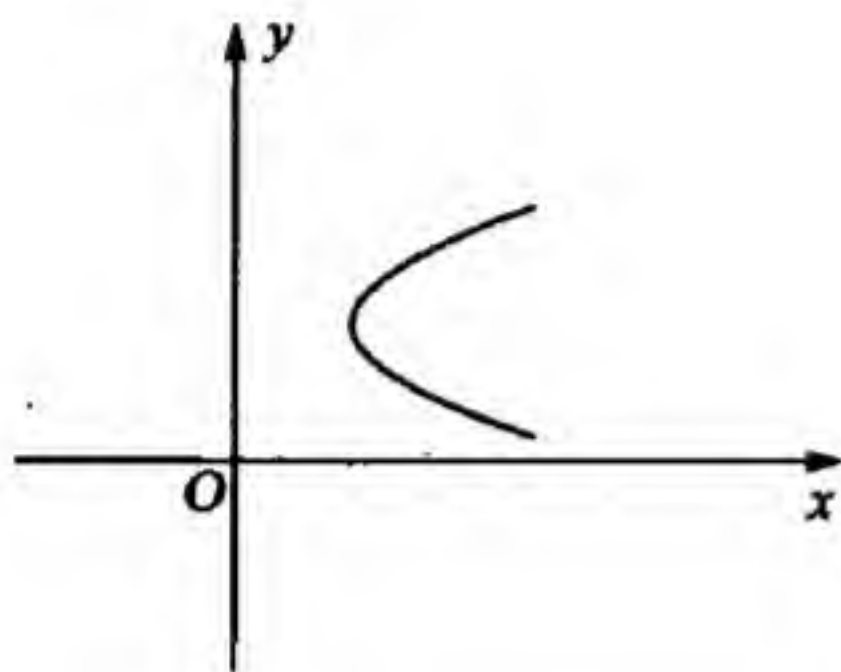
368 题图 1



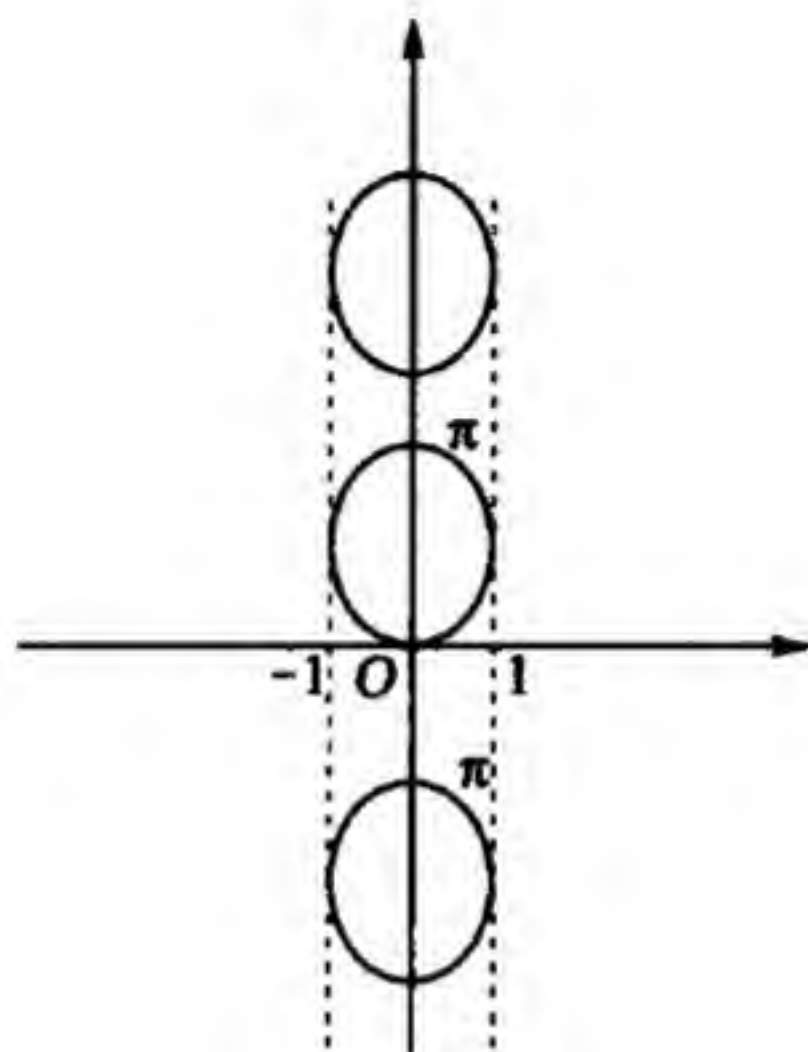
368 题图 2

(3) 如 368 题图 3 所示.

(4) 如 368 题图 4 所示.



368 题图 3



368 题图 4

【369】 若

(1) $x = 1 - t, y = 1 - t^2$;

(2) $x = t + \frac{1}{t}, y = t + \frac{1}{t^2}$;

(3) $x = 10 \cos t, y = \sin t$ (椭圆);

(4) $x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t$ (双曲线);

(5) $x = 5 \cos^2 t, y = 3 \sin^2 t$;

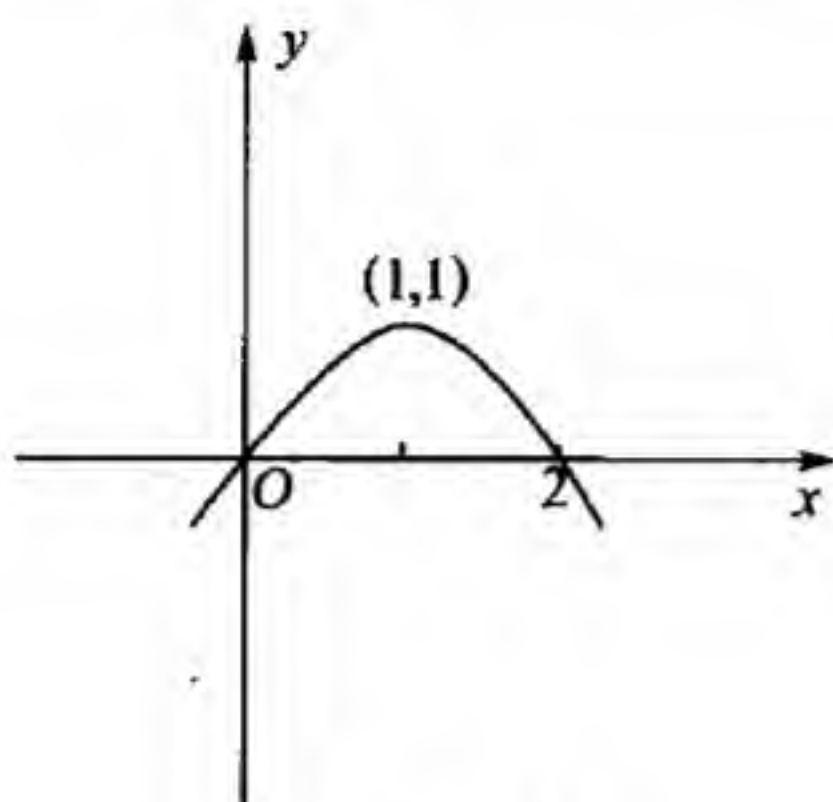
(6) $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$ (摆线);

(7) $x = \sqrt[t+1]{t}, y = \sqrt[t+1]{t+1} \quad (t > 0)$.

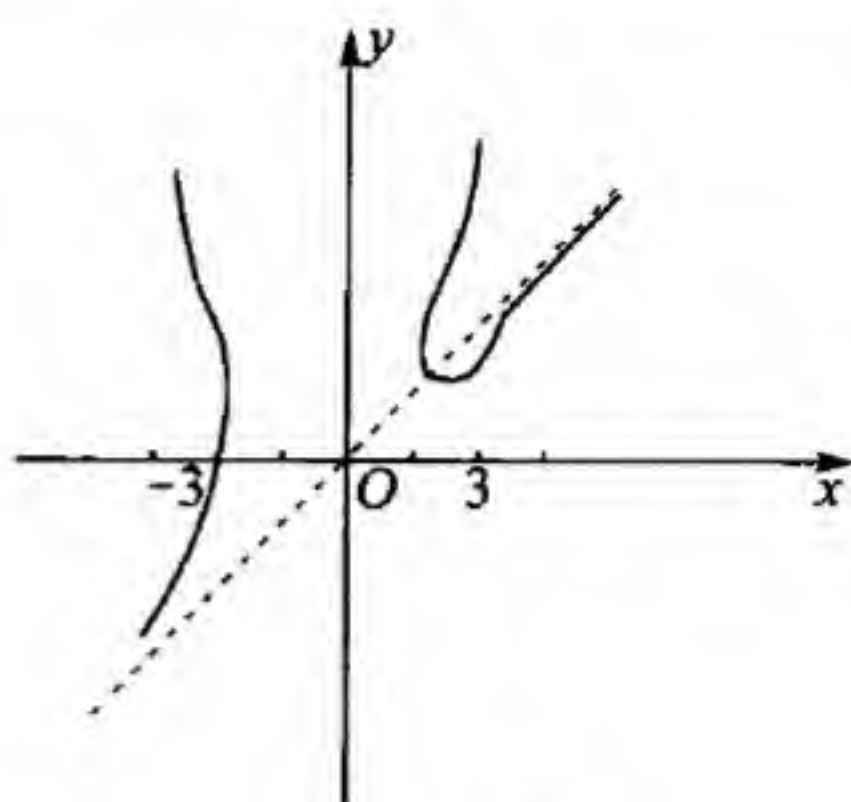
作出以上用参数表示的各函数的图形.

解 (1) $y - 1 = -(x - 1)^2$. 如 369 题图 1 所示.

(2) 如 369 题图 2 所示.



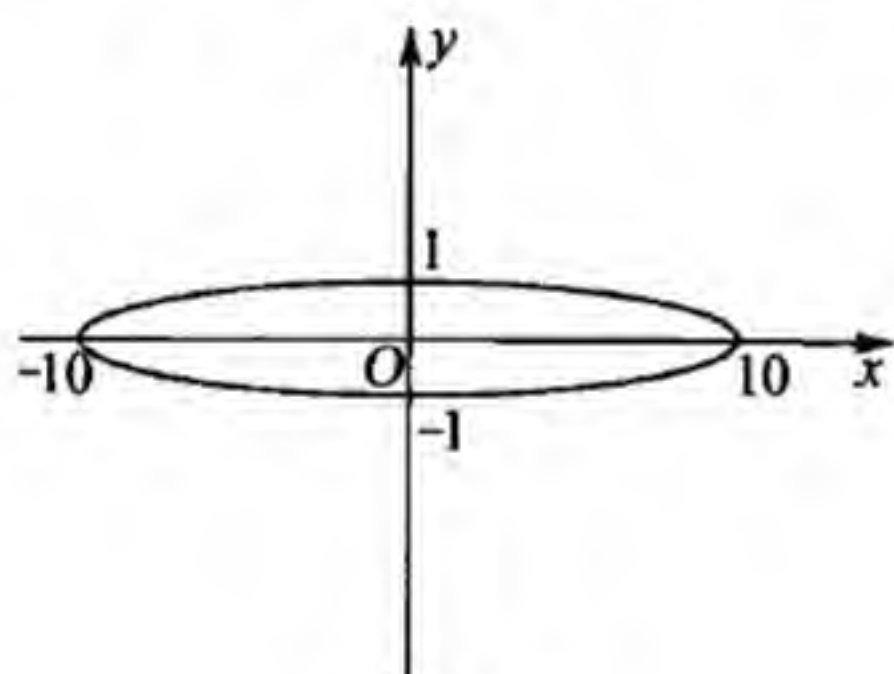
369 题图 1



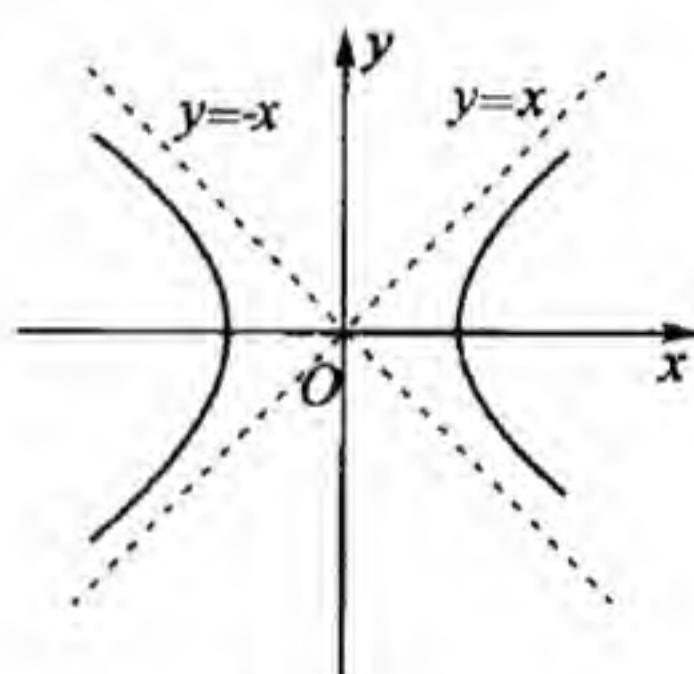
369 题图 2

(3) $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$. 如 369 题图 3 所示.

(4) $x^2 - y^2 = 1$. 如 369 题图 4 所示.

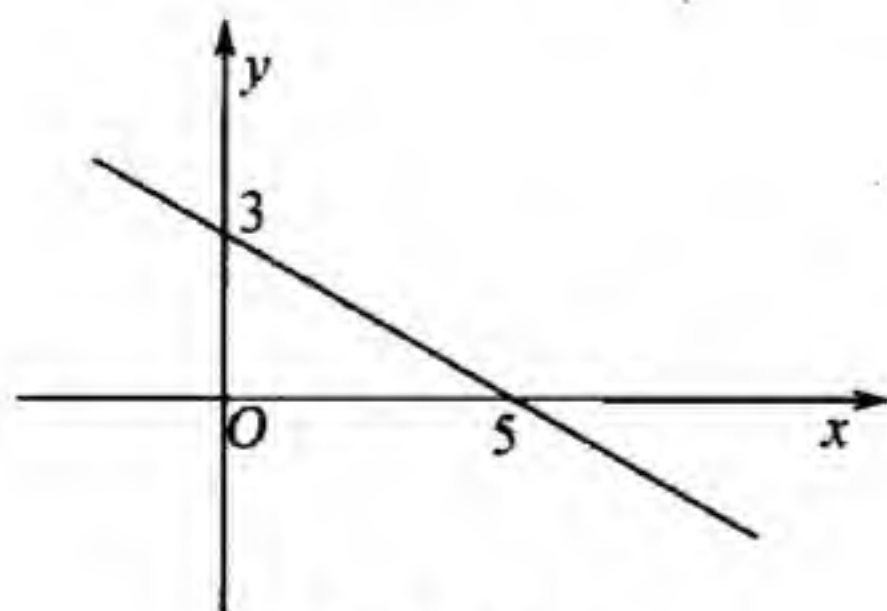


369 题图 3

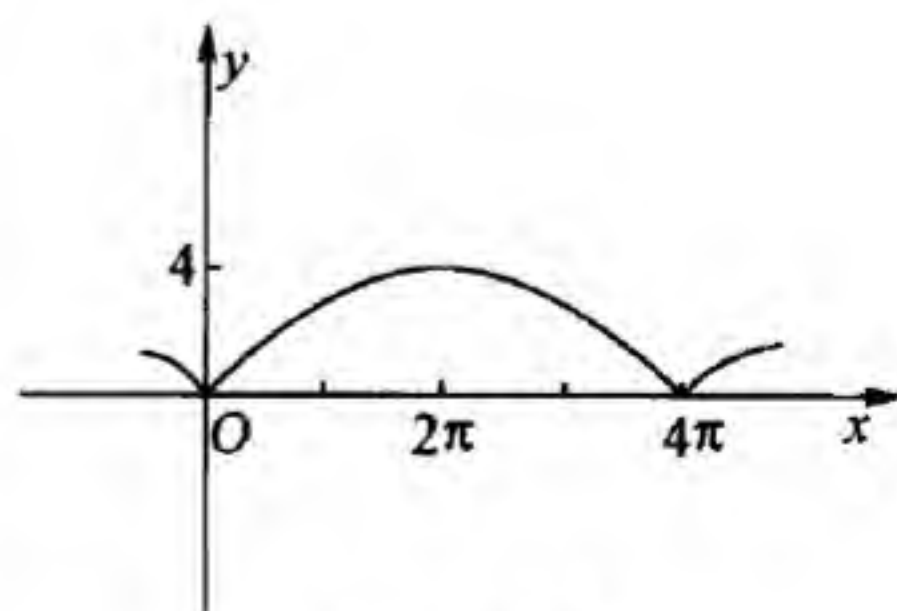


369 题图 4

(5) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$. 如 369 题图 5 所示.



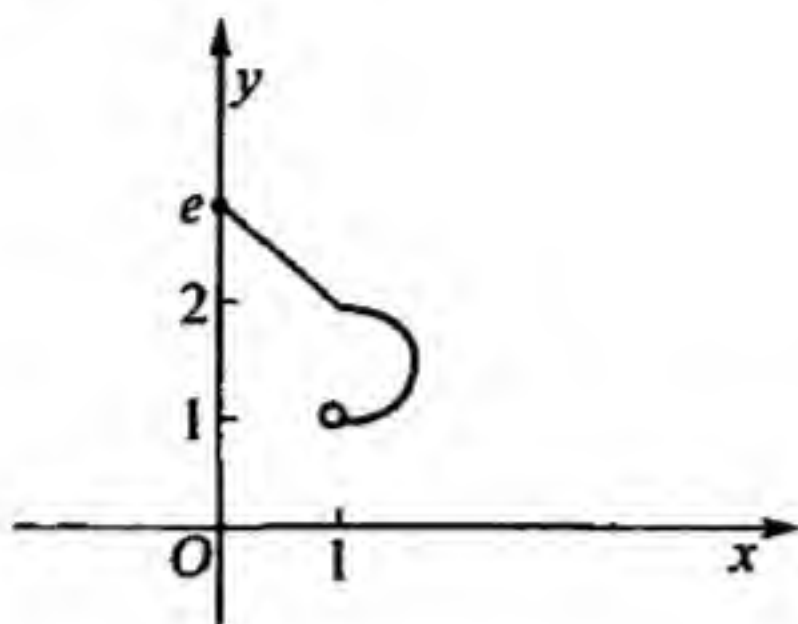
369 题图 5



369 题图 6

(6) 如 369 题图 6 所示.

(7) 如 369 题图 7 所示.



369 题图 7

【370】 作出以下隐函数的图形.

- (1) $x^2 - xy + y^2 = 1$ (椭圆);
- (2) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (笛卡尔叶形线);
- (3) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (抛物线);
- (4) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ (内摆线);
- (5) $\sin x = \sin y$;
- (6) $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$;
- (7) $x^y = y^x$ ($x > 0, y > 0$);
- (8) $x - |x| = y - |y|$.

解 (1) 将坐标按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$, 得新的坐标系 $Ox'y'$,

旋转公式为 $x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$.

代入原方程得 $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} = 1$.

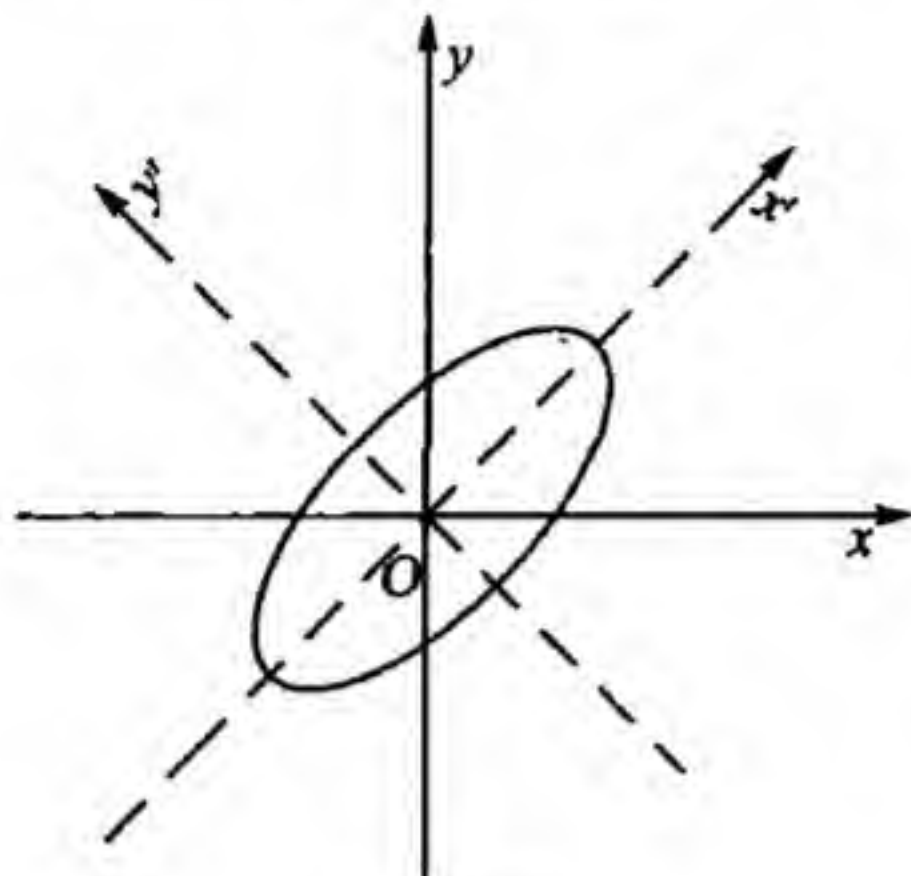
如 370 题图 1 所示

(2) 作坐标变换 $x = x' - y', y = x' + y'$,

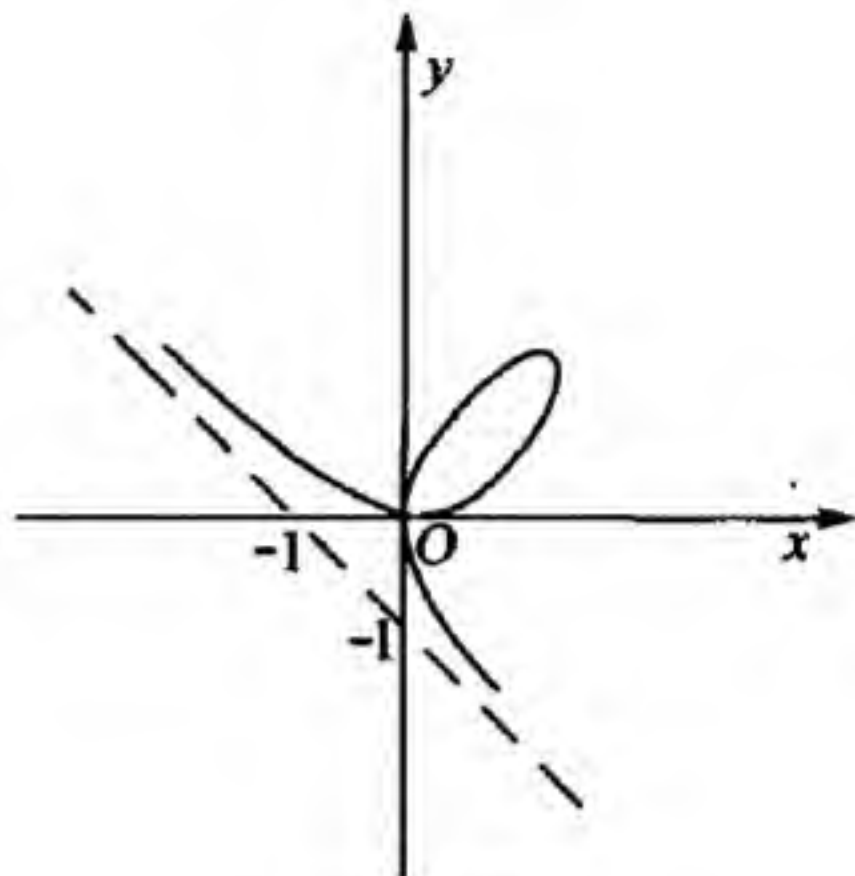
则原方程变为 $y'^2 = \frac{3x'^2 - 2x'^3}{6x' + 3}$,

即 $x' = -\frac{1}{2}$ 为图形的渐近线, 所以渐近线为 $x + y + 1 = 0$.

如 370 题图 2 所示.



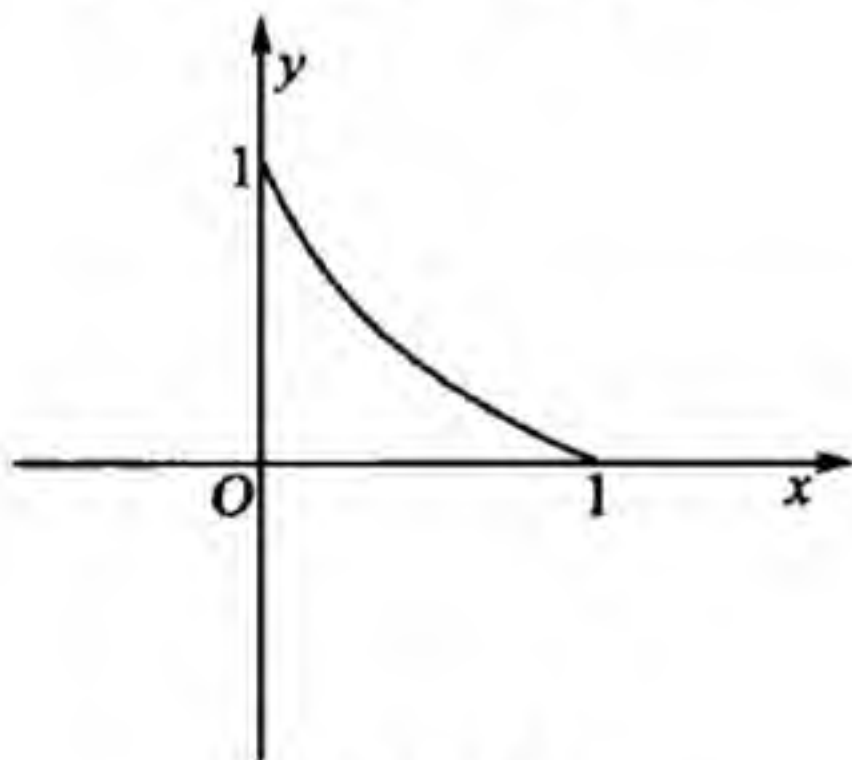
370 题图 1



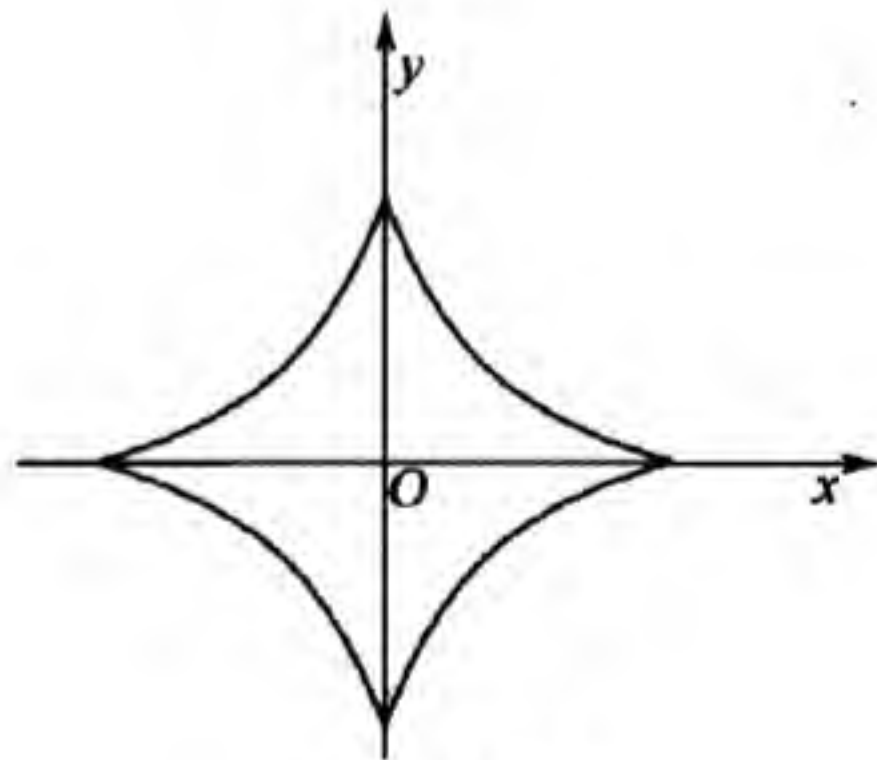
370 题图 2

(3) 如 370 题图 3 所示.

(4) 如 370 题图 4 所示.



370 题图 3



370 题图 4

(5) $y = x + 2k\pi$

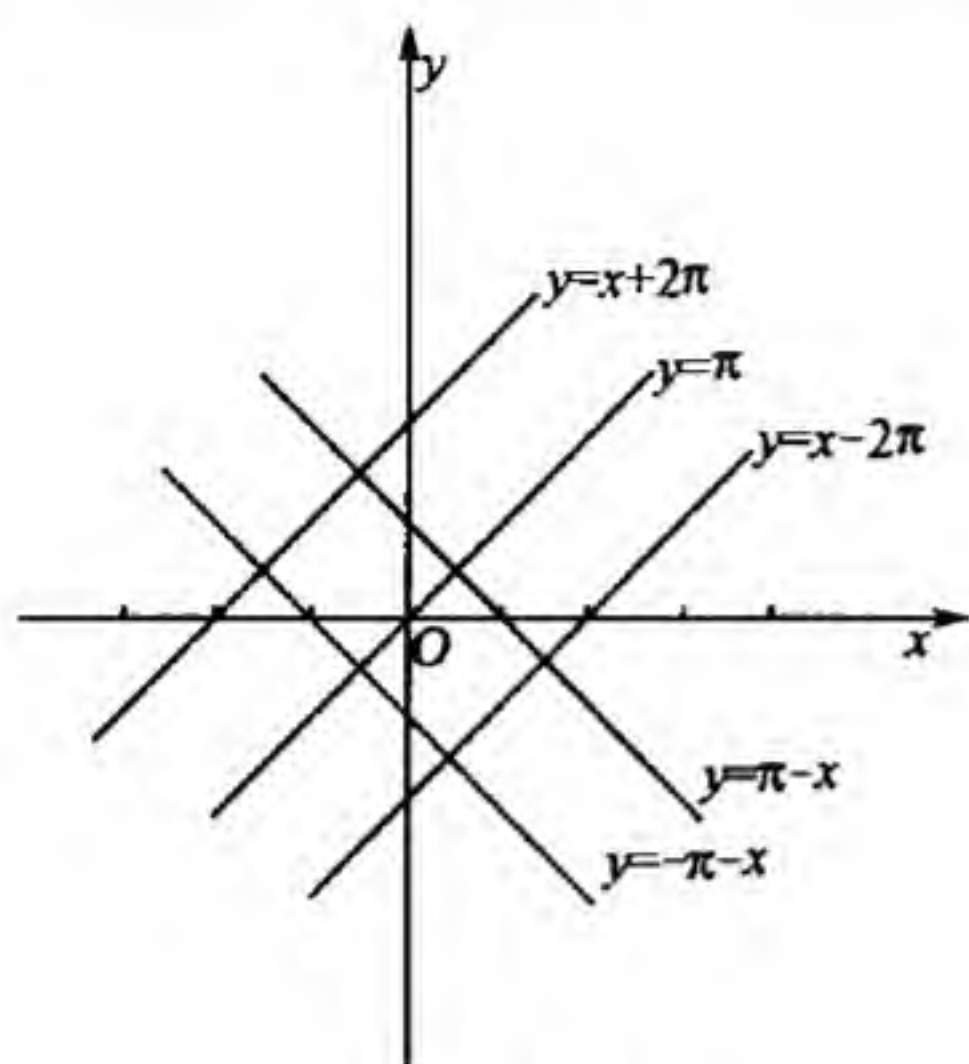
或 $y = (2k + 1)\pi - x \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

如 370 题图 5 所示.

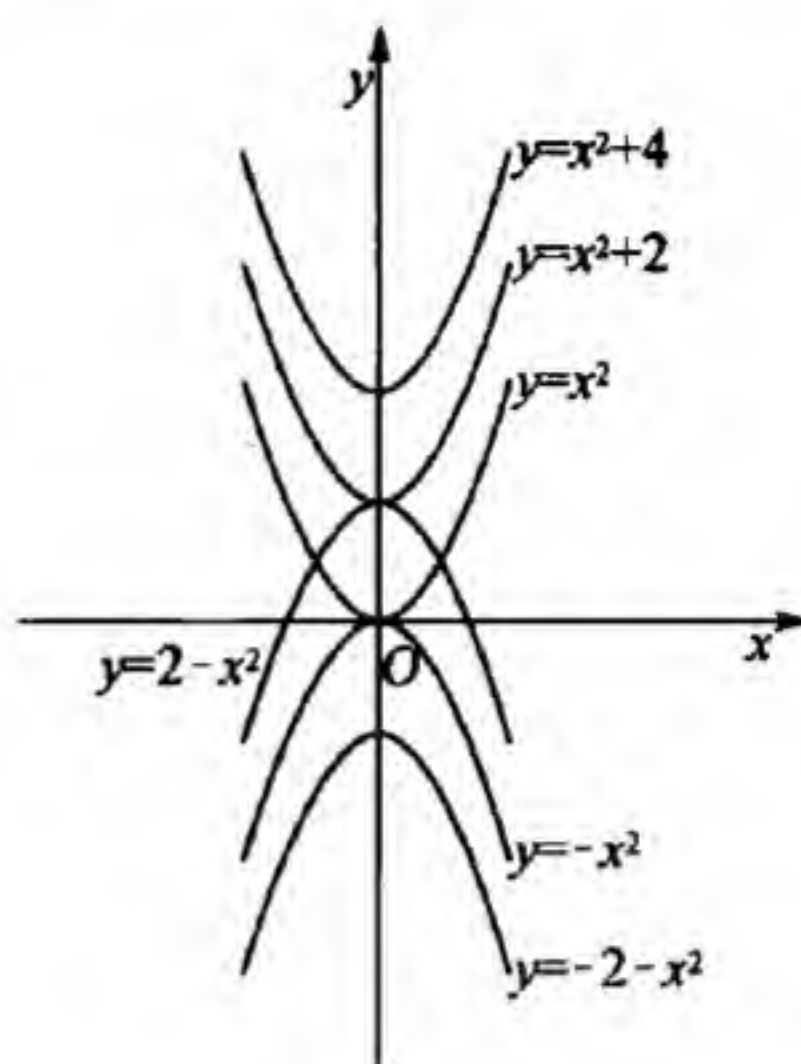
(6) $y = x^2 + 2k$

或 $y = 2k - x^2 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

如 370 题图 6.



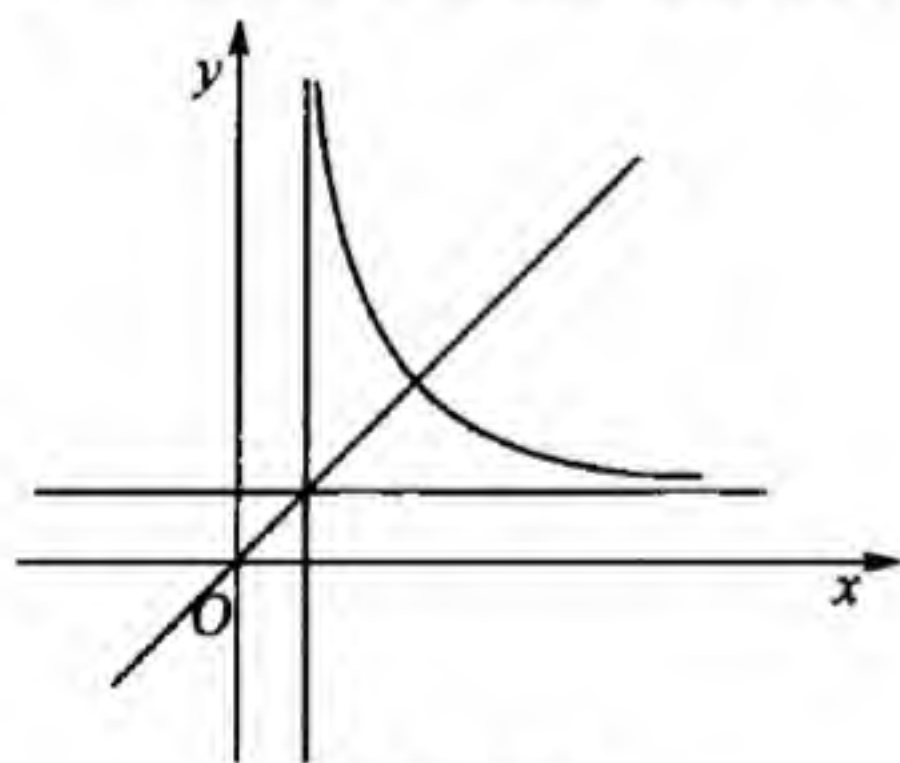
370 题图 5



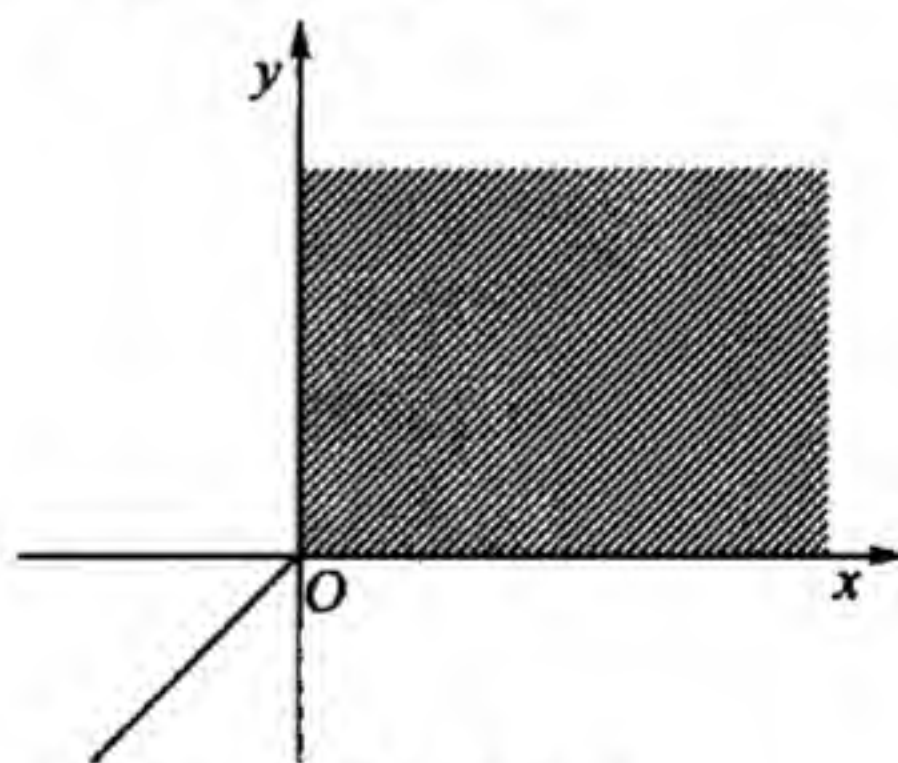
370 题图 6

(7) 如 370 题 7 所示(参阅 1544 题).

(8) 如 370 题图 8 所示,图形包括第一象限(含边界): $x \geq 0, y \geq 0$ 及位于第三象限的射线 $y = x (x < 0, y < 0)$.



370 题图 7



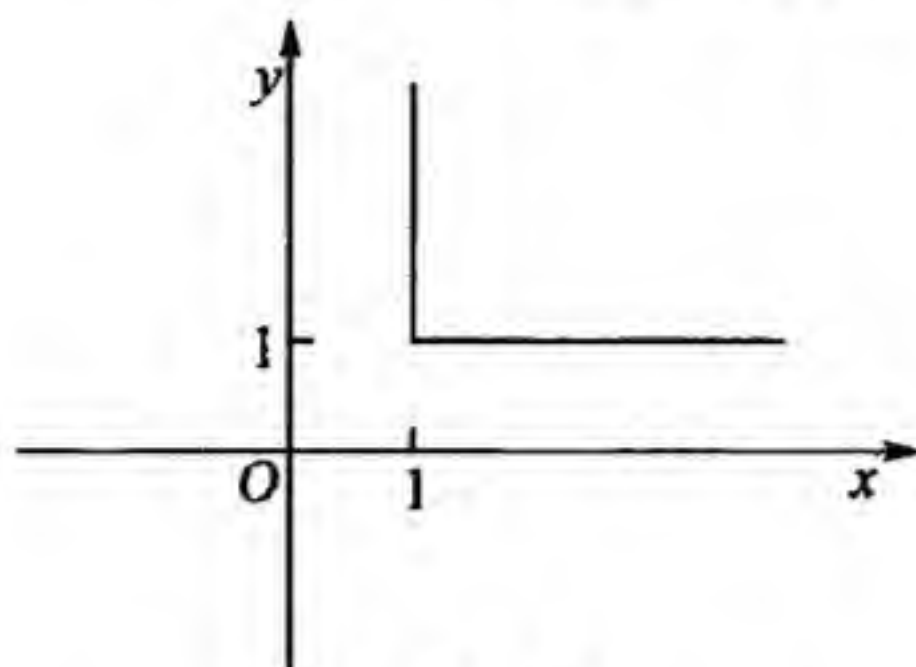
370 题图 8

【370. 1】 作出以下隐函数的图形.

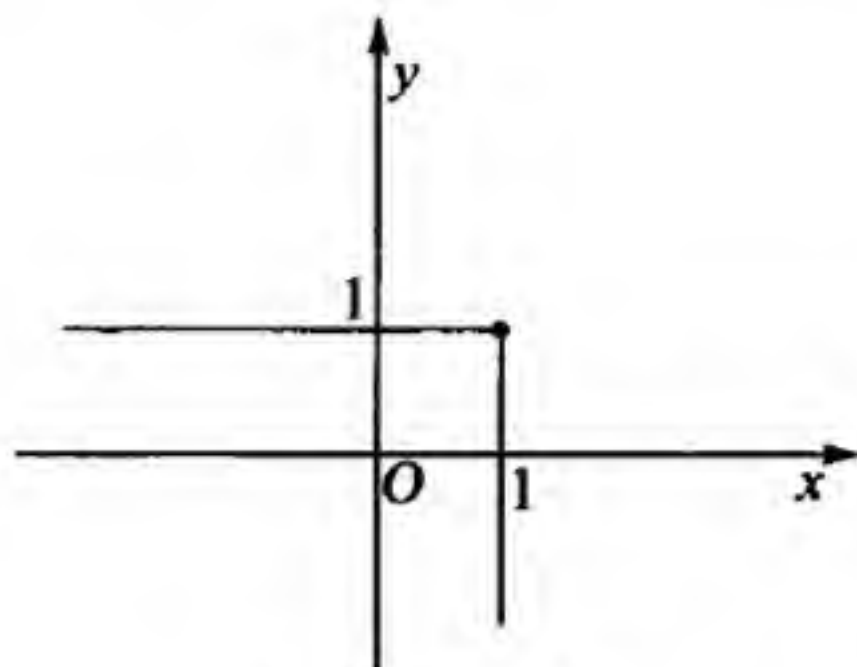
- (1) $\min\{x, y\} = 1$;
- (2) $\max\{x, y\} = 1$;
- (3) $\max(|x|, |y|) = 1$;
- (4) $\min\{x^2, y\} = 1$.

解 (1) 如 370.1 题图 1 所示,图形包含两条射线 $y = 1, x \geq 1$ 及 $x = 1, y \geq 1$.

(2) 如 370.1 题图 2 所示.



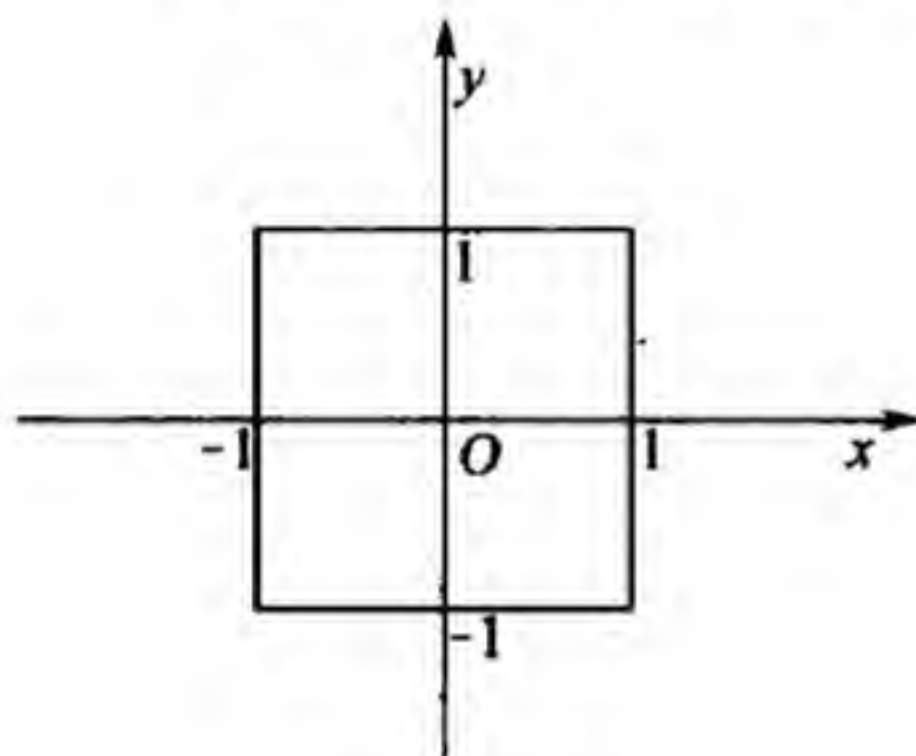
370.1 题图 1



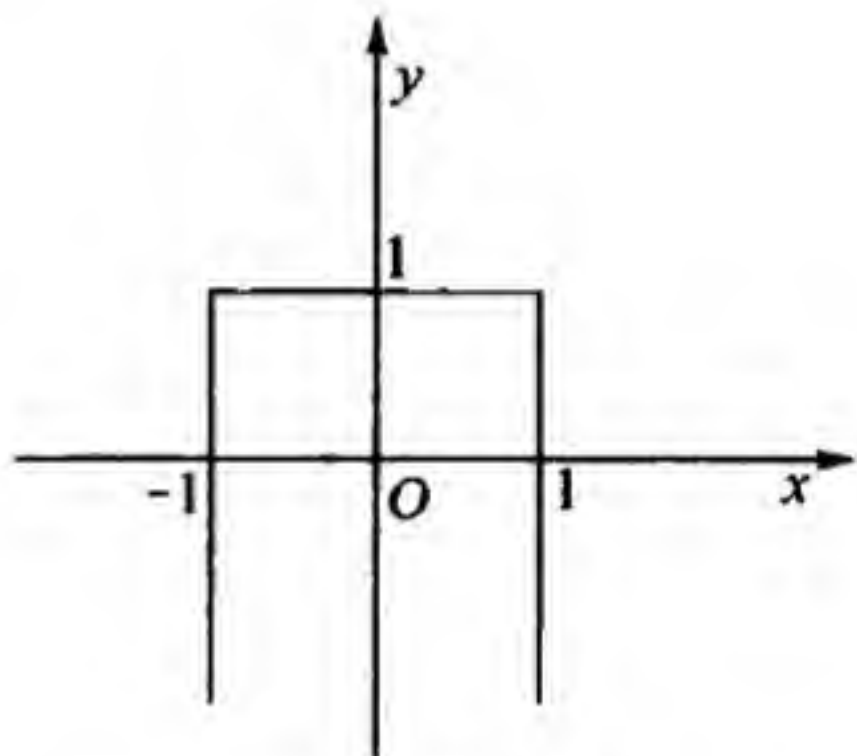
370.1 题图 2

(3) 如 370.1 题图 3 所示.

(4) 如 370.1 题图 4 所示.



370.1 题图 3



370.1 题图 4

【371】 在极坐标 (r, φ) 系中作出函数 $r = r(\varphi)$ 的图形. 若:

(1) $r = \varphi$ (阿基米德螺线);

(2) $r = \frac{\pi}{\varphi}$ (双曲螺线);

(3) $r = \frac{\varphi}{\varphi + 1}$ ($0 \leq \varphi < +\infty$);

(4) $r = 2^{\frac{\varphi}{\pi}}$ (对数螺线);

(5) $r = 2(1 + \cos \varphi)$ (心脏形线);

(6) $r = 10 \sin 3\varphi$ (三瓣玫瑰线);

(7) $r^2 = 36 \cos 2\varphi$ (伯努利双纽线);

(8) $\varphi = \frac{r}{r-1}$ ($r > 1$);

(9) $\varphi = 2\pi \sin r$.

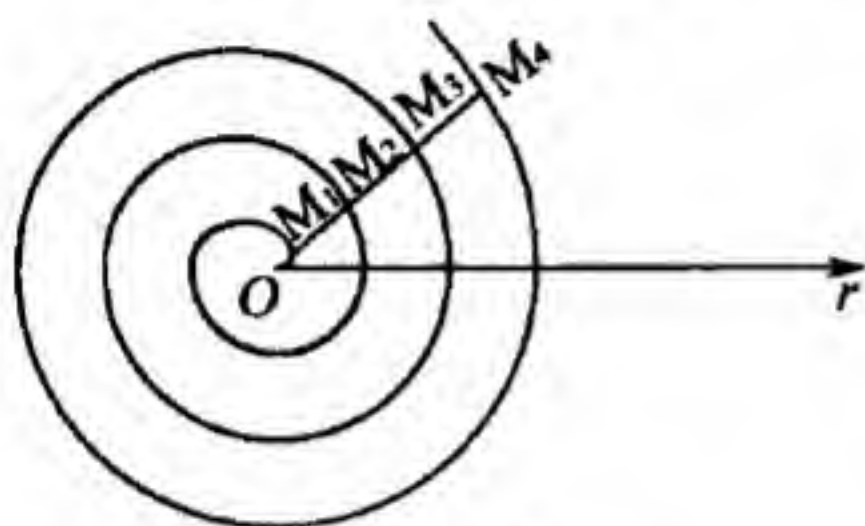
解 (1) 如 371 题图 1 所示.

$$M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = \cdots = 2\pi$$

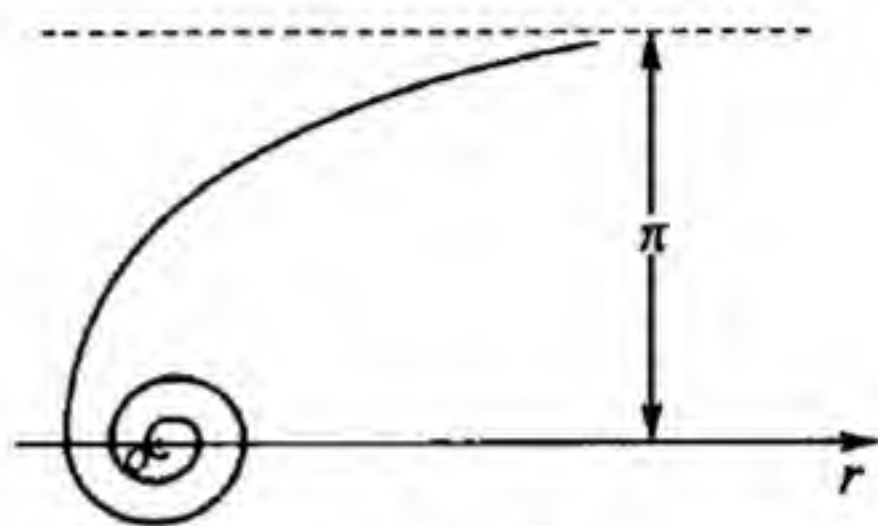
(2) 如 371 题图 2 所示.

(3) 如 371 题图 3 所示.

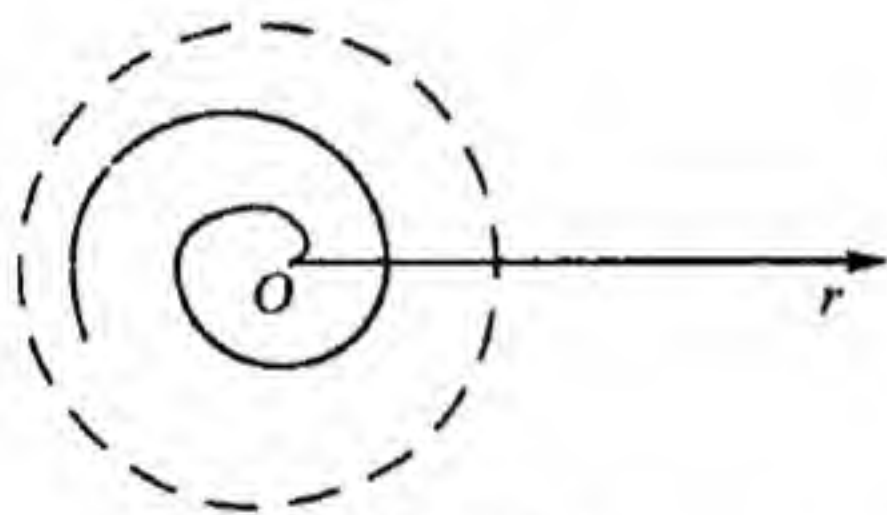
(4) 如 371 题图 4 所示.



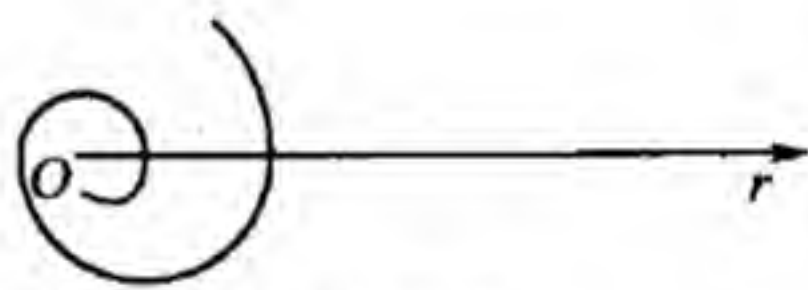
371 题图 1



371 题图 2



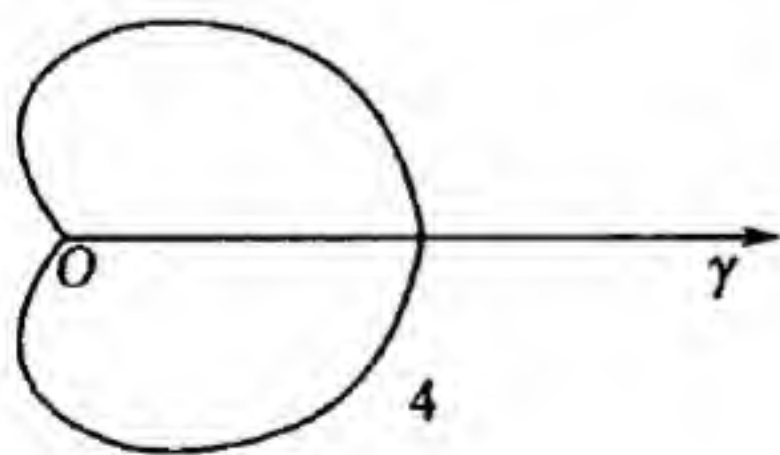
371 题图 3



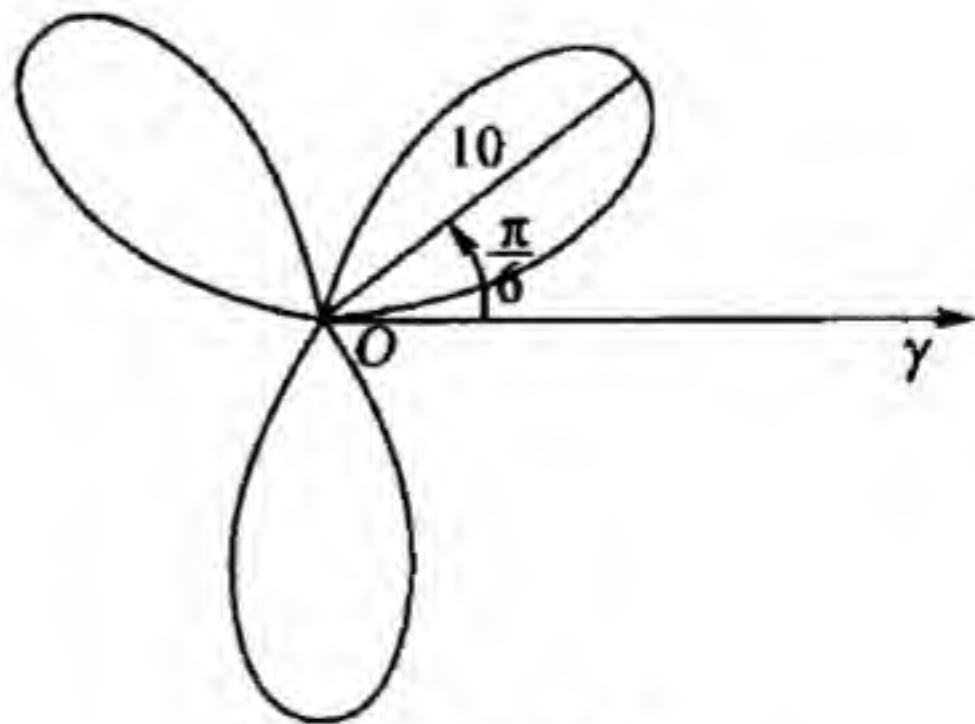
371 题图 4

(5) 如 371 题图 5 所示.

(6) 如 371 题图 6 所示.

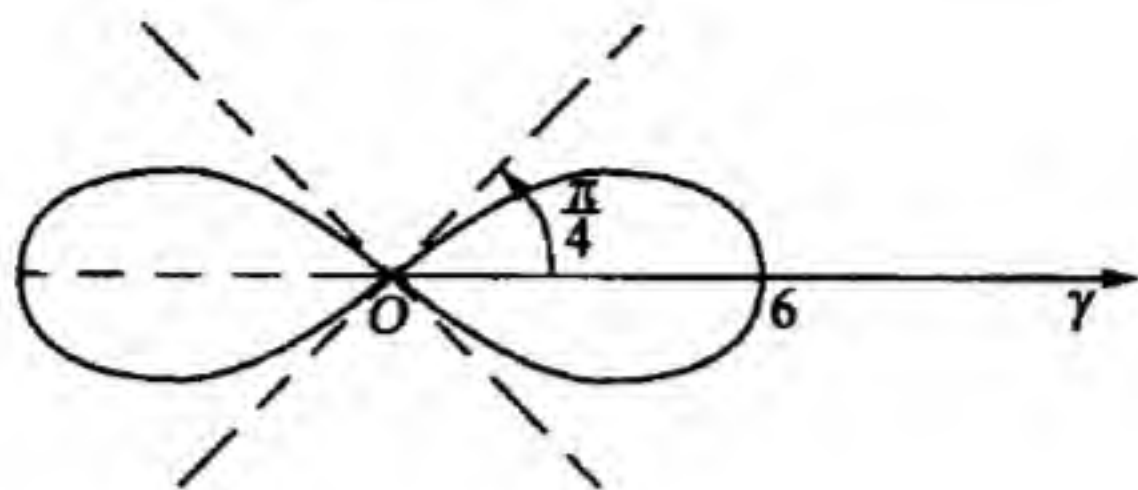


371 题图 5



371 题图 6

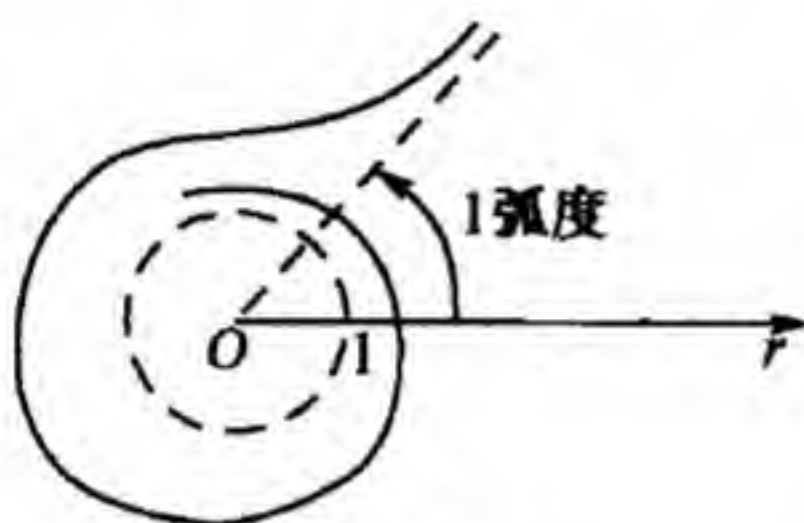
(7) 如 371 题图 7 所示.



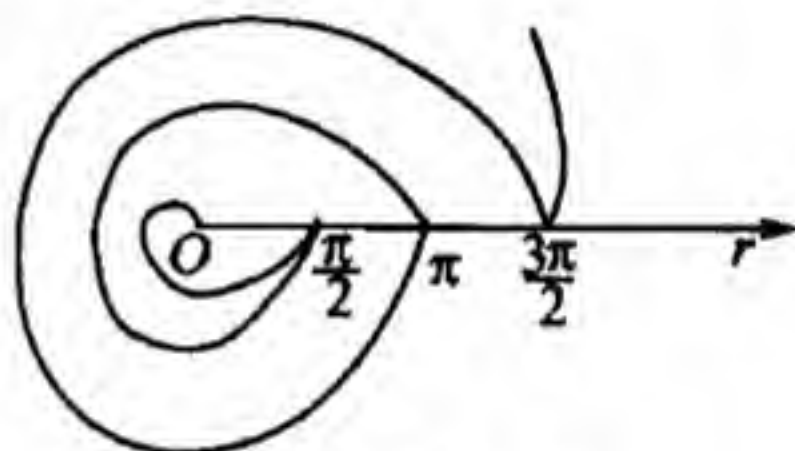
371 题图 7

(8) 如 371 题图 8 所示.

(9) 如 371 题图 9 所示.



371 题图 8



371 题图 9

【371. 1】 在极坐标系 (r, φ) 中作出下列函数的图形:

(1) $\varphi = 4r - r^2$; (2) $\varphi = \frac{12r}{1+r^2}$;

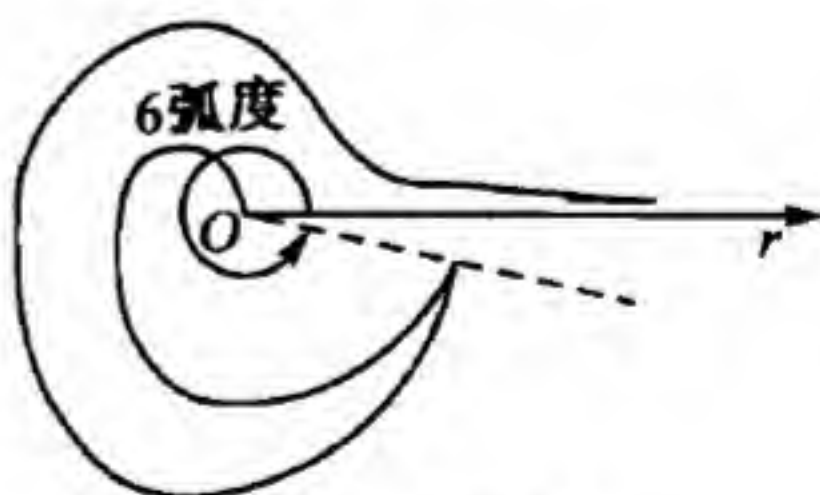
(3) $r^2 + \varphi^2 = 100$.

解 (1) $(r-2)^2 = 4-\varphi$, 如 371. 1 题图所示.

(2) 如 371. 1 题图 2 所示.

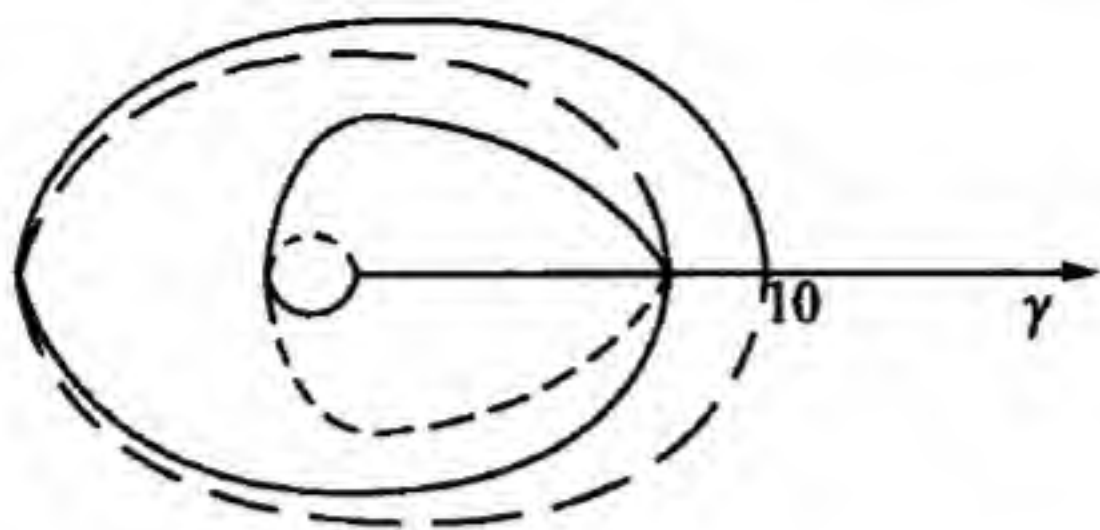


371. 1 题图 1



371. 1 题图 2

(3) 如 371. 1 题图 3 所示.



371.1 题图 3

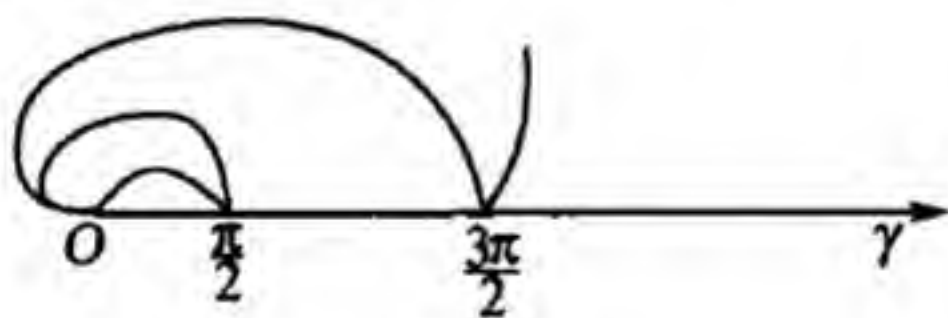
【371.2】 在极坐标系 (r, ρ) 中作出参数给定的函数的图形
($t \geq 0$ 参数)

$$(1) \begin{cases} \varphi = t \cos^2 t, \\ r = t \sin^2 t, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \varphi = 1 - 2^{-t} \sin \frac{\pi t}{2}, \\ r = 1 - 2^{-t} \cos \frac{\pi t}{2}. \end{cases}$$

解 (1) 当 $t = k\pi$ 时, $r = 0, \varphi = k\pi$;

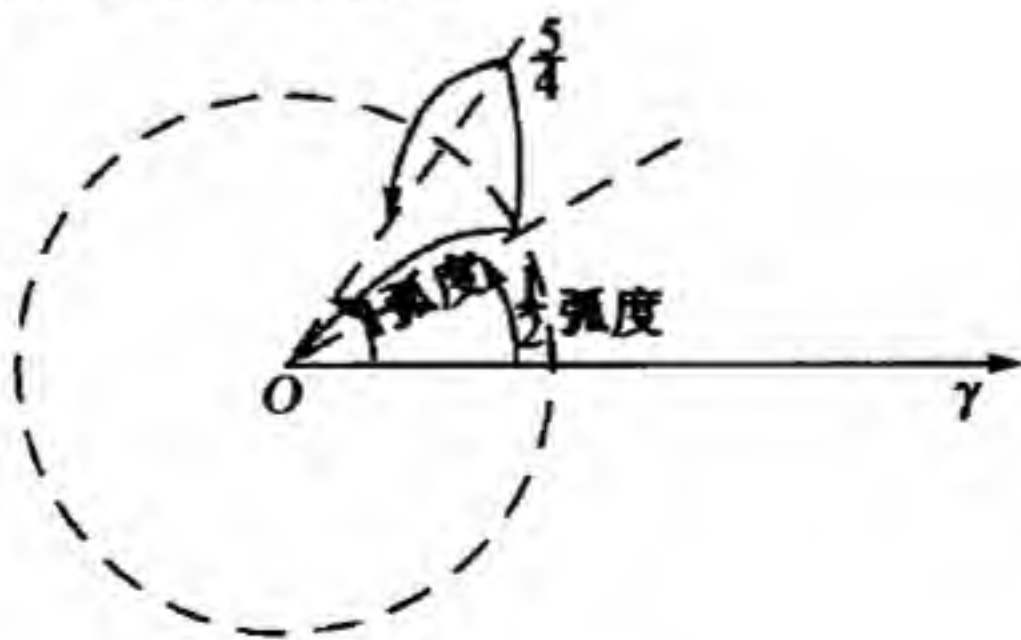
当 $t = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $r = k\pi + \frac{\pi}{2}, \varphi = 0 (k = 0, 1, 2, \dots)$.

如 371.2 题图 1 所示.



371.2 题图 1

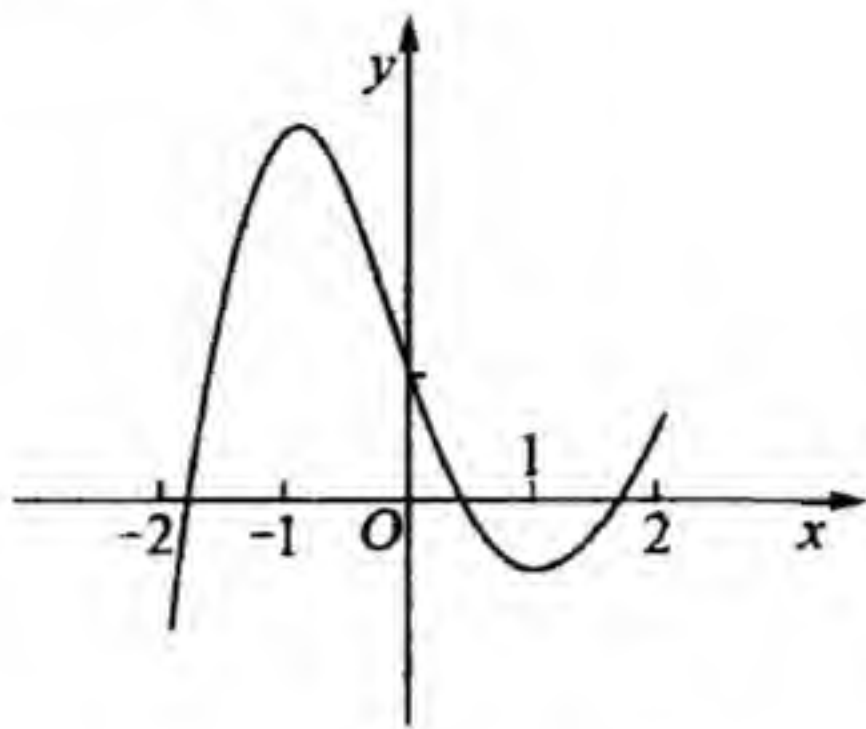
(2) 如 371.2 题图 2 所示.



371.2 题图 2

【372】 作出函数 $y = x^3 - 3x + 1$ 的图形, 以求方程 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 的近似解.

解 如 372 题图所示.



372 题图

因 $y|_{x=0} = 1 > 0$, $y|_{x=0.4} = -0.136$,
所以在 0 与 0.4 之间有一实根, 约为 0.35, 同法同求其它二近似根
为 1.53 及 -1.88.

用图解法解以下方程式(373 ~ 378).

【373】 $x^3 - 4x + 1 = 0$.

解 作函数 $y = x^3$ 及 $y = 4x + 1$ 的图, 它们交点的横坐标
即为方程的根, 如 373 题图所示. 在图示根 x_0 的附近研究

$$f(x) = x^3 - 4x + 1.$$

若对适当小的正数 δ , 有

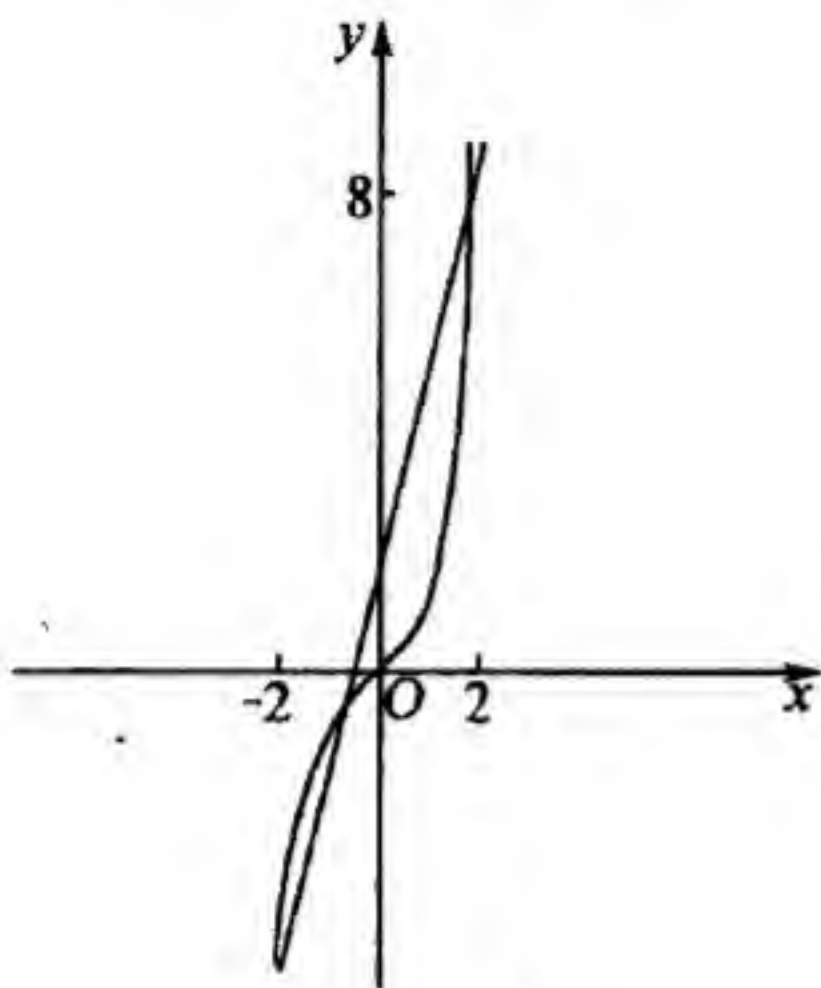
$$f(x_0 + \delta)f(x_0 - \delta) < 0,$$

则方程的根介于 $x_0 - \delta$ 及 $x_0 + \delta$ 之间, 则 x_0 可作为近似根.

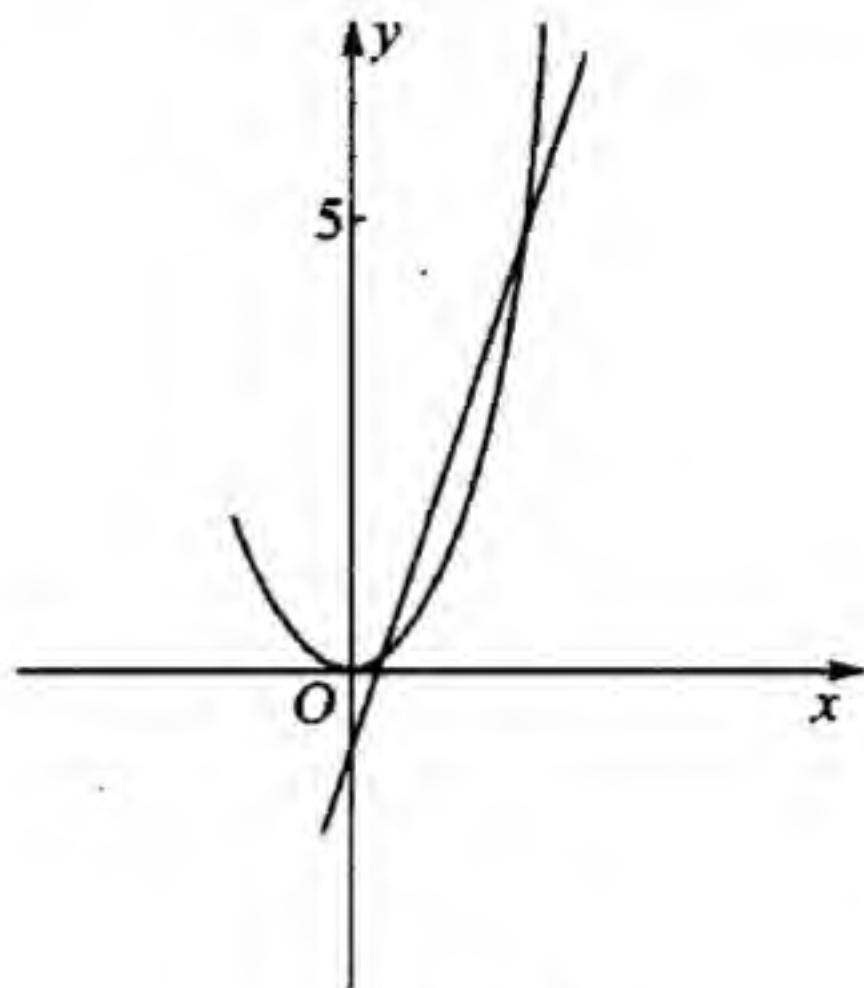
经判别, 方程的近似根为 -1.86, -0.25, 2.11.

【374】 $x^4 - 4x + 1 = 0$.

解 作函数 $y = x^4$ 及 $y = 4x - 1$ 的图形. 如 374 题图所示.
两曲线的交点的横坐标即为所求之根.



373 题图



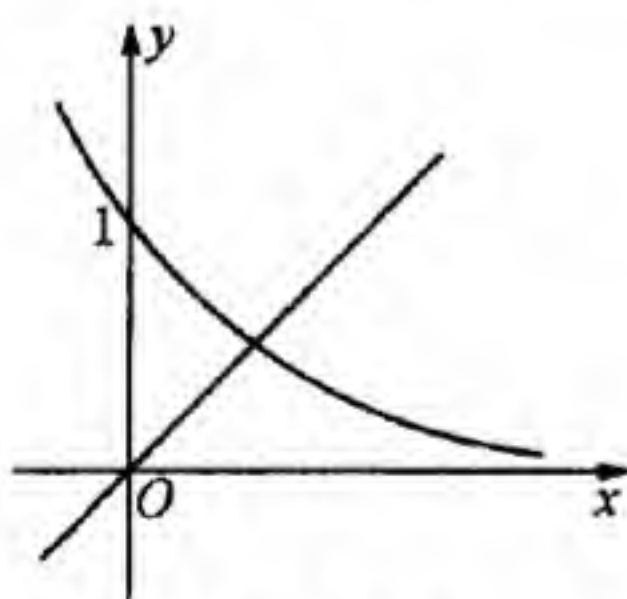
374 题图

经判别,其近似值为 0.25;1.49.

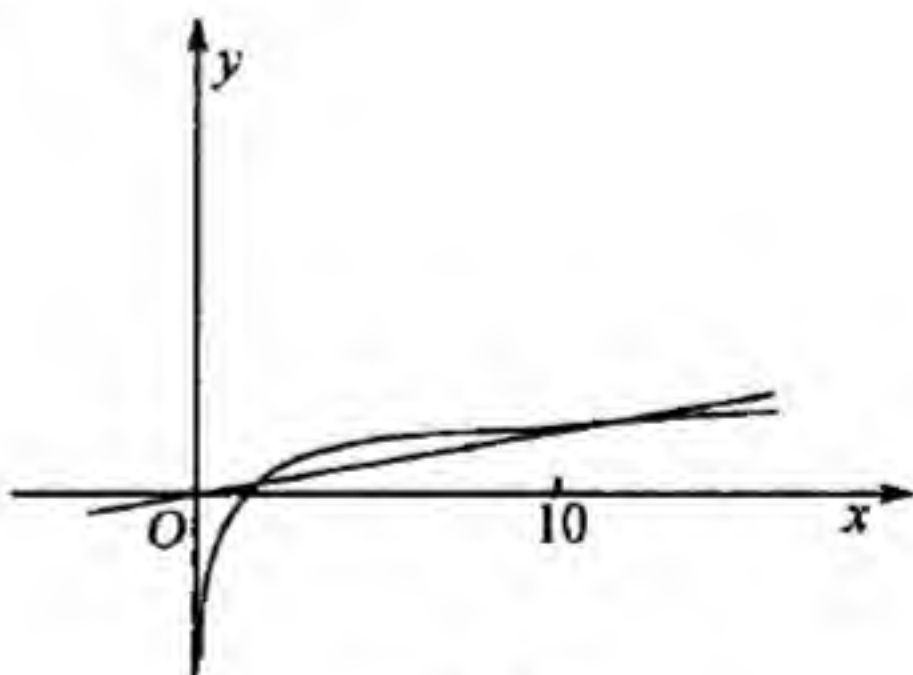
【375】 $x = 2^{-x}$.

解 作函数 $y = 2^{-x}$ 及 $y = x$ 的图,如 375 题图所示.两曲线交点的横坐标即为所求的根.

经判别其近似值为 0.64.



375 题图



376 题图

【376】 $\lg x = 0.1x$.

解 作函数 $y = \lg x$ 及 $y = 0.1x$ 的图形,如 376 题图所示.两曲线的交点的横坐标即为方程的根

经判别方程的根为 1.37(近似值)及 10(精确值).

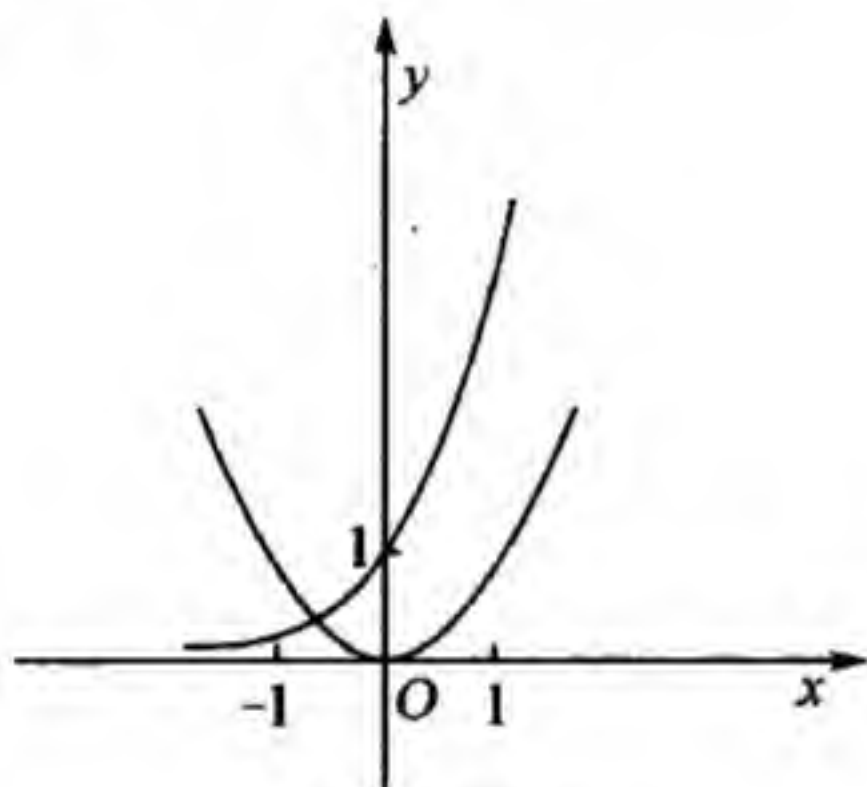
【377】 $10^x = x^2$.

解 作函数 $y = 10^x$ 及 $y = x^2$ 的图形, 如 377 题图所示. 两曲线交点的横坐标即为原方程的根.

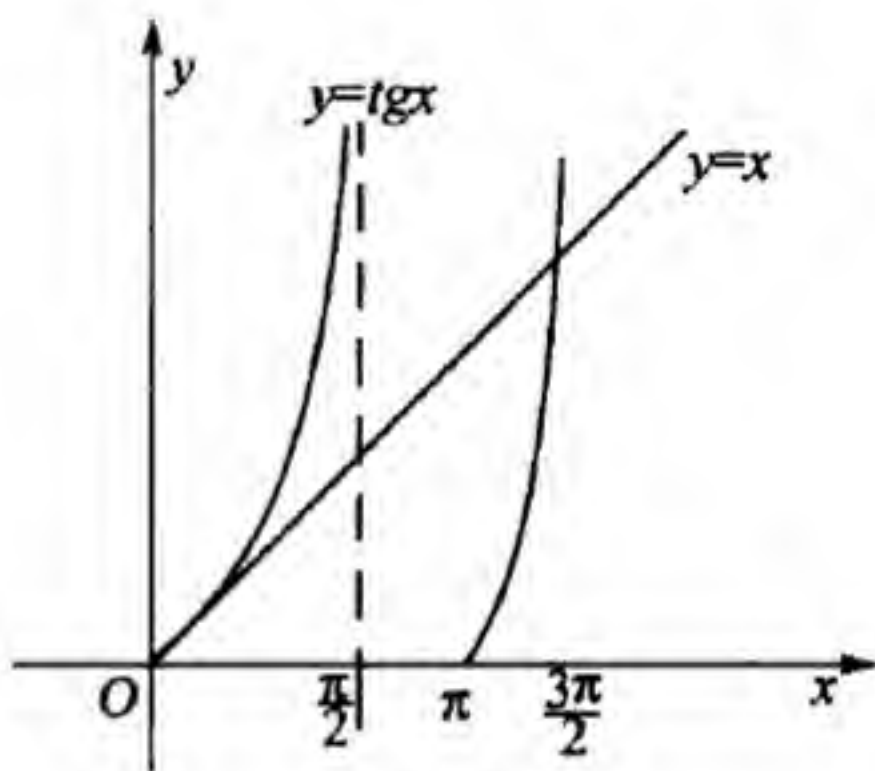
经判别其近似值为 -0.54 .

【378】 $\tan x = x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$.

解 作函数 $y = \tan x$ 及 $y = x$ 的图形, 如 378 题图所示, 两曲线交点的横坐标即为所求之根, 它们是 0 (精确值) 4.49 (近似值).



377 题图



378 题图

用图解法解以下方程组(379 ~ 380).

【379】 $x + y^2 = 1, \quad 16x^2 + y = 4$.

解 作函数 $y^2 = 1 - x$ 及 $y = 4 - 16x^2$ 的图形, 如 379 题图所示. 两曲线的交点为 A, B, C, D . 它们的一对坐标即为所求方程的解. 它们的近似值为

$$x_1 = -0.42, y_1 = 1.19 (A \text{ 点}),$$

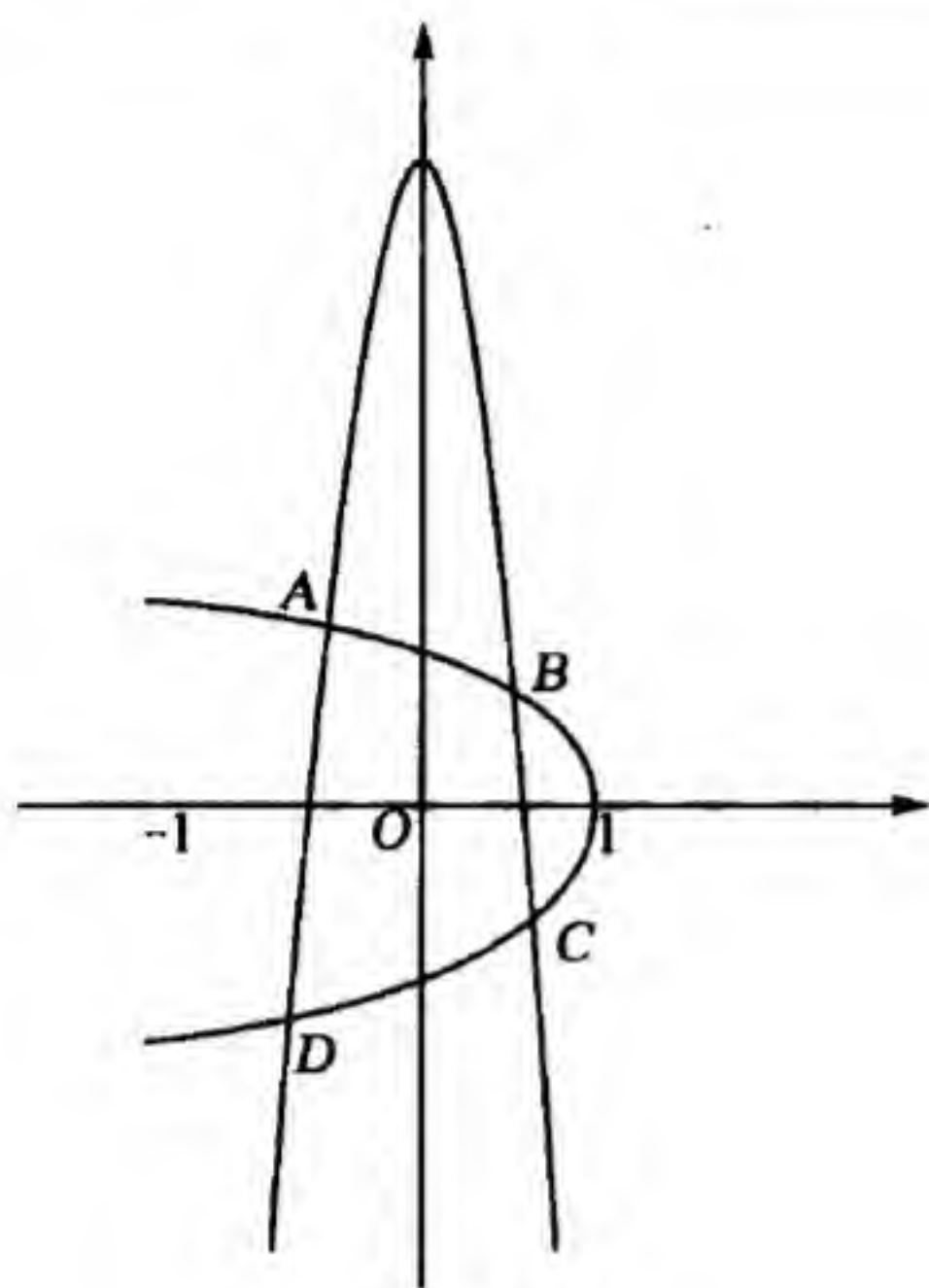
$$x_2 = 0.43, y_2 = 0.74 (B \text{ 点}),$$

$$x_3 = 0.54, y_3 = -0.68 (C \text{ 点}),$$

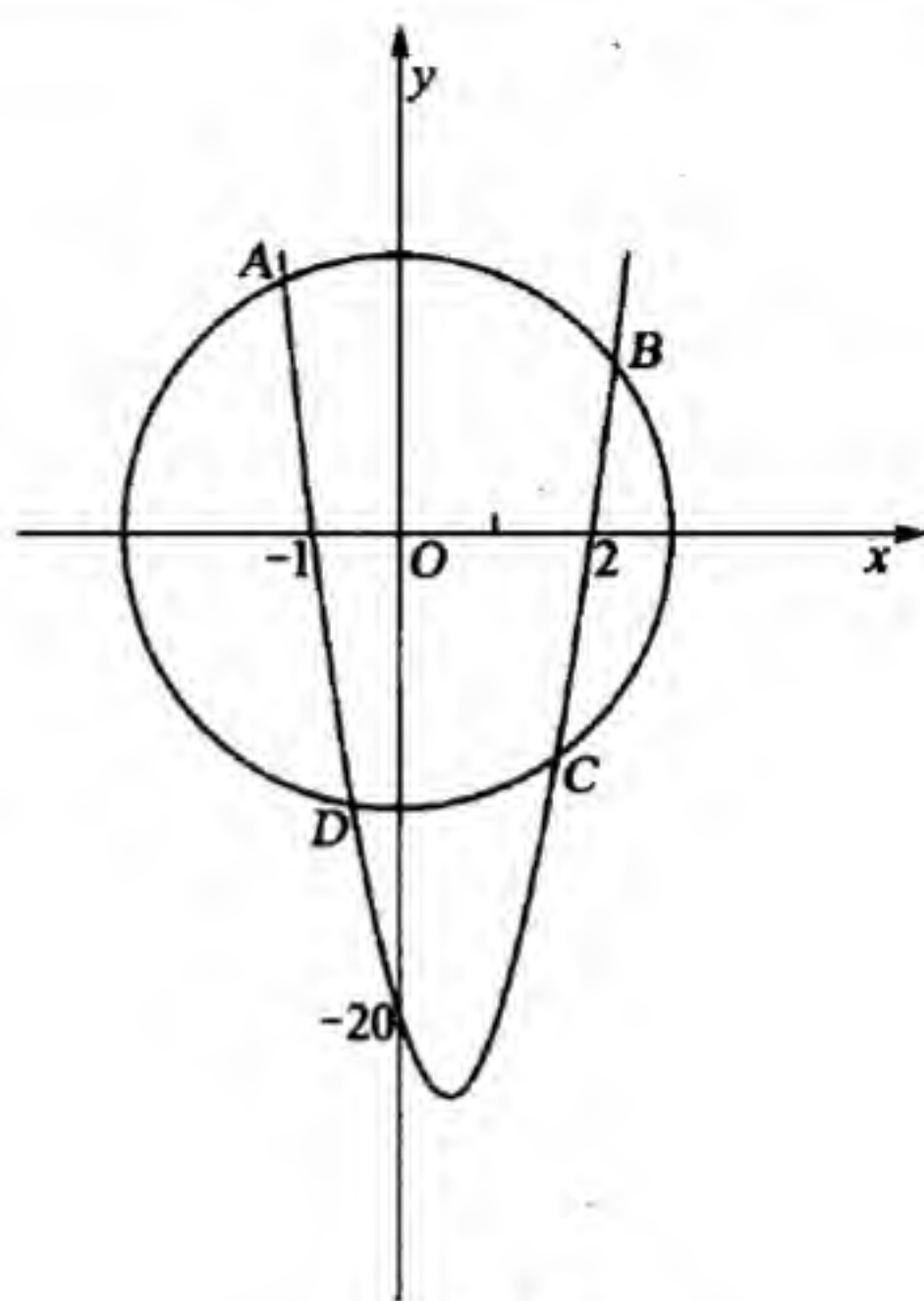
$$x_4 = -0.57, y_4 = -1.26 (D \text{ 点}).$$

【380】 $x^2 + y^2 = 100, y = 10(x^2 - x - 2)$.

解 作曲线 $x^2 + y^2 = 100$ 及 $y = 10(x^2 - x - 2)$ 的图形. 如 380 题图, 两曲线的交点的坐标即为方程组的解, 它们的近似值为



379 题图



380 题图

$$\begin{aligned} x_1 &= -1.30, y_1 = 9.91 (\text{A 点}), \\ x_2 &= 2.30, y_2 = 9.73 (\text{B 点}), \\ x_3 &= 1.62, y_3 = -9.87 (\text{C 点}), \\ x_4 &= -0.62, y_4 = -9.98 (\text{D 点}). \end{aligned}$$

§ 5. 函数的极限

1. 函数的有界性

如果存在两个数 m 及 M , 使得当 $x \in (a, b)$ 时, $m \leq f(x) \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在此区间 (a, b) 为有界函数.

数 $m_0 = \inf_{x \in (a, b)} \{f(x)\} = \max m$ 被称作函数 $f(x)$ 在此区间 (a, b) 的下确界, 而数 $M_0 = \sup_{x \in (a, b)} \{f(x)\} = \min M$ 被称作函数 $f(x)$ 在此区间 (a, b) 的上确界. 差 $M_0 - m_0$ 被称作函数在区间 (a, b) 的振幅.

2. 函数在某一点的极限

设函数 $f(x)$ 在有聚点 a 的集 $X = \{x\}$ 上定义, 符号:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad ①$$

表示对于任一个数 $\epsilon > 0$, 都存在数 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使得满足条件 $0 < |x - a| < \delta$ 且使 $f(x)$ 有意义的一切 x , 下列不等式成立:

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

函数极限 ① 存在的必要且充分条件是: 对于每一个序列 $x_n \rightarrow a, x_n \neq a (x_n \in X; n = 1, 2, \dots)$, 成立等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

两个著名的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

柯西判别法: 函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在, 当且仅当对于每一个 $\epsilon > 0$ 都能找到 $\delta = \delta(\epsilon) > 0, 0 < |x' - a| < \delta$ 和 $0 < |x'' - a| < \delta$ 时, 即有

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon$$

式中 x', x'' 为函数 $f(x)$ 定义域内的点.

3. 单侧极限

若当 $0 < a - x < \delta(\epsilon)$ 时, 有 $|A' - f(x)| < \epsilon$, 则数 A' 称作函数 $f(x)$ 在 a 点的左极限:

$$A' = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$$

同样, 若当 $0 < x - a < \delta(\epsilon)$ 时, 有 $|A'' - f(x)| < \epsilon$, 则数 A'' 称作函数 $f(x)$ 在 a 点的右极限:

$$A'' = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$$

对于函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在的必要且充分条件为:

$$f(a-0) = f(a+0).$$

4. 无穷极限

符号:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

表示对于任何的 $E > 0$, 只要 $0 < |x - a| < \delta(E)$, 则有

$|f(x)| > E$ 成立.

5. 聚点

如果对于某序列 $x_n \rightarrow a (x_n \neq a)$ 成立等式 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B$, 则数 B (或符号 ∞) 称作函数 $f(x)$ 在点 a 的聚点 (相应地为有穷的或无穷的).

其中最小的和最大的聚点, 分别用以下符号表示:

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) \text{ 和 } \limsup_{x \rightarrow a} f(x),$$

它们分别称为函数 $f(x)$ 在点 a 的下极限和上极限.

等式 $\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \limsup_{x \rightarrow a} f(x)$ 是函数 $f(x)$ 在点 a 存在极限 (有穷的和无穷的) 的必要且充分条件.

【381】 函数 $f(x)$ 由下列条件定义:

若 $x = \frac{m}{n}$, 则 $f(x) = n$.

式中 m 和 n 为互质整数且 $n > 0$;

若 x 是无理数, 则 $f(x) = 0$.

证明此函数在每一点 x 是有穷的, 但并非有界 (即在该点的任何邻域内是无界的).

证 对于固定 x_0 , $f(x_0)$ 确定. 下面我们证明 $f(x)$ 在 x_0 的任何邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内无界 ($\delta > 0$). 由于有理数在实数域内处处稠密, 故在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内有无穷多个有理数. 反设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 有界, 即存在 $M > 0$, 使得当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, $|f(x)| \leq M$.

由 $f(x)$ 的定义知, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内的有理数只能落在下列有理数中 $\frac{k}{1}, \frac{k}{2}, \dots, \frac{k}{[M]}$, 其中 k 是与分母互质的整数, $[M]$ 为 M 的整数部分. 由于这些有理数位于 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中, 故

$$(x_0 - \delta)[M] < k < (x_0 + \delta)[M]$$

这表示在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中的有理数仅为有限多个, 矛盾! 因此 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为无界的.

【382】 如果函数 $f(x)$ 在:(1) 开区间;(2) 闭区间内的每一个点确定而有界,则这个函数在给定的开区间或对应的闭区间内是否有界?

请举出适当的例子说明.

证 (1) 不一定. 例如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内每一点确定而有界,但 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

(2) 是有界的. 事实上,若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界,则存在 $x_n \in [a, b]$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$. 又存在 $x_0 \in [a, b]$ 及 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$ 显然 $f(x)$ 在 x_0 无界,矛盾.

【383】 证明:函数 $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ 在区间 $-\infty < x < +\infty$ 内是有界的.

证 当 $|x| \leq 1$ 时, $|f(x)| < \frac{1+1}{1} = 2$;

当 $|x| > 1$ 时,有 $x^2 < x^4$, 故 $|f(x)| < \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1$.

因此在 $(-\infty, +\infty)$ 内恒有 $|f(x)| < 2$, 即函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

【384】 证明:函数 $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 在点 $x = 0$ 的任何邻域内是无界的,但当 $x \rightarrow 0$ 时,不是无穷大.

证 当 $x = \frac{1}{k\pi}$ 时, $f(x) = (-1)^k k\pi$, 而当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{k\pi} \rightarrow 0$, $f(x) = (-1)^k k\pi \rightarrow \infty$. 因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的任何邻域内是无界的,但当 $x = \frac{2}{(3k+1)\pi}$ 时, $f(x) = 0$. 因此,当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 不是无穷大.

【385】 研究函数 $f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}$ 在区间 $0 < x < \varepsilon$ 内的有界性.

解 在 $(0, \epsilon)$ 内有 $f(x) \leq |\ln \epsilon|$, 即 $f(x)$ 在 $(0, \epsilon)$ 内上方有界. 而当 $x = \frac{2}{3k+1}$ 时,

$$f(x) = \ln \frac{2}{2k+1} \longrightarrow -\infty (k \rightarrow +\infty),$$

所以 $f(x)$ 下方无界.

【386】 证明: 函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 在域 $0 \leq x < +\infty$ 内有下确界 $m = 0$ 和上确界 $M = 1$.

证 当 $0 \leq x < +\infty$ 时, 显然有,

$$1 \geq f(x) = \frac{x}{1+x} \geq 0.$$

又 $f(0) = 0$, 故下确界 $m = 0$. 且设 $x_n = n$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+n} = 1.$$

故上确界 $M = 1$.

【387】 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并单调递增. 在此闭区间内函数的下确界和上确界等于多少?

解 上确界 $M = f(b)$ 下确界 $m = f(a)$.

确定以下函数的下确界和上确界(388 ~ 396).

【388】 $f(x) = x^2$ 在 $[-2, 5)$ 内.

解 $m = 0, M = 25$.

求函数的上确界和下确界(389 ~ 396).

【389】 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内.

解 $m = 0, M = 1$.

【390】 $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 内.

解 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $0 \leq f(x) \leq 1$, 而 $f(1) = 1$, 当 $x_n = n \rightarrow +\infty$ 时, $f(x_n) = \frac{2n}{1+n^2} \rightarrow 0$, 故 $m = 0, M = 1$.

【391】 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内.

解 因为 $f(x) = x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \geq 2$

而 $f(1) = 2$, 所以 $m = 2$. 而当 $x_n = n \rightarrow +\infty$ 时

$$f(x_n) = n + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty,$$

故 $M = +\infty$.

【392】 $f(x) = \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内.

解 $m = -1, M = 1$.

【393】 $f(x) = \sin x + \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 内.

解 由 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

知 $m = -\sqrt{2}, M = \sqrt{2}$.

【394】 $f(x) = 2^x$ 在 $(-1, 2)$ 内.

解 因为 $f(x) = 2^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为单调增的函数, 故

$$m = f(-1) = \frac{1}{2}, M = 2^2 = 4.$$

【395】 $f(x) = [x]$; (1) 在 $(0, 2)$ 内和 (2) 在 $[0, 2]$ 内.

解 (1) $m = 0, M = 1$;

(2) $m = 0, M = 2$.

【396】 $f(x) = x - [x]$ 在 $[0, 1]$ 内.

解 因为 $0 \leq f(x) \leq 1$. 而 $f(0) = 0$, 所以 $m = 0$. 当 $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ 时, $f(x_n) = 1 - \frac{1}{n} (n \geq 2)$.

所以当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $f(x_n) \rightarrow 1$. 故 $M = 1$.

【397】 确定函数 $f(x) = x^2$ 在以下区间内的振幅:

(1) $(1, 3)$; (2) $(1.9, 2.1)$;

(3) $(1.99, 2.01)$; (4) $(1.999, 2.001)$.

解 (1) 用 ω 表示振幅, 则 $\omega = M - m$, 因为 $m = 1, M = 9$. 所以 $\omega = 8$.

$$(2) m = (1.9)^2, M = (2.1)^2,$$

所以 $\omega = (2.1)^2 - (1.9)^2 = 0.8,$

$$(3) m = (1.99)^2, M = (2.01)^2,$$

所以 $\omega = (2.01)^2 - (1.99)^2 = 0.08.$

$$(4) m = (1.999)^2, M = (2.001)^2,$$

$$\omega = (2.001)^2 - (1.999)^2 = 0.008.$$

【398】 确定函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ 在以下区间内的振幅:

$$(1) (-1, 1); \quad (2) (-0.1, 0.1);$$

$$(3) (-0.01, 0.01); \quad (4) (-0.001, 0.001).$$

解 (1) 当 x 从 -1 变到 0 时, $\frac{1}{x}$ 从 -1 变到 $-\infty$;

当 x 从 0 变到 1 时, $\frac{1}{x}$ 从 $+\infty$ 变到 1 . 所以

$$m = -\frac{\pi}{2}, M = \frac{\pi}{2}.$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

$$(2) \omega = \pi. \quad (3) \omega = \pi. \quad (4) \omega = \pi.$$

【399】 设 $m[f]$ 及 $M[F]$ 分别是函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的下确界和上确界.

证明: 如果 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 是在 (a, b) 内定义的函数, 则

$$m[f_1 + f_2] \geq m[f_1] + m[f_2],$$

及 $M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2].$

举出函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的例子, 使其在最后的二关系中是:

(1) 等式的情形;

(2) 不等式的情形.

证 因为对任何 $x \in (a, b)$ 恒有

$$m[f_1] \leq f_1(x) \leq M[f_1],$$

$$m[f_2] \leq f_2(x) \leq M[f_2],$$

所以 $m[f_1] + m[f_2] \leq f_1(x) + f_2(x) \leq M[f_1] + M[f_2],$

从而有 $m[f_1] + m[f_2] \leq m[f_1 + f_2]$,

$$M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2].$$

例 (1) $f_1(x) = x^2, f_2(x) = x^3, (a, b) = (0, 1)$,
有 $m[f_1] + m[f_2] = 0 = m[f_1 + f_2]$,

$$M[f_1] + M[f_2] = 1 + 1 = 2 = M[f_1 + f_2].$$

(2) $f_1(x) = x^2, f_2(x) = -x^2, (a, b) = (-1, 1)$,
则 $m[f_1] = 0, m[f_2] = -1$,

$$M[f_1] = 1, M[f_2] = 0,$$

$$m[f_1 + f_2] = M[f_1 + f_2] = 0.$$

从而 $m[f_1] + m[f_2] < m[f_1 + f_2]$,

$$M[f_1 + f_2] < M[f_1] + M[f_2].$$

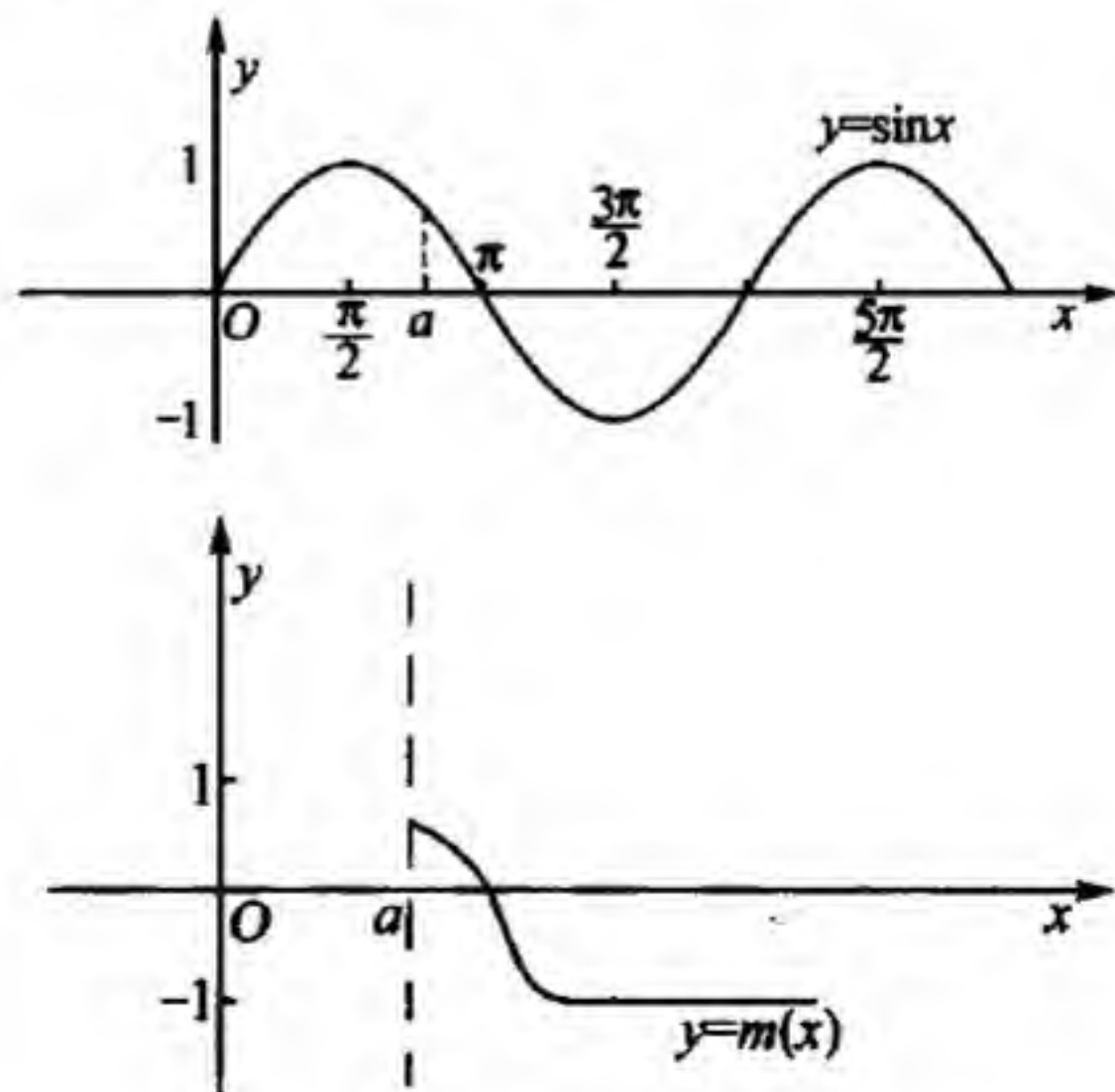
【400】 设函数 $f(x)$ 在域 $[a, +\infty)$ 内定义, 且在每个闭区间 $[a, b] \subset [a, +\infty)$ 有界. 假定

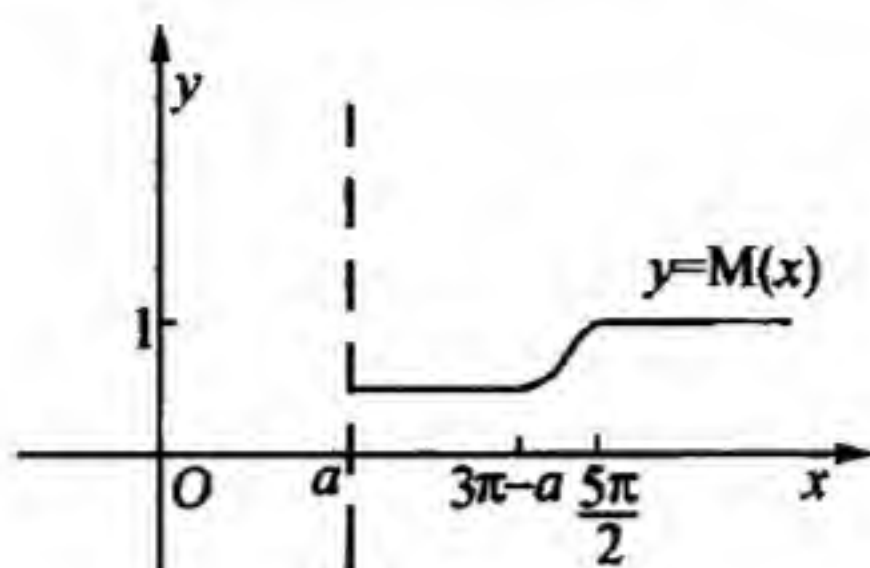
$$m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\} \text{ 及 } M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\},$$

作出函数 $y = m(x)$ 及 $y = M(x)$ 的图形. 设

(1) $f(x) = \sin x$; (2) $f(x) = \cos x$.

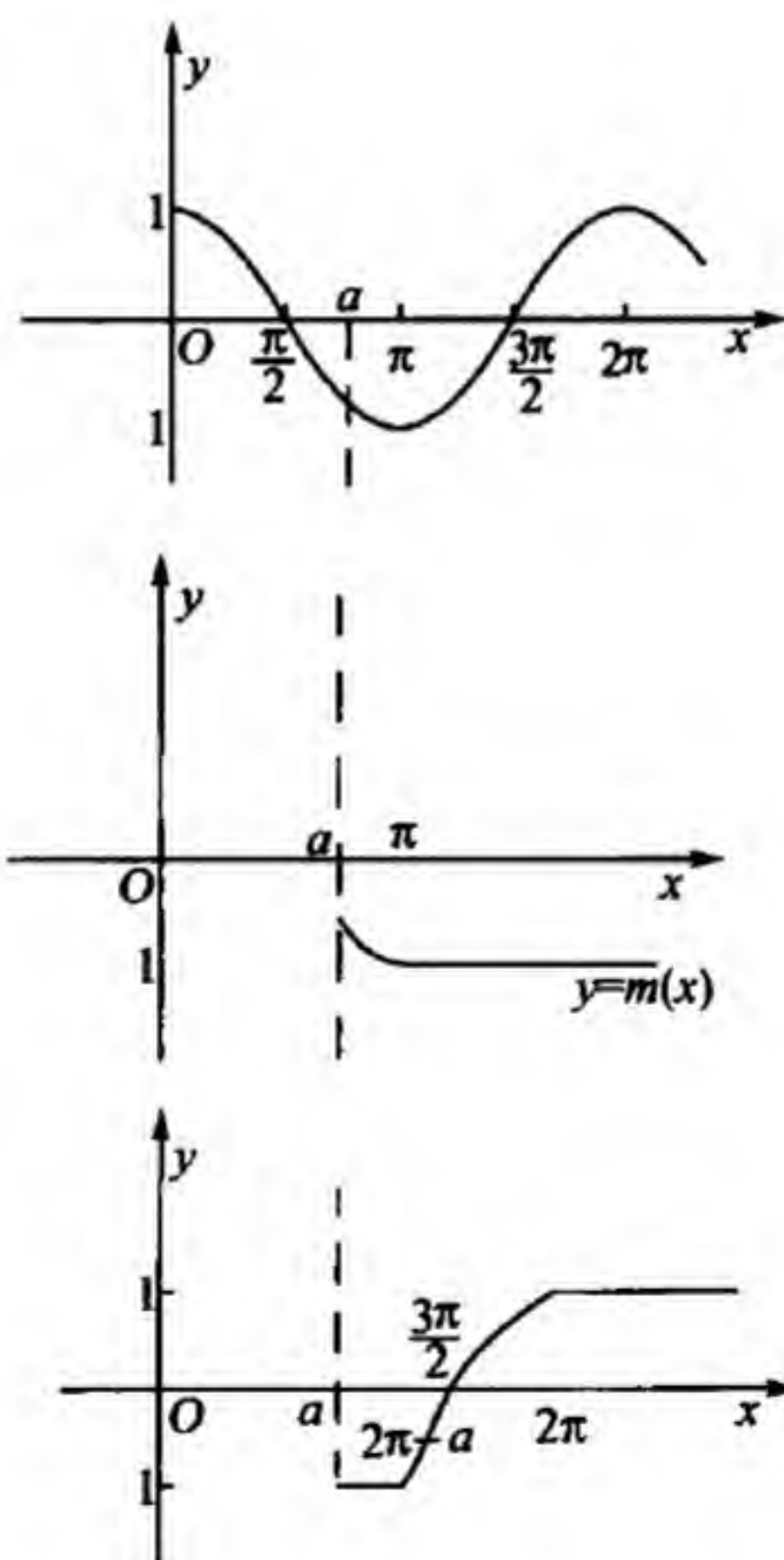
解 (1) 如 400 题图(1) 所示.





400 题图 1

(2) 如 400 题图(2) 所示.



400 题图 2

【401】 使用“ $\epsilon - \delta$ ”论证法, 证明 $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

填下表:

ϵ	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
δ					

证 因

$$|x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2|.$$

当 $|x - 2| < 1$, 即 $1 < x < 3$ 时,

$$|x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2| < 5 |x - 2|,$$

所以, 对任给的 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{5}\right\}$. 于是当 $0 < |x - 2| < \delta$ 时, $|x^2 - 4| < \epsilon$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

填表

ϵ	0.1	0.01	0.001	0.000 1	...
δ	0.02	0.002	0.000 2	0.000 02	...

【402】 用“ $E-\delta$ ”语言法, 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

填下表:

E	10	100	1000	10000	...
δ					

证 对任给的 $E > 0$, 要使 $\frac{1}{(1-x)^2} > E$.

只需 $0 < |x - 1| < \frac{1}{\sqrt{E}},$

故取 $\delta = \frac{1}{\sqrt{E}}$. 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, $\frac{1}{(1-x)^2} > E,$

即 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$

填表

E	10	100	1000	10000	...
δ	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	0.1	$\frac{1}{\sqrt{1000}}$	0.01	...

【403】 用不等式表示下列各式:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b; (2) \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b; (3) \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b.$$

举出适当的例子说明.

解 (1) 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, $|f(x) - b| < \varepsilon$,

则称 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

例如 $f(x) = x + 2, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

(2) 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

当 $0 < a - x < \delta$, 即 $a - \delta < x < a$ 时, $|f(x) - b| < \varepsilon$,

则称 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$

例如 $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{当 } x \leq 0 \text{ 时,} \\ x^2 + 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \end{cases}$

则 $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 2$.

(3) 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < x - a < \delta$, 即 $a < x < a + \delta$ 时, $|f(x) - b| < \varepsilon$,

则称 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$.

例如本题(2)中的 $f(x)$ 有

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1.$$

用不等式表示以下各式, 并举出适当的例子(404 ~ 406).

$$\text{【404】 } (1) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b; \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

解 (1) 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $R > 0$ 使得当 $|x| > R$ 时, $|f(x) - b| < \varepsilon$,

则称 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

(2) 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $x < -R$ 时,

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

则称 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

(3) 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $x > R$ 时,

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

则称 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

例如, 对函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

【405】 (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$; (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$;

(3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$; (4) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$;

(5) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$; (6) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$;

(7) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$; (8) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$;

(9) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$.

解 (1) 对任意给定的 $E > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x)| > E$, 此即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

(2) 对任给的 $E > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, $f(x) < -E$, 则称 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

(3) 对任给的 $E > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, $f(x) > E$, 则称 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

(4) 对任给的 $E > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < a - x < \delta$, 即 $a - \delta < x < a$ 时, $|f(x)| > E$, 则称 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$.

(5) 对任给的 $E > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < a - x < \delta$, 即 $a - \delta < x < a$ 时, $f(x) < -E$, 则称 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$.

(6) 对任给的 $E > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < a - x < \delta$, 即 $a - \delta < x < a$ 时, $f(x) > E$, 则称 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$.

(7) 对任给的 $E > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < x - a < \delta$, 即

$a < x < a + \delta$ 时, $|f(x)| > E$, 则称 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$.

(8) 对任给的 $E > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < x - a < \delta$, 即 $a < x < a + \delta$ 时, $f(x) < -E$, 则称 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$.

(9) 对任给的 $E > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < x - a < \delta$, 即 $a < x < a + \delta$ 时, $f(x) > E$, 则称 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$.

【406】 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$; (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$; (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$;

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$; (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$;

(7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$; (8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;

(9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

解 (1) 对任给的 $E > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $|x| > R$ 时, $|f(x)| > E$, 则称 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

(2) 对任给的 $E > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $|x| > R$ 时, $f(x) < -E$, 则称 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

(3) 对任给的 $E > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $|x| > R$ 时, $f(x) > E$, 则称 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

(4) 对任给的 $E > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $x < -R$ 时, $|f(x)| > E$, 则称 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

(5) 对任给的 $E > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $x < -R$ 时, $f(x) < -E$. 则称 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

(6) 对任给的 $E > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $x < -R$ 时, $f(x) > E$, 则称 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

(7) 对任给的 $E > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $x > R$ 时, $|f(x)| > E$, 则称 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$.

(8) 对任给的 $E > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $x > R$ 时, $f(x) < -E$. 则称 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

(9) 对任给的 $E > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $x > R$ 时,

$f(x) > E$, 则称 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

【407】 设 $y = f(x)$, 用不等式表示下面各种情况:

- (1) 当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow b-0$;
- (2) 当 $x \rightarrow a-0$ 时, $y \rightarrow b-0$;
- (3) 当 $x \rightarrow a+0$ 时, $y \rightarrow b-0$;
- (4) 当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow b+0$;
- (5) 当 $x \rightarrow a-0$ 时, $y \rightarrow b+0$;
- (6) 当 $x \rightarrow a+0$ 时, $y \rightarrow b+0$;
- (7) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b-0$;
- (8) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b-0$;
- (9) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b-0$;
- (10) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b+0$;
- (11) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b+0$;
- (12) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b+0$.

并举出适当的例子.

解 (1) 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $0 < b-y < \varepsilon$, 即 $b-\varepsilon < y < b$.

则称 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b-0$

或当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow b-0$.

例如 $y = -x^2$. 就有当 $x \rightarrow 0$ 时, $y \rightarrow 0-0$.

(2) 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < a-x < \delta$, 即 $a-\delta < x < a$ 时, $0 < b-y < \varepsilon$, 则称当 $x \rightarrow a-0$ 时, $y \rightarrow b-0$.

例如 $y = x$ 就有当 $x \rightarrow 0-0$ 时, $y \rightarrow 0-0$.

(3) 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < x-a < \delta$ 时, $0 < b-y < \varepsilon$,

则称当 $x \rightarrow a+0$ 时, $y \rightarrow b-0$.

例如 $y = -x$ 就有当 $x \rightarrow 0+0$ 时, $y \rightarrow 0-0$.

(4) 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $0 < y-b < \varepsilon$, 则称当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow$

$b+0$.

例如, $y = x^2$ 就有当 $x \rightarrow 0$ 时, $y \rightarrow 0+0$.

(5) 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < a-x < \delta$ 时, $0 < y-b < \epsilon$, 则称当 $x \rightarrow a-0$ 时, $y \rightarrow b+0$.

例如 $y = -x$, 就有当 $x \rightarrow 0-0$ 时, $y \rightarrow 0+0$.

(6) 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < x-a < \delta$ 时, $0 < y-b < \epsilon$, 则称当 $x \rightarrow a+0$ 时, $y \rightarrow b+0$.

例如 $y = x$ 就有当 $x \rightarrow 0+0$ 时, $y \rightarrow 0+0$.

(7) 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $|x| > R$ 时, $0 < b-y < \epsilon$, 则称当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b-0$.

例如 $y = -\frac{1}{x^2}$ 就有当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0-0$.

(8) 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $x < -R$ 时, $0 < b-y < \epsilon$, 则称当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b-0$.

例如 $y = \frac{1}{x}$, 就有当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow 0-0$.

(9) 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $x > R$ 时, $0 < b-y < \epsilon$, 则称当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b-0$.

例如 $y = -\frac{1}{x}$, 就有当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 0-0$.

(10) 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $|x| > R$ 时, $0 < y-b < \epsilon$, 则称当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b+0$.

例如 $y = \frac{1}{x^2}$, 就有当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0+0$.

(11) 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $x < -R$ 时, $0 < y-b < \epsilon$, 则称当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b+0$.

例如 $y = -\frac{1}{x}$, 就有当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow 0+0$.

(12) 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $x > R$ 时, $0 < y-b < \epsilon$, 则称当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b+0$.

例如 $y = \frac{1}{x}$ 就有当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 0+0$.

【408】 令 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, 式中 $a_i (i = 0, 1, \cdots, n; n \geq 1, a_0 \neq 0)$ 为实数, 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} |P(x)| = +\infty$.

证 因为 $a_0 \neq 0$. 则

$$\begin{aligned} & |P(x)| \\ & \geq |a_0| |x|^n \left| 1 - \left(\left| \frac{a_1}{a_0} \right| \cdot \frac{1}{|x|} + \left| \frac{a_2}{a_0} \right| \cdot \frac{1}{|x|^2} + \cdots + \left| \frac{a_n}{a_0} \right| \cdot \frac{1}{|x|^n} \right) \right|. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$,

故存在 $E_1 > 0$ 使得, $|x| > E_1$ 时, 有

$$\left| 1 - \left(\left| \frac{a_1}{a_0} \right| \cdot \frac{1}{|x|} + \left| \frac{a_2}{a_0} \right| \cdot \frac{1}{|x|^2} + \cdots + \left| \frac{a_n}{a_0} \right| \cdot \frac{1}{|x|^n} \right) \right| > \frac{1}{2},$$

故 $|P(x)| > \frac{1}{2} |a_0| |x|^n$,

对任给的 $M > 0$, 设 $E_2 = \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}$,

取 $E = \max(E_1, E_2)$,

则当 $|x| > E$ 时, 有 $|P(x)| > M$,

因此 $\lim_{x \rightarrow \infty} |P(x)| = +\infty$.

【409】 令 $R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}$,

其中 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{若 } n > m; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{若 } n = m; \\ 0, & \text{若 } n < m. \end{cases}$$

证 因为

$$R(x) = \frac{x^n}{x^m} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}},$$

而
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x_m}} = \frac{a_0}{b_0} \neq 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} \infty, & n > m, \\ 1, & n = m, \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

因此
$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & n > m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

【410】 令 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 式中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的多项式,

并且 $P(a) = Q(a) = 0$, 问式 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ 的可能值?

解 设 a 为 $P(x)$ 的 n 重根, $Q(x)$ 的 m 重根, 即

$$P(x) = (x-a)^n P_1(x),$$

$$Q(x) = (x-a)^m Q_1(x),$$

其中 $P_1(x), Q_1(x)$ 均为多项式, 且 $P_1(a) \neq 0, Q_1(a) \neq 0$. 故

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & n > m, \\ \frac{P_1(a)}{Q_1(a)} \neq 0, & n = m, \\ \infty, & n < m. \end{cases}$$

求出下列各式的值(411 ~ 433).

【411】 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{-1}{-1} = 1.$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{【412】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}.$$

解 因为

$$(1+x)(1+2x)(1+3x) = 1 + 6x + 11x^2 + 6x^3,$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + 11x^2 + 6x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (6 + 11x + 6x^2) = 6. \end{aligned}$$

$$\text{【413】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(10 + 10x + 5x^2 + x^3)}{x^2(1 + x^3)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10 + 10x + 5x^2 + x^3}{1 + x^3} = 10. \end{aligned}$$

$$\text{【414】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \quad (m \text{ 与 } n \text{ 为自然数}).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 + n \cdot (mx) + \frac{1}{2!}n(n-1)(mx)^2 + \cdots (mx)^n\right] - \left[1 + m \cdot (nx) + \frac{1}{2!}m(m-1)(nx)^2 + \cdots (nx)^m\right]}{x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} (n(n-1)m^2 - m(m-1)n^2) + o(x) \right] \\ = \frac{1}{2} mn(n-m). \end{aligned}$$

$$\text{【415】} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}.$$

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1-\frac{4}{x}\right)\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\left(5-\frac{1}{x}\right)^5} \\ &= \frac{1}{5^5}. \end{aligned}$$

$$\text{【416】} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}.$$

解 分子、分母同时除以 x^{50} , 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{50}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}. \end{aligned}$$

$$\text{【417】} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}.$$

解 因为

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

分子、分母同时除以 $x^{\frac{n(n+1)}{2}}$, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left[n^n+\frac{1}{x^n}\right]^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}. \end{aligned}$$

$$\text{【418】} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-5)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x-5} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{【419】} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)^2}{(x^2 + 2x + 3)(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+2x+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{【420】} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)^2}{[x(x+1)(x^2+1)-3](x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x^2+1)-3} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{【421】} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x-2)}{(x^2 - 4)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{【422】} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{[x(x-1)-1](x+1)}{[x(x^2+1)(x-1)-1](x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-1)-1}{x(x^2+1)(x-1)-1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{【423】} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}.$$

解
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^2 - 12x + 16)^{10}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{(x-2)^{20}(x+4)^{10}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} = \frac{3^{20}}{6^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}.$$

【424】
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}.$$

解 因为

$$\begin{aligned} & x + x^2 + \cdots + x^n - n \\ &= (x-1) + (x^2-1) + \cdots + (x^n-1) \\ &= (x-1)[x^{n-1} + 2x^{n-2} + \cdots + (n-1)x + n], \end{aligned}$$

所以
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} [x^{n-1} + 2x^{n-2} + \cdots + (n-1)x + n]$$

$$= 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

【424. 1】
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}.$$

解
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^{99} - 1) - (x-1)}{x(x^{49} - 1) - (x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{99} + x^{98} + \cdots + x - 1)}{(x-1)(x^{49} + x^{48} + \cdots + x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{99} + x^{98} + \cdots + x - 1}{x^{49} + x^{48} + \cdots + x - 1} = \frac{98}{48} = \frac{49}{24}.$$

【425】
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad (m \text{ 与 } n \text{ 为自然数}).$$

解
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1} = \frac{m}{n}.$$

【426】
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} \quad (n \text{ 为自然数}).$$

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^k - a^k}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^{k-1} + ax^{k-2} + \cdots + a^{k-1})}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x^{k-1} + ax^{k-2} + \cdots + a^{k-1})$$

$$= ka^{k-1} \quad (k \text{ 为自然数}),$$

所以 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{[(x^{n-1} - a^{n-1}) + a(x^{n-2} - a^{n-2}) + \cdots + a^{n-2}(x-a)](x-a)}{(x-a)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{x^{n-1} - a^{n-1}}{x-a} + a \frac{x^{n-2} - a^{n-2}}{x-a} + \cdots + a^{n-2} \frac{x-a}{x-a} \right]$$

$$= (n-1)a^{n-2} + (n-2)a^{n-2} + \cdots + a^{n-2}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}.$$

【427】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} \quad (n \text{ 为自然数}).$

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^k - 1}{x-1} = k,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^n + x^{n-1} + \cdots + x - n)(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^n - 1}{x-1} + \frac{x^{n-1} - 1}{x-1} + \cdots + \frac{x-1}{x-1} \right]$$

$$= n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

【428】 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \quad (m \text{ 与 } n \text{ 为自然数}).$

解 当 $m = n$ 时, 此极限显然等于 0, 下面设 $n \neq m$.
由 424 题有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x-1} = \frac{n(n+1)}{2},$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m(1+x+\cdots+x^{n-1}) - n(1+x+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m[x + \cdots + x^{n-1} - (n-1)] - n[x + \cdots + x^{m-1} - (m-1)]}{(x-1)} \\
&\quad \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})} \\
&= \frac{1}{nm} \times \left[\lim_{x \rightarrow 1} \frac{m[x + \cdots + x^{n-1} - (n-1)]}{x-1} \right. \\
&\quad \left. - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{n[x + \cdots + x^{m-1} - (m-1)]}{x-1} \right] \\
&= \frac{1}{nm} \times \left(m \frac{n(n-1)}{2} - n \frac{m(m-1)}{2} \right) = \frac{n-m}{2}.
\end{aligned}$$

当 $m = n$ 时, 上述结果仍适用. 总之

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = \frac{n-m}{2}.$$

【429】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \cdots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right].$

解
$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \cdots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[(n-1)x + \frac{a}{n} (1+2+\cdots+n-1) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[(n-1)x + \frac{a}{n} \frac{n(n-1)}{2} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{a}{2} \right) \frac{n-1}{n} = x + \frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

【430】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right)^2 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^2 + \cdots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^2 \right].$

提示: 利用题 2 的结果

解
$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right)^2 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^2 + \cdots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^2 \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[(n-1)x^2 + \frac{2xa}{n} (1+2+\cdots+(n-1)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^2}{n^2} (1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[(n-1)x^2 + \frac{2xa}{n} \times \frac{n(n-1)}{2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a^2}{n^2} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \Big] \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n-1)}{n} x^2 + xa \frac{n-1}{n} + \frac{a^2}{6} \times \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \right] \\
& = x^2 + xa + \frac{a^2}{3}.
\end{aligned}$$

【431】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2}.$

解 因为

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\begin{aligned}
\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 + (2n)^2}{2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2} - 1 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (2n)^2}{2^2(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)} - 1 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}}{4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} - 1 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(4n+1)}{2(n+1)(2n+1)} - 1 = \frac{2 \times 4}{2 \times 2} - 1 = 1.
\end{aligned}$$

【432】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4} \right).$

提示: 利用题 3 的结果

解 因为

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\begin{aligned}
\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)^2}{4n} - \frac{n}{4} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

【433】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3}{[1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)]^2}.$

解 令

$$x_n = 1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3,$$

$$y_n = [1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)]^2,$$

则 $y_{n+1} > y_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n+1)]^2 - [1+4+\cdots+(3n-2)]^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)^3}{\left[\frac{(3n+2)(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(3n-1)n}{2}\right]^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)^3}{\left[\frac{(3n+2)(n+1)}{2} + \frac{(3n-1)n}{2}\right](3n+1)} = 3. \end{aligned}$$

利用 143 题的结果有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3}{[1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)]^2} = 3.$$

【434】 把抛物线 $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, Ox 轴和直线 $x = a$ 所围成的

曲边三角形 OAM (图 3) 的面积, 当作以 $\frac{a}{n}$ 为底的各内接矩形面积之和在 $n \rightarrow \infty$ 的极限, 求此面积.

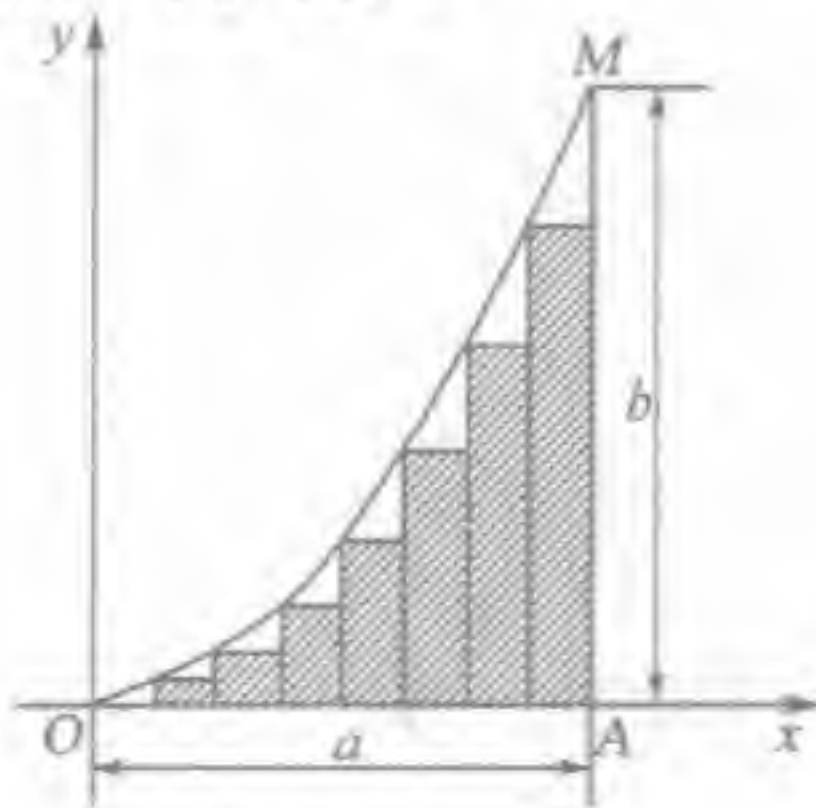


图 3

解 底的 n 个分点分别为

$$0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}a,$$

它们所对应的高为

$$0, b\left(\frac{1}{n}\right), b\left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots, b\left(\frac{n-1}{n}\right)^2,$$

故第 k 个矩形的面积为

$$\frac{1}{n}a \cdot b\left(\frac{k}{n}\right)^2 = ab \frac{k^2}{n^3} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

于是, 内接的 n 个矩形的面积之和为

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} ab \frac{k^2}{n^3} &= ab \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{ab}{6} \cdot \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}, \end{aligned}$$

因此曲面三角形 OAM 的面积为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ab}{6} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} = \frac{ab}{3}.$$

求下列极限(435 ~ 454).

【435】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = 1.$

【436】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}.$

解 分子、分母同除以 \sqrt{x} , 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{【437】} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{8}{3+3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{【438】} \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(\sqrt{1-x}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{-(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{-(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt{1-x}+3)} = \frac{-(4+4+4)}{6} = -2. \end{aligned}$$

$$\text{【439】} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\sqrt{x-a}(\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

【440】 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = -\frac{1}{16}.$$

【441】 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}.$

解 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt[3]{x-6} + 2)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)}{(x^3 + 8)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x^2 - 2x + 4)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)}$$

$$= \frac{1}{144}.$$

【442】 $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{(\sqrt[4]{x} - 2)(\sqrt[4]{x} + 2)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt[4]{x} + 2} = \frac{1}{4}.$$

【443】 $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt{9+2x}+5)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt{9+2x}+5)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt{9+2x}+5} = \frac{12}{5}.
 \end{aligned}$$

$$\text{【444】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \quad (n \text{ 为整数}).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[n]{1+x}-1)(\sqrt[n]{1+x}^{n-1}+\cdots+\sqrt[n]{1+x}+1)}{x(\sqrt[n]{1+x}^{n-1}+\cdots+\sqrt[n]{1+x}+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{1+x}^{n-1}+\cdots+\sqrt[n]{1+x}+1} = \frac{1}{n}.
 \end{aligned}$$

$$\text{【445】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)][\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)]}{x[\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x-2x^2}{x[\sqrt{1-2x-x^2}+1+x]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4-2x}{\sqrt{1-2x-x^2}+1+x} = -2.
 \end{aligned}$$

$$\text{【446】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2)(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)}{x(1+x)(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-x}{(1+x)(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

【447】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x(1+2\sqrt[3]{x})} \\
&\quad \times \frac{(\sqrt[3]{(27+x)^2} + \sqrt[3]{27+x} \cdot \sqrt[3]{27-x} + \sqrt[3]{(27-x)^2})}{(\sqrt[3]{(27+x)^2} + \sqrt[3]{27+x} \cdot \sqrt[3]{27-x} + \sqrt[3]{(27-x)^2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(1+2\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(27+x)^2} + \sqrt[3]{27+x} \cdot \sqrt[3]{27-x} + \sqrt[3]{(27-x)^2})} \\
&= \frac{2}{27}.
\end{aligned}$$

【448】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \\
&\quad \times \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} \cdot \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} \cdot \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)} \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

$$\text{【449】} \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt[6]{(x+2)^3} - \sqrt[6]{(x+20)^2})(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(\sqrt[4]{x+9} - 2)(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)} \\ & \quad \times \frac{\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}}}{\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{[(x+2)^3 - (x+20)^2](\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x^2 + 12x + 56)(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x^2 + 12x + 56)(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}}} \\ &= \frac{189 \cdot 4 \cdot 8}{3^5 + 3^4 \cdot 3 + 3^3 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 3^5} \\ &= \frac{6048}{1458}. \end{aligned}$$

$$\text{【450】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[12]{(1 + \frac{x}{3})^4} - \sqrt[12]{(1 + \frac{x}{4})^3})(1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}})}{(1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}})(1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\left(\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}} + \cdots + \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}}\right)}{\left(\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}} + \cdots + \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}}\right)} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\left(\frac{7}{12} + \frac{23}{48}x + \frac{7}{54}x^2 + \frac{1}{81}x^3\right)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}}\right)}{\frac{x}{2}\left(\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}} + \cdots + \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}}\right)} \\
& = \frac{\frac{7}{12} \times 2}{\frac{1}{2} \times 12} = \frac{7}{36}.
\end{aligned}$$

【451】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}.$

解
$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left[\sqrt[5]{(1+5x)^4} + \sqrt[5]{(1+5x)^3(1+x)} + \cdots + (1+x)^4 \right]}{(1+5x) - (1+x)^5} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+5x)^4} + \cdots + (1+x)^4}{-10 - 10x - 5x^2 - x^3} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

【452】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} \quad (m \text{ 和 } n \text{ 为整数}).$

解 我们首先求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+\alpha x} - 1}{x} \quad (k \text{ 为整数}).$$

当 k 为正整数时,有

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+\alpha x} - 1}{x} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x}{x \left(\sqrt[k]{(1+\alpha x)^{k-1}} + \cdots + \sqrt[k]{1+\alpha x} + 1 \right)} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sqrt[k]{(1+\alpha x)^{k-1}} + \cdots + \sqrt[k]{1+\alpha x} + 1} = \frac{\alpha}{k}.
\end{aligned}$$

当 k 为负整数时, 设 $k = -k'$, 则 k' 为正整数. 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+ax} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt[k']{1+ax}} - 1}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+ax)^{\frac{1}{k'}}}{x} \cdot \frac{1}{(1+ax)^{\frac{1}{k'}}} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(1+ax)^{\frac{1}{k'}}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k']{1+ax} - 1}{x} \\&= -\frac{\alpha}{k'} = \frac{\alpha}{k}.\end{aligned}$$

因此对任何非零整数都

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+ax} - 1}{x} = \frac{\alpha}{k},$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} \\&= \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n} \quad (mn \neq 0).\end{aligned}$$

【453】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} \quad (m \text{ 和 } n \text{ 为整数}).$

解 由 452 题结果有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax)^{\frac{1}{m}} - (1+\beta x)^{-\frac{1}{n}}}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1+\beta x)^{\frac{1}{n}} \\&= \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n} = \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} \quad (mn \neq 0).\end{aligned}$$

【454】 设 $P(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, m 为整数, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{证} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x(\sqrt[m]{(1+P(x))^{m-1}} + \cdots + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}}{(1+P(x))^{\frac{m-1}{m}} + \cdots + 1} = \frac{a_1}{m}.
 \end{aligned}$$

求下列极限(455 ~ 467).

$$\text{【455】} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} \quad (m \text{ 和 } n \text{ 为整数}).$$

解 首先我们求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{x - 1}$,

当 m 为正整数时,有

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x^{\frac{m-1}{m}} + x^{\frac{m-2}{m}} + \cdots + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^{\frac{m-1}{m}} + x^{\frac{m-2}{m}} + \cdots + 1} = \frac{1}{m}.
 \end{aligned}$$

当 m 为负整数时,设 $m = -m'$, 则 m' 为正整数,所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[m']{x}}{x - 1} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{m}}} = -\frac{1}{m'} = \frac{1}{m}.$$

即对任何负零整数,都有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{m},$$

$$\begin{aligned}
 \text{因此} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} \\
 &= \frac{n}{m} \quad (m \cdot n \neq 0).
 \end{aligned}$$

$$\text{【455. 1】} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{3}{1 - \sqrt[3]{x}} \right).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{3}{1 - \sqrt[3]{x}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} 3 \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - x} - \frac{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{1 - x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} 3 \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}}{1 - x} = \infty.
 \end{aligned}$$

【456】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}}.$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - x} = \frac{1}{n},$

所以
$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \cdots \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - x} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.
 \end{aligned}$$

【457】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)} - x].$

解
$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)} - x] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a)(x+b) - x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+b)x + ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a+b + \frac{ab}{x}}{\sqrt{\left(1 + \frac{a}{x}\right)\left(1 + \frac{b}{x}\right)} + 1} = \frac{a+b}{2}.
 \end{aligned}$$

【458】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}).$

解
$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}) - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^3}} + 1}} = \frac{1}{2}.$$

【459】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{x - \sqrt{x^2 + 2x}}{(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + x})(x + \sqrt{x^2 + x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{-2x}{(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + x})(x + \sqrt{x^2 + x})(x + \sqrt{x^2 + 2x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right)}$$

$$= -\frac{1}{4}.$$

【460】 $\lim_{x \rightarrow +0} \left[\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right].$

解

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left[\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^3}} + \sqrt{1 - \sqrt{x} + \sqrt{x^3}}}$$

$$= 1$$

$$\text{【461】 } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} + \sqrt[3]{(x^3 - x^2 + 1)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)^2}} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{【462】 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - x) + (x - \sqrt{x^2 - 2x})] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^2} + x(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}) + x^2} + \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} + 1} + \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \right] \\ &= \frac{3}{1+1+1} + \frac{2}{1+1} = 2. \end{aligned}$$

$$\text{【463】 } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}].$$

$$\begin{aligned} \text{解 } & \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^2 - (x-1)^2]}{(x+1)^{\frac{4}{3}} + (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^{\frac{4}{3}}}{(x+1)^{\frac{4}{3}} + (x^2-1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{【464】} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)\left(1 + \sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)} \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{【465】} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)} - x].$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)} - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a_1)\cdots(x+a_n) - x^n}{\sum_{j=1}^n [(x+a_1)\cdots(x+a_n)]^{\frac{n-j}{n}} \cdot x^{j-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)x^{n-1} + \cdots + (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)}{\sum_{j=1}^n [(x+a_1)\cdots(x+a_n)]^{\frac{n-j}{n}} \cdot x^{j-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i + o\left(\frac{1}{x}\right)}{\sum_{j=1}^n \left[\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{x}\right)\right]^{\frac{n-j}{n}} \cdot x^{j-1}} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{【466】} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n}$$

(n 为自然数).

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n + \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n \right] \\
 &= 2^n.
 \end{aligned}$$

$$\text{【467】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}$$

(n 为自然数).

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} \cdot [(\sqrt{1+x^2} + x)^{n-1} \\
 &\quad + (\sqrt{1+x^2} + x)^{n-2}(\sqrt{1+x^2} - x) + \cdots \\
 &\quad + (\sqrt{1+x^2} - x)^{n-1}] \\
 &= 2n.
 \end{aligned}$$

【468】 研究二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根 x_1 和 x_2 的性质, 其中系数 a 趋于零, 而系数 b 和 c 为常数, 且 $b \neq 0$.

$$\text{解} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

不失一般性, 设 $b > 0$, 于是 $\lim_{a \rightarrow 0} x_2 = \infty$

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow 0} x_1 &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = -\frac{c}{b}.
 \end{aligned}$$

【469】 根据条件 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$, 求常数 a 和 b .

$$\text{解} \quad \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b$$

$$= \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x + 1-b}{x+1},$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0$

的充要条件为 $1-a=0$, 及 $a+b=0$. 解之得 $a=1, b=-1$.

【470】 根据下列条件:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_1 x - b_1) = 0,$$

和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_2 x - b_2) = 0.$

求常数 a_i 和 b_i ($i=1, 2$).

解 因为

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_1 x - b_1) \\ &= \frac{(1-a_1^2)x^2 - (2a_1b_1+1)x + 1-b_1^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + a_1 x + b_1}. \end{aligned}$$

上式极限为零的必要条件为

$$1-a_1^2=0,$$

及 $1+2a_1b_1=0,$

解之得 $a_1 = \pm 1, b_1 = -\frac{1}{2a_1} = \mp \frac{1}{2}.$

但当 $a_1 = 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x + \frac{1}{2} \right) = +\infty.$

因此 $a_1 = -1, b_1 = \frac{1}{2}.$

同样可得, $a_2 = 1, b_2 = -\frac{1}{2}.$

求下列极限(471 ~ 481).

【471】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5.$

【472】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}.$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 而 $|\sin x| \leq 1$, 所以 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷小量, 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

【473】 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ (m 和 n 一整数).

解 令 $y = x - \pi$, 则当 $x \rightarrow \pi$ 时, $y \rightarrow 0$. 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(-1)^m \sin my}{(-1)^n \sin ny} \\ &= (-1)^{m-n} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin my}{my} \cdot \frac{ny}{\sin ny} \cdot \frac{m}{n} \right) \\ &= (-1)^{m-n} \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

【474】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【474. 1】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1^*.$$

* 注: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ (见 481 题).

【474. 2】 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 3x$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 3x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

【475】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \cdot \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{【476】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos 4x \cdot \sin x}{\sin x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 4x = 2.
 \end{aligned}$$

$$\text{【477】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin 2x \sin x}{x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 4.
 \end{aligned}$$

$$\text{【478】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2} + \sin x}{2\sin^2 \frac{px}{2} + \sin px} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{px}{2} \left(\sin \frac{px}{2} + \cos \frac{px}{2} \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{px}{2}}{\sin \frac{px}{2}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{px}{2} + \cos \frac{px}{2}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p} \quad (p \neq 0).$$

【479】 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

解 令 $\frac{\pi}{4} - x = t$, 则当 $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ 时, $t \rightarrow 0$. 所以

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \tan 2\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \cdot \tan t = \lim_{t \rightarrow 0} \cot 2t \cdot \tan t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t}{\sin 2t} \cdot \frac{\sin t}{\cos t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t}{2 \cos^2 t} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【480】 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}.$

解 令 $1-x=t$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时, $t \rightarrow 0$. 所以

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2}\right) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \cot \frac{\pi t}{2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \frac{\pi t}{2}} \cdot \cos \frac{\pi t}{2} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

【481】 证明下列等式:

(1) $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a;$ (2) $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a;$

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a. \left(a \neq \frac{2n-1}{2}\pi; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right).$

证 (1) 因为

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin a| &= 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq |x-a|, \end{aligned}$$

故任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$.

只须 $|x-a| < \varepsilon$. 故取 $\delta = \varepsilon$. 则当 $0 < |x-a| < \delta$ 时,

$$|\sin x - \sin a| < \varepsilon,$$

因此 $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$.

(2) 根据(1)有

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \lim_{x \rightarrow a} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \sin x}{\lim_{x \rightarrow a} \cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a.$$

其中 $a \neq \frac{2n-1}{2}\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

求下列极限(482 ~ 565).

【482】 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \cdot \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a. \end{aligned}$$

【483】 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}.$

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \sin \frac{x+a}{2} \cdot \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(-\sin \frac{x+a}{2}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = -\sin a. \end{aligned}$$

【484】 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}.$

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x \cos a - \sin a \cos x}{(x - a) \cdot \cos x \cdot \cos a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\cos x \cdot \cos a} \cdot \frac{\sin(x - a)}{x - a} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 a} \quad \left(a \neq \frac{2n+1}{2}\pi; n = 0, \pm 1, \dots \right).$$

【485】 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cot x - \cot a}{x - a}.$

解 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cot x - \cot a}{x - a} = - \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} \cdot \frac{1}{\sin x \sin a}$
 $= - \frac{1}{\sin^2 a} \quad (a \neq n\pi; n = 0, \pm 1, \dots).$

【486】 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a}.$

解 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos a - \cos x}{(x-a)\cos x \cdot \cos a}$
 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x+a}{2}}{\cos x \cdot \cos a} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$
 $= \frac{\sin a}{\cos^2 a} \quad \left(a \neq \frac{2n+1}{2}\pi; n = 0, \pm 1, \dots \right).$

【487】 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} a}{x - a}.$

解 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin a - \sin x}{(x-a)\sin x \sin a}$
 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\cos \frac{x+a}{2}}{\sin x \sin a} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$
 $= - \frac{\cos a}{\sin^2 a} \quad (a \neq n\pi; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

【488】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin(a+2x) - \sin(a+x)] - [\sin(a+x) - \sin a]}{x^2}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(a + \frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{2} - 2\cos\left(a + \frac{x}{2}\right) \cdot \sin\frac{x}{2}}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin\frac{x}{2}\left[\cos\left(a + \frac{3x}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{x}{2}\right)\right]}{x^2} \\
&= -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \sin(a+x) = -\sin a.
\end{aligned}$$

【489】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}.$

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\cos(a+2x) - \cos(a+x)] - [\cos(a+x) - \cos a]}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin\left(a + \frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{2} + 2\sin\left(a + \frac{x}{2}\right) \cdot \sin\frac{x}{2}}{x^2} \\
&= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\left(a + \frac{3x}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{x}{2}\right)\right)}{x^2} \\
&= -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \cos(a+x) = -\cos a.
\end{aligned}$$

【490】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(a+2x) - 2\tan(a+x) + \tan a}{x^2}.$

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(a+2x) - 2\tan(a+x) + \tan a}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\tan(a+2x) - \tan(a+x)] - [\tan(a+x) - \tan a]}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\frac{\sin(a+2x)\cos(a+x) - \sin(a+x)\cos(a+2x)}{\cos(a+2x)\cos(a+x)}}{x^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sin(a+x)\cos a - \sin a \cos(a+x)}{\cos(a+x)\cos a} \Bigg\} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} \cdot \frac{\cos(a+x)\cos a - \cos(a+2x)\cos(a+x)}{\cos a \cdot \cos(a+2x)\cos^2(a+x)} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{2\sin(a+x)}{\cos a \cos(a+x)\cos(a+2x)} \\
& = \frac{2\sin a}{\cos^3 a} \quad \left(a \neq \frac{2n+1}{2}\pi; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\right).
\end{aligned}$$

【491】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot(a+2x) - 2\cot(a+x) + \cot a}{x^2}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot(a+2x) - 2\cot(a+x) + \cot a}{x^2}$

$$\begin{aligned}
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cot(a+2x) - \cot(a+x)) - (\cot(a+x) - \cot a)}{x^2} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\frac{\cos(a+2x)\sin(a+x) - \sin(a+2x)\cos(a+x)}{\sin(a+2x)\sin(a+x)}}{x^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\frac{\cos(a+x)\sin a - \sin(a+x)\cos a}{\sin(a+x)\sin a}}{x^2} \right\} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x [\sin a - \sin(a+2x)]}{x^2 \sin(a+2x)\sin(a+x)\sin a} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{2\cos(a+x)}{\sin(a+2x)\sin(a+x)\sin a} \\
& = \frac{2\cos a}{\sin^3 a} \quad (a \neq n\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).
\end{aligned}$$

【492】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x) - \sin^2 a}{x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x) - \sin^2 a}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}[\cos x - \cos(2a+3x)] - \sin^2 a}{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(2a + 3x) - (1 - \cos 2a)}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x} + \frac{\sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \left(2a + \frac{3x}{2} \right)}{x} \right] \\
&= \frac{3}{2} \sin 2a.
\end{aligned}$$

【493】 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$

解 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(2\sin x - 1)(\sin x - 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = -3.
\end{aligned}$$

【494】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)\cos 2x}{1 - \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{4}(\cos 6x + \cos 2x) - \frac{1}{4}(1 + \cos 4x)}{1 - \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x)}{2\sin^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right] \\
&= \frac{1}{4} \cdot [4 + 16 + 36] = 14.
\end{aligned}$$

$$\text{【495】} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}.$$

解 令 $t = x - \frac{\pi}{3}$, 则当 $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$ 时, $t \rightarrow 0$. 所以

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{1 - \cos t + \sqrt{3}\sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{2\sin^2 \frac{t}{2}}{t} + \sqrt{3} \frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\text{【496】} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x - 3\tan x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

$$\begin{aligned} & \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x - 3\tan x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x \frac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{-2\tan x \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)}{\cos^2 x} = -24. \end{aligned}$$

$$\text{【497】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(a+x)\tan(a-x) - \tan^2 a}{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(a+x)\tan(a-x) - \tan^2 a}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan a + \tan x}{1 - \tan a \tan x} \cdot \frac{\tan a - \tan x}{1 + \tan a \tan x} - \tan^2 a}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 a - \tan^2 x - \tan^2 a (1 - \tan^2 a \tan^2 x)}{x^2 (1 - \tan^2 a \tan^2 x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x (\tan^4 a - 1)}{x^2 (1 - \tan^2 a \tan^2 x)} = \tan^4 a - 1 \\
&= -\frac{\cos 2a}{\cos^4 a} \quad \left(a \neq \frac{2n+1}{2}\pi; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right).
\end{aligned}$$

【498】 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cot^3 x}{2 - \cot x - \cot^3 x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cot^3 x}{2 - \cot x - \cot^3 x}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \cot x)(1 + \cot x + \cot^2 x)}{(1 - \cot x)(2 + \cot x + \cot^2 x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cot x + \cot^2 x}{2 + \cot x + \cot^2 x} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

【499】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3 (\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3} \cdot \frac{1}{\cos x (\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x (\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

【500】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\sqrt{1+x\sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x\sin x - \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\sqrt{1+x\sin x} + \sqrt{\cos x})}{2\sin^2 \frac{x}{2} + x\sin x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\frac{1}{2} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right]^2 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

【501】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 x} + \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x (\sqrt{\cos x} + 1)} + \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x (1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x})} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x (\sqrt{\cos x} + 1)} + \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x (1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x})} \right] \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

【502】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x^2}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2}}$

$$= \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} \cdot \left[\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right]^2 = \sqrt{2}.$$

$$\text{【503】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2} (1 + \sqrt{\cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2} (1 + \sqrt{\cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \left[\frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sin \frac{\sqrt{x}}{2}} \right]^2 \cdot \frac{1}{2(1 + \sqrt{\cos x})} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{【504】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x (1 - \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos 2x} (1 - \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2 \cdot (1 + \sqrt{\cos 2x})} \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3x) \sqrt{\cos 2x}}{x^2 (1 + \sqrt[3]{\cos 3x} + \sqrt[3]{\cos^2 3x})} \\ &= \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3. \end{aligned}$$

【505】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}).$

解 因为

$$\begin{aligned} & (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) \\ &= 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \\ &= 2 \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}, \end{aligned}$$

及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = 0,$

且 $\left| \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right| \leq 1,$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0.$

【506】 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}};$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}};$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}.$

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \ln \frac{1+x}{2+x} = \ln \frac{1}{2},$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \ln \frac{1+x}{2+x}} = \frac{1}{2}.$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{2}}.$

(3) 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \ln \frac{1+x}{2+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\sqrt{x}} \ln \frac{1+x}{2+x} = 0.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \ln \frac{1+x}{2+x}} = e^0 = 1.$

【507】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}.$

解 法一: 因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \frac{x+2}{2x-1} = -\infty,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}} = 0.$

法二: 当 $|x| \geq 5$ 时,

$$\left| \frac{x+2}{2x-1} \right| = \left| \frac{1 + \frac{2}{x}}{2 - \frac{1}{x}} \right| \leq \frac{1 + \left| \frac{2}{x} \right|}{2 - \left| \frac{1}{x} \right|} \leq \frac{7}{9}.$$

而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9} \right)^{x^2} = 0,$

因此 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2} = 0.$

【508】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}.$

解 法一: 当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \rightarrow \frac{3}{2},$$

且 $\frac{x^3}{1-x} = \frac{x^2}{\frac{1}{x} - 1} \rightarrow -\infty.$

故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}} = 0.$

法二: 因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}} = -\infty,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}} = 0.$

【509】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin^n \frac{2\pi n}{3n+1} \right).$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3},$

故当 n 充分大时, $\left| \sin \frac{2\pi n}{3n+1} \right| < \frac{1}{2} + \varepsilon < 1$.

其中 $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ 为一固定的实数. 而

$$\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{2\pi n}{3n+1} = 0$.

【510】 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+0} \left[\tan \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\tan 2x}.$

解 因为当 $x \rightarrow \frac{\pi}{4} + 0$ 时

$$1 < \tan \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) < \tan \left(\frac{\pi}{8} + x \right) < +\infty,$$

而 $\tan 2x \rightarrow -\infty$,

所以 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+0} \left[\tan \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\tan 2x} = 0$.

【511】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}.$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1} = 0$,

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x-1}{x+1} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}} = 1$.

【512】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}.$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-1}{2}} \right)^{\frac{x^2-1}{2} \cdot 2+1} = e^2.$

【513】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2} \right)^{\frac{1}{x}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{2} \right)^0 = 1.$

【514】 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{-2} \cdot (-2)} = e^{-2}.$

【515】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x.$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{\frac{x-a}{2a}} \right]^{\frac{x-a}{2a} \times 2a + a}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-a}{2a}} \right)^{\frac{x-a}{2a}} \right]^{2a} \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{x-a}{2a}} \right)^a = e^{2a}.$

【516】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x \quad (a_1 > 0, a_2 > 0).$

解 $\left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x \left(\frac{x + \frac{b_1}{a_1}}{x + \frac{b_2}{a_2}} \right)^x$
 $= \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x \left(1 + \frac{1}{\frac{x+C}{A}} \right)^x,$

其中 $C = \frac{b_2}{a_2}, A = \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}.$

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+C}{A}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+C}{A}} \right)^{\frac{x+C}{A} \cdot A - C}$
 $= e^A.$

当 $a_1 = a_2$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x = 1;$

当 $a_1 < a_2$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x = 0;$

当 $a_1 > a_2$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x = +\infty.$

因此
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x = \begin{cases} e^{\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}}, & a_1 = a_2 > 0, \\ 0, & a_2 > a_1 > 0, \\ +\infty, & a_1 > a_2 > 0. \end{cases}$$

【517】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cot^2 x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cot^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2} \cdot (\frac{x}{\sin x})^2 \cdot \cos^2 x} = e$.

【518】 $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\frac{1}{\sin \pi x} \cdot \cos \pi x} = e^{-1}$.

【519】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{1 + \sin x}{\tan x - \sin x}} \right)^{\frac{1 + \sin x}{\tan x - \sin x} \cdot \frac{1 - \cos x}{(1 + \sin x) \cos x}} = e^0 = 1$.

【519.1】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{1 + \sin x}{\tan x - \sin x}} \right)^{\frac{1 + \sin x}{\tan x - \sin x} \cdot \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{\sin^3 x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{1 + \sin x}{\tan x - \sin x}} \right)^{\frac{1 + \sin x}{\tan x - \sin x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{1 + \sin x}} = e^{\frac{1}{2}}$.

【520】 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a}} \right)^{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a} \cdot \frac{\sin x - \sin a}{x-a} \cdot \frac{1}{\sin a}}$

$$= e^{\cot a} \quad (a \neq n\pi; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$\text{【521】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1}{\frac{\cos x - \cos 2x}{\cos x - \cos 2x}} \right]^{\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos 2x} \cdot \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 \cos 2x}}$$

$$\text{而} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + 2\sin^2 x}{x^2 \cos 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \frac{2\sin^2 x}{x^2} \right] \frac{1}{\cos 2x} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{所以} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\cos 2x}{x^2 \cos 2x} \ln \left(1 + \frac{1}{\frac{\cos x - \cos 2x}{\cos x - \cos 2x}} \right) \frac{\cos 2x}{\cos x - \cos 2x}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{【522】} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + \tan x - 1)^{\frac{1}{\tan x - 1} \cdot \frac{-2\tan x}{\tan x + 1}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

$$\text{【523】} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cot^2 x)^{-\frac{\tan x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cot^2 x)^{\frac{1}{\cot^2 x} \cdot \left(-\frac{\cot x}{2}\right)} \\ &= e^0 = 1. \end{aligned}$$

$$\text{【524】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]^{\cot x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]^{\cot x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\cot x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1}{\frac{1 + \tan x}{-2\tan x}} \right]^{\frac{1 + \tan x}{-2\tan x} \cdot \frac{-2}{1 + \tan x}} = e^{-2}. \end{aligned}$$

【525】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x.$

解 因为

$$\begin{aligned} & \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x \\ &= \left[1 + \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1} \cdot x \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right)} \end{aligned}$$

而 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2x}}{\frac{1}{x}} \right] = 1.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e.$

【526】 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \cos \sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} \ln [1 + (\cos \sqrt{x} - 1)] \frac{1}{\cos \sqrt{x} - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2}}{x} \ln [1 + (\cos \sqrt{x} - 1)] \frac{1}{\cos \sqrt{x} - 1}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

【527】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n.$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{2}} \right)^{\frac{n-1}{2} \times 2+1} = e^2.$

【528】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}.$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{-\frac{n}{2}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{\cot^2 \frac{x}{\sqrt{n}} \left(\frac{\tan \frac{x}{\sqrt{n}}}{\frac{x}{\sqrt{n}}} \right)^2 \cdot \left(-\frac{x^2}{2} \right)} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

【529】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$

【530】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x].$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x]$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \ln e = 1.$

【531】 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad (a > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$
 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{\frac{x}{a} - 1} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{\frac{a}{x-a}} \right)}{\frac{a}{x-a}}$
 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{a} \ln \left(1 + \frac{1}{\frac{a}{x-a}} \right)^{\frac{a}{x-a}} = \frac{1}{a} \ln e = \frac{1}{a}.$

【532】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x].$

解 $\sin \ln(x+1) - \sin \ln x$
 $= 2 \cos \frac{\ln(x+1) + \ln x}{2} \sin \frac{\ln(x+1) - \ln x}{2}$

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\ln(x+1) - \ln x}{2} = 0$

又 $\left| 2 \cos \frac{\ln(x+1) + \ln x}{2} \right| \leq 2$

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x] = 0.$

$$\text{【533】} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2 + \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\ln x^{10} + \ln\left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{\ln x} \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{10 + \frac{1}{\ln x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}\right)} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

$$\text{【534】} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lg \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2} \right).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \lg \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \lg \frac{\frac{100}{x^2} + 1}{\frac{1}{x^2} + 100} = \lg \frac{1}{100} = -2.$$

$$\text{【535】} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{2x})}{\ln(3 + e^{3x})}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^{3x} + \ln\left(\frac{2}{e^{3x}} + 1\right)}{\ln e^{2x} + \ln\left(\frac{3}{e^{2x}} + 1\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x} \ln\left(\frac{2}{e^{3x}} + 1\right)}{2 + \frac{1}{x} \ln\left(\frac{3}{e^{2x}} + 1\right)} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{【536】} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x} + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\ln \sqrt[3]{x} + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[12]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\ln x} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[12]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

【537】 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lg(x+h) + \lg(x-h) - 2\lg x}{h^2} \quad (x > 0).$

解
$$\begin{aligned}
&\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lg(x+h) + \lg(x-h) - 2\lg x}{h^2} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lg(x^2 - h^2) - \lg x^2}{h^2} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x^2} \lg \left(1 - \frac{h^2}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{h^2}} \right] = -\frac{1}{x^2} \lg e.
\end{aligned}$$

【538】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)}{\sin bx}.$

解
$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)}{\sin bx} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1 + \tan ax}{1 - \tan ax}}{\sin bx} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin bx} \cdot \frac{2 \tan ax}{1 - \tan ax} \cdot \ln \left(1 + \frac{2 \tan ax}{1 - \tan ax}\right)^{\frac{1 - \tan ax}{2 \tan ax}} \\
&= \frac{2a}{b}.
\end{aligned}$$

【539】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}.$

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\cos ax - 1} \cdot \frac{\cos bx - 1}{\ln \cos bx} \cdot \frac{\cos ax - 1}{\cos bx - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{-2 \sin^2 \frac{bx}{2}} = \frac{a^2}{b^2}.
 \end{aligned}$$

【540】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln \frac{nx + \sqrt{1 - n^2 x^2}}{x + \sqrt{1 - x^2}} \right].$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln \frac{nx + \sqrt{1 - n^2 x^2}}{x + \sqrt{1 - x^2}} \right] = \ln 1 = 0.$

【540. 1】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(nx + \sqrt{1 - n^2 x^2})}{\ln(x + \sqrt{1 - x^2})}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(nx + \sqrt{1 - n^2 x^2})}{\ln(x + \sqrt{1 - x^2})}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(nx + \sqrt{1 - n^2 x^2} - 1) \ln[1 + (nx + \sqrt{1 - n^2 x^2} - 1)]^{\frac{1}{nx + \sqrt{1 - n^2 x^2} - 1}}}{(x + \sqrt{1 - x^2} - 1) \ln[1 + (x + \sqrt{1 - x^2} - 1)]^{\frac{1}{x + \sqrt{1 - x^2} - 1}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx + \sqrt{1 - n^2 x^2} - 1}{x + \sqrt{1 - x^2} - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(nx - 1)^2 - (1 - n^2 x^2)}{(x - 1)^2 - (1 - x^2)} \cdot \frac{x - 1 - \sqrt{1 - x^2}}{nx - 1 - \sqrt{1 - n^2 x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2n + 2n^2 x}{-2 + 2x} \cdot \frac{x - 1 - \sqrt{1 - x^2}}{nx - 1 - \sqrt{1 - n^2 x^2}} = n.
 \end{aligned}$$

【541】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0).$

解 令 $a^x - 1 = t$, 则 $x = \log_a(1 + t)$,

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1 + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1 + t)^{\frac{1}{t}}}$

$$= \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

注: 此题的结果, 后面经常用到.

【542】 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0).$

解 因为

$$\begin{aligned} \frac{a^x - x^a}{x - a} &= \frac{a^a \left[a^{x-a} - \left(\frac{x}{a} \right)^a \right]}{x - a} \\ &= a^a \frac{a^{x-a} - 1}{x - a} - a^a \frac{\left(\frac{x}{a} \right)^a - 1}{x - a} \\ &= a^a \frac{a^{x-a} - 1}{x - a} - a^a \frac{e^{a \ln \frac{x}{a}} - 1}{a \ln \frac{x}{a}} \cdot \frac{a \ln \left(1 + \frac{x-a}{a} \right)}{x - a}. \end{aligned}$$

对于 $\frac{a^{x-a} - 1}{x - a}$, 令 $x - a = t$, 则当 $x \rightarrow a$ 时, $t \rightarrow 0$, 所以由 541 题结

果有 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{x-a} - 1}{x - a} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a.$

同样 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{a \ln \frac{x}{a}} - 1}{a \ln \frac{x}{a}} = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a \ln \left(1 + \frac{x-a}{a} \right)}{x - a} = 1,$$

因此 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} = a^a \ln a - a^a.$

【543】 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} \quad (a > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} a^a \frac{e^{x \ln x - a \ln a} - 1}{x \ln x - a \ln a} \cdot \frac{x \ln x - a \ln a}{x - a}$

而 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x \ln x - a \ln a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x \ln x - x \ln a}{x - a} + \ln a \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{a} \frac{\ln \left(1 + \frac{x-a}{a} \right)}{\frac{x-a}{a}} + \ln a$$

$$= 1 + \ln a.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{x \ln x - a \ln a} - 1}{x \ln x - a \ln a} = 1.$$

因此 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} = a^a(1 + \ln a).$

【544】 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)^{\frac{1}{x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)^{\frac{x}{x} \cdot \frac{1}{e^x}} = e \cdot e = e^2.$

【545】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 $\left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
 $= \left[1 + \frac{1}{\frac{1 + x \cdot 3^x}{x(2^x - 3^x)}}\right]^{\frac{1 + x \cdot 3^x}{x(2^x - 3^x)} \cdot \frac{2^x - 3^x}{x(1 + x \cdot 3^x)}}$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x(1 + x \cdot 3^x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + x \cdot 3^x} \left(\frac{2^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x}\right)$
 $= \ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{2}{3},$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\ln \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}.$$

【545. 1】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x}\right)^{\cot^3 x}$

解 $\left(\frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x}\right)^{\cot^3 x}$

$$= \left[1 + \frac{1}{\frac{1 + \sin x \cos \beta x}{\sin x (\cos \alpha x - \cos \beta x)}} \right]^{\frac{1 + \sin x \cos \beta x}{\sin x (\cos \alpha x - \cos \beta x)} \cdot \frac{\sin x (\cos \alpha x - \cos \beta x)}{1 + \sin x \cos \beta x} \cdot \cot^3 x}$$

而

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos \alpha x - \cos \beta x)}{1 + \sin x \cos \beta x} \cot^3 x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x}{1 + \sin x \cos \beta x} \cdot \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} x \sin \frac{\alpha - \beta}{2} x}{x^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x} \right)^{\cot^3 x} = e^{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}}.$

【545. 2】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}.$

解 $\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin[\pi(x^\alpha - 1)]}{\sin[\pi(x^\beta - 1)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin[\pi(x^\alpha - 1)]}{\pi(x^\alpha - 1)} \cdot \frac{\pi(x^\beta - 1)}{\sin[\pi(x^\beta - 1)]} \cdot \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{a \ln x} - 1}{a \ln x} \cdot \frac{\beta \ln x}{e^{\beta \ln x} - 1} \cdot \frac{a \ln x^{(*)}}{\beta \ln x} \\ &= \frac{a}{\beta}. \end{aligned}$

(*) 利用 541 题的结果.

【545. 3】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi \cdot 2^x)}{\ln[\cos(\pi \cdot 2^x)]}.$

解 $\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi \cdot 2^x)}{\ln[\cos(\pi \cdot 2^x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \sin^2(\pi \cdot 2^{x-1}) \cos^2(\pi \cdot 2^{x-1})}{\ln(1 - 2 \sin^2(\pi \cdot 2^{x-1}))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2 \cos^2(\pi \cdot 2^{x-1})}{\ln[1 - 2 \sin^2(\pi \cdot 2^{x-1})] - \frac{1}{2 \sin^2(\pi \cdot 2^{x-1})}} = -2. \end{aligned}$

【546】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right).$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \tan \frac{1}{n}}{1 - \tan \frac{1}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{1 - \tan \frac{1}{n}}{2 \tan \frac{1}{n}}} \right)^{\frac{1 - \tan \frac{1}{n}}{2 \tan \frac{1}{n}} \cdot \frac{2 \tan \frac{1}{n}}{1 - \tan \frac{1}{n}} \cdot n}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \tan \frac{1}{n}}{1 - \tan \frac{1}{n}} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1 - \tan \frac{1}{n}} = 2.$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) = e^2.$

【547】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\beta x} [e^{(\alpha - \beta)x} - 1]}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} x \sin \frac{\alpha - \beta}{2} x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(\alpha - \beta)x} - 1}{(\alpha - \beta)x} \cdot \frac{\frac{\alpha - \beta}{2} x}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2} x} \cdot \frac{e^{\beta x}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} x}$$

$$= \ln e = 1.$$

【548】 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} \quad (\alpha > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} a^{\alpha - \beta} \frac{\left(\frac{x}{a} \right)^\alpha - 1}{\left(\frac{x}{a} \right)^\beta - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} a^{\alpha-\beta} \frac{e^{a \ln \frac{x}{a}} - 1}{a \ln \frac{x}{a}} \cdot \frac{\beta \ln \frac{x}{a}}{e^{a \ln \frac{x}{a}} - 1} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta} (\beta \neq 0).$$

【549】 $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} \quad (a > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b} a^b \frac{a^{x-b} - 1}{x - b} = a^b \ln a.$

【550】 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} \quad (a > 0).$

解 由 541 题的结果有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a,$$

所以
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{a^h + a^{-h} - 2}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x}{a^h} \left(\frac{a^h - 1}{h} \right)^2 = a^x \ln^2 a. \end{aligned}$$

【551】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}.$

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x+a} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1 + \frac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a} \cdot a} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^a \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{b} \cdot b} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^b}{\left(1 + \frac{a+b}{x}\right)^{\frac{x}{a+b} \cdot 2(a+b)} \left(1 + \frac{a+b}{x}\right)^{a+b}} \\ &= \frac{e^a \cdot e^b}{e^{2(a+b)}} = e^{-(a+b)}. \end{aligned}$$

【552】 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) \quad (x > 0).$

解
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln x.$$

【553】 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) \quad (x > 0).$

解
$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n+1}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot x^{\frac{1}{n+1}} (x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \frac{n^2 x^{\frac{1}{n+1}}}{n(n+1)} = \ln x. \end{aligned}$$

【554】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a} \right)^n \quad (a > 0, b > 0).$

解 因为

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{(b^{\frac{1}{n}} - 1)}{a} \ln \left[1 + \frac{1}{\frac{a}{b^{\frac{1}{n}} - 1}} \right]^{\frac{a}{b^{\frac{1}{n}} - 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \cdot \frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{\ln b}{a}, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a} \right)^n = e^{\frac{\ln b}{a}} = b^{\frac{1}{a}}.$

【555】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \quad (a > 0, b > 0).$

解
$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right) \ln \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right)^{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} + \frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln \sqrt{ab},$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$

【556】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$

解
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1 \right)^{\frac{1}{\frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1} \cdot \frac{a^x - 1 + b^x - 1 + c^x - 1}{3x}} \\ &= e^{\frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c)} = \sqrt[3]{abc}. \end{aligned}$$

【557】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$

解
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1 \right) \\ & \quad \ln \left(1 + \frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1 \right)^{\frac{1}{\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{a + b + c} \left[a \frac{a^x - 1}{x} + b \frac{b^x - 1}{x} + c \frac{c^x - 1}{x} \right] \\ &= \frac{1}{a + b + c} (a \ln a + b \ln b + c \ln c) \\ &= \ln(a^a \cdot b^b \cdot c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}} = (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}.$

【558】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0).$

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2} - a^x - b^x}{a^x + b^x} \right) \ln \left[1 + \frac{1}{\frac{a^x + b^x}{a^{x^2} + b^{x^2} - a^x - b^x}} \right]^{\frac{a^x + b^x}{a^{x^2} + b^{x^2} - a^x - b^x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{a^x + b^x} \left[x \cdot \frac{a^{x^2} - 1}{x^2} + x \cdot \frac{b^{x^2} - 1}{x^2} - \frac{a^x - 1}{x} - \frac{b^x - 1}{x} \right] \\
&= \frac{1}{2} (-\ln a - \ln b) = \ln \frac{1}{\sqrt{ab}}.
\end{aligned}$$

因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln \frac{1}{\sqrt{ab}}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}.$

【559】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} \quad (a > 0, b > 0).$

解
$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} - 1}{x^2} - \frac{b^{x^2} - 1}{x^2} \right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{a^x - 1}{x} - \frac{b^x - 1}{x} \right)^2} \\
&= (\ln a - \ln b) \frac{1}{(\ln a - \ln b)^2} = \frac{1}{\ln a - \ln b}.
\end{aligned}$$

【560】 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a} \quad (a > 0).$

解
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a} = \lim_{x \rightarrow a} a^{x^a} \frac{a^{(a^x - x^a)} - 1}{a^x - x^a} = a^{a^a} \ln a.$$

【561】 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)};$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}.$

解 (1)
$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3^x)}{3^x} \cdot \frac{2^x}{\ln(1+2^x)} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{-x} \\
&= 1 \times 1 \times 0 = 0.
\end{aligned}$$

(2)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln 3 + \ln(1+3^{-x})}{x \ln 2 + \ln(1+2^{-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3 + \frac{1}{x} \ln(1+3^{-x})}{\ln 2 + \frac{1}{x} \ln(1+2^{-x})} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

【562】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln\left(1+\frac{3}{x}\right).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}} \cdot \frac{x \ln 2 + \ln(1+2^{-x})}{\frac{x}{3}} = 3 \ln 2.$$

【563】 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2.$

解 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \frac{\ln 2}{\ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \ln 2 \cdot \frac{-1}{\ln[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}} = -\ln 2.$$

【564】 求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1, n > 0).$

证 当 $x \geq 1$ 时, 存在唯一的正整数 k , 使得

$$k \leq x < k+1.$$

于是 $0 < \frac{x^n}{a^x} \leq \frac{(k+1)^n}{a^k},$

而当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $k \rightarrow +\infty$, 所以由 60 题结论有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^n}{a^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^n}{a^{k+1}} \cdot a = 0 \cdot a = 0,$$

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0.$

【565】 求证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\epsilon} = 0 \quad (a > 1, \epsilon > 0).$

证 令 $\log_a x = t$, 则 $x = a^t$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $t \rightarrow +\infty$. 所以由 564 题的结论有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{(a^t)^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{(a^t)^t} = 0.$$

求下列极限(566 ~ 597).

【566】 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$; (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3 + e^x)}{(x^4 + e^{2x})}$.

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(1 + x^2 e^{-x})}{2x + \ln(1 + x^4 e^{-2x})}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\ln(1 + x^2 e^{-x})}{x^2 e^{-x}} \cdot x e^{-x}}{2 + \frac{\ln(1 + x^4 e^{-2x})}{x^4 e^{-2x}} \cdot x^3 e^{-2x}} = \frac{1}{2}.$$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln\left(1 + \frac{x^2}{e^x}\right)}{2x + \ln\left(1 + \frac{x^4}{e^{2x}}\right)}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \frac{x^2}{e^x}\right)}{2 + \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \frac{x^4}{e^{2x}}\right)} = \frac{1}{2}.$$

【567】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x e^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x e^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + x e^x)}{x \cdot e^x} \cdot x e^x}{\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)}{\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \frac{\ln(1 + x e^x)}{x e^x}}{\frac{1}{2} x \cdot \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} + \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)}{\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}}$$

$$= \frac{1 \times 1}{0 + 1 \times 1} = 1.$$

【568】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x].$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x]$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)^{x+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x + \ln \frac{x+2}{x+1} \right]$
 $= \ln e - \ln e + \ln 1 = 0.$

【569】 $\lim_{x \rightarrow +0} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln \left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}} \right) \right] \quad (a > 1).$

解 因为当 $x \rightarrow +0$ 时, $\ln x \rightarrow -\infty$
 所以

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +0} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln \left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \ln \left(\frac{\ln a + \ln x}{\ln x - \ln a} \right)^{\ln x + \ln(\ln a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \ln \left(1 + \frac{2 \ln a}{\ln x - \ln a} \right)^{\frac{\ln x - \ln a}{2 \ln a} \cdot 2 \ln a \cdot \frac{\ln x + \ln(\ln a)}{\ln x - \ln a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} 2 \ln a \cdot \frac{\ln x + \ln \ln a}{\ln x - \ln a} \ln \left(1 + \frac{2 \ln a}{\ln x - \ln a} \right)^{\frac{\ln x - \ln a}{2 \ln a}} = 2 \ln a. \end{aligned}$$

【570】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x+1}{x-1} \right].$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x+1}{x-1} \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[1 + \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right]}{\ln^2 \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{(x + \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})} \right)}{\ln^2 \left[\left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{2}} \right]}$

$$\begin{aligned}
& \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{(x-1)^2}}{\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}} \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}{2\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

【571】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}.$

解
$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{(e^{x^2} - 1)(\sqrt{1 + x \sin x} + 1)} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2}(\sqrt{1 + x \sin x} + 1)} \\
& = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

【572】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}.$

解
$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x(e^x + e^{-x})}{2} \sin \frac{x(e^x - e^{-x})}{2}}{x^3} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} -2 \frac{\sin \frac{x(e^x + e^{-x})}{2}}{\frac{x(e^x + e^{-x})}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x(e^x - e^{-x})}{2}}{\frac{x(e^x - e^{-x})}{2}} \\
& \quad \cdot \frac{x^2(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{4x^3}
\end{aligned}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{1}{e^x} = -2.$$

【573】 $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^{\frac{x}{x+1}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}.$

解
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \ln(2e^{\frac{x}{x+1}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x} \frac{\ln[1+2(e^{\frac{x}{x+1}}-1)]}{2(e^{\frac{x}{x+1}}-1)} \times 2(e^{\frac{x}{x+1}}-1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x} \times \frac{2(e^{\frac{x}{x+1}}-1)}{\frac{x}{x+1}} \times \frac{x}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x+1} \times 2 \frac{e^{\frac{x}{x+1}}-1}{\frac{x}{x+1}} = 2, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^{\frac{x}{x+1}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^2.$

【574】 $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\sec \frac{\pi x}{2}}.$

解 因为

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \ln(2-x)^{\sec \frac{\pi x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{2}} \ln[1+(1-x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2}(x-1)}{\sin \frac{\pi}{2}(x-1)} \frac{\ln[1+(1-x)]}{1-x} \times \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\sec \frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}}.$

【575】 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^{\alpha} x)(1 - \sin^{\beta} x)}} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$

解
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^{\alpha} x)(1 - \sin^{\beta} x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{(\alpha+\beta) \ln \sin x}}{\sqrt{(1 - e^{\alpha \ln \sin x})(1 - e^{\beta \ln \sin x})}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{(\alpha+\beta)\ln \sin x}}{-(\alpha+\beta)\ln \sin x} \\
&\quad \sqrt{\frac{\alpha \ln \sin x}{(1 - e^{\alpha \ln \sin x})}} \cdot \frac{\beta \ln \sin x}{(1 - e^{\beta \ln \sin x})} \times \frac{-(\alpha+\beta)\ln \sin x^{(*)}}{\sqrt{\alpha\beta}(-\ln \sin x)} \\
&= \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}.
\end{aligned}$$

注意: $\ln \sin x \leq 0$, 故 $\sqrt{\ln^2 \sin x} = -\ln \sin x$.

【576】 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$; (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{x}$.

(参照 340 题).

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x} \right]$

$$= \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{8} \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \\
&= \frac{1}{8} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{\frac{x}{2}} + \frac{e^{-\frac{x}{2}} - 1}{-\frac{x}{2}} \right]^2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$

【576. 1】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)}$ (参照 340 题).

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)^2}{4e^{2x}} \cdot \frac{1}{\ln \left[1 + \frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2 \right]}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right)^2 \cdot \frac{\frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})}{\ln \left[1 + \frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2 \right]} \\
&\quad \cdot \left(\frac{3x}{e^{3x} - 1} \right)^2 \cdot e^x \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

【577】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x^2 + x} - \operatorname{sh} \sqrt{x^2 - x}}{\operatorname{ch} x}.$

解 $\operatorname{sh} \sqrt{x^2 + x} - \operatorname{sh} \sqrt{x^2 - x}$
 $= 2 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}}{2},$

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}}{2}}{\operatorname{ch} x} \\
&= \frac{e^{\frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}}{2}}}{e^x + e^{-x}} \\
&= e^{\left(\frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}}{2} - x \right)} \frac{1 + e^{-(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x})}}{1 + e^{-2x}}.
\end{aligned}$$

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}}{2} - x \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} + \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} \right) = 0,$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x^2 + x} - \operatorname{sh} \sqrt{x^2 - x}}{\operatorname{ch} x}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}}{2}$
 $\quad \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}}{2}}{\operatorname{ch} x} = 2 \operatorname{sh} \frac{1}{2}.$

$$\text{【577. 1】} \quad (1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a}{x - a};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} a}{x - a}.$$

$$\text{解} \quad (1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{2} \left[\frac{e^x - e^a}{x - a} - \frac{e^{-x} - e^{-a}}{x - a} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{2} \left[e^a \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} + e^{-a} \frac{e^{-(x-a)} - 1}{-(x - a)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (e^a + e^{-a}) = \operatorname{ch} a.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} a}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{2} \left[\frac{e^x - e^a}{x - a} + \frac{e^{-x} - e^{-a}}{x - a} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a} \left[e^a \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} - e^{-a} \frac{e^{-(x-a)} - 1}{-(x - a)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (e^a - e^{-a}) = \operatorname{sh} a.$$

$$\text{【577. 2】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln \cos x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2} \right)}{\ln \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2} \right)}{\frac{e^x + e^{-x} - 2}{2}} \cdot \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\ln \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right)}$$

$$\times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x + e^{-x} - 2}{2}}{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} \right]^2 \cdot \left[\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right]^2 \\
&= -\frac{1}{4} \times 2^2 \times 1 = -1.
\end{aligned}$$

【578】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln \operatorname{ch} x).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln \operatorname{ch} x)$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln e^x + \ln 2 - \ln(1 + e^{-2x})) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - \ln(1 + e^{-2x})) = \ln 2.
\end{aligned}$$

【579】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{th} x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{th} x}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin 2x} - e^{\sin x})(e^{2x} + 1)}{e^{2x} - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin 2x - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{2x} \right) (e^{2x} + 1)}{\frac{e^{2x} - 1}{2x}} \\
&= \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \right) \times 2}{1} = 1.
\end{aligned}$$

【580】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right]^{n^2}$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right]^{n^2}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[\ln \frac{e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}}}{2} - \ln \cos \frac{\pi}{n} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[\ln \left(1 + \frac{1}{2} (e^{\frac{\pi}{2n}} - e^{-\frac{\pi}{2n}})^2 \right) - \ln \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{2} (e^{\frac{\pi}{2n}} - e^{-\frac{\pi}{2n}})^2 \right)}{\frac{1}{2} (e^{\frac{\pi}{2n}} - e^{-\frac{\pi}{2n}})^2} \cdot \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2n}} - e^{-\frac{\pi}{2n}}}{\frac{\pi}{2n}} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\ln \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \right)}{-2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{2} \right] \\
&= 2^2 \times \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{2} = \pi^2,
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right]^{n^2} = e^{\pi^2}.$$

【581】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1}$

$$= \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

【582】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x}-x).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

$$= \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{【583】} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \arctan \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \arctan \frac{x-4}{(x-2)^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{【584】} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{【585】} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan(x+h) - \arctan x}{h}.$$

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan x \rightarrow 0$. 故令 $t = \arctan x$, 则 $x = \tan t$.

$$\text{所以} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \tan(\arctan(x+h) - \arctan x) &= \frac{x+h-x}{1+(x+h)x} \\ &= \frac{h}{1+x(x+h)}, \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \arctan(x+h) - \arctan x = \arctan \frac{h}{1+x(x+h)}.$$

$$\begin{aligned} \text{因此} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan(x+h) - \arctan x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{h}{1+x(x+h)}}{\frac{h}{1+x(x+h)}} \cdot \frac{h}{1+x(x+h)} \cdot \frac{1}{h} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

$$\text{【586】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)}{\frac{2x}{1-x}} \cdot \frac{\frac{2x}{2-x^2}}{\arctan \frac{2x}{2-x^2}} \cdot \frac{2-x^2}{1-x} \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

$$\text{【587】} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \arctan \frac{1}{n(x^2+1)+x} \cdot \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2n} \right) \right].$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \text{因为} \lim_{n \rightarrow \infty} n \arctan \frac{1}{n(x^2+1)+x} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan \frac{1}{n(x^2+1)+x}}{\frac{1}{n(x^2+1)+x}} \cdot \frac{n}{n(x^2+1)+x} \\
 &= \frac{1}{1+x^2}.
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{1 + \tan \frac{x}{2n}}{1 - \tan \frac{x}{2n}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left[1 + \frac{2 \tan \frac{x}{2n}}{1 - \tan \frac{x}{2n}} \right]}{\frac{2 \tan \frac{x}{2n}}{1 - \tan \frac{x}{2n}}} \cdot \frac{\tan \frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}} \cdot \frac{x}{1 - \tan \frac{x}{2n}} \\
 &= x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{因此} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \arctan \frac{1}{n(x^2+1)+x} \cdot \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2n} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{1+x^2} \cdot e^x = \frac{e^x}{1+x^2}.
 \end{aligned}$$

【588】 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1} \right).$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \arctan \frac{1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan \frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x+1}} \cdot \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}.$$

【589】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right).$

解 因为

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = \cos \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2 \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1.$$

【590】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\operatorname{cosec}(\pi \sqrt{1+n^2})}.$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\operatorname{cosec}(\pi \sqrt{1+n^2})}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{cosec}(\pi \sqrt{1+n^2}) \cdot \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n}}{\sin(n\pi - \pi \sqrt{1+n^2})} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)}{\frac{(-1)^n}{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n}}{\sin \frac{-1}{n + \sqrt{1+n^2}} \pi} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n}}{\frac{-1}{n + \sqrt{1+n^2}} \pi} \cdot \frac{\frac{-1}{n + \sqrt{1+n^2}} \pi}{\sin \frac{-1}{n + \sqrt{1+n^2}} \pi} = \frac{2}{\pi},
\end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}(\pi \sqrt{1+n^2})} = e^{\frac{2}{\pi}}.$

【591】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{\frac{1}{x^2}}.$

解 令 $t = \frac{1}{x}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow \infty$,

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{100}}{e^{t^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t^2)^{50}}{e^{t^2}} = 0.$

注:最后一步利用 564 题的结果.

【592】 $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x.$

解 设 $t = \frac{1}{x}$, 则当 $x \rightarrow +0$ 时, $t \rightarrow +\infty$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\ln t}{t} = 0.$$

注:最后一步利用 565 题的结果.

【593】 (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x);$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = +\infty.$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

【594】 (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2});$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}).$

解 (1) 注意当 $x < 0$ 时, $x = -\sqrt{x^2}$, 所以

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = -1. \end{aligned}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 1. \end{aligned}$$

【594. 1】 若

$$f(x) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{x + \sqrt{x^2 + b^2}},$$

求出 $h = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$

解 当 $x < 0$ 时, $-x = \sqrt{x^2}$, 所以

$$\begin{aligned} h &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{b^2}{x^2}}} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + b^2} - x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{b^2}{x^2}}} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left[\frac{\frac{a^2}{b^2} \sqrt{1 + \frac{b^2}{x^2} + 1}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2} + 1}} \right] \\
 &= -2 \ln \frac{a}{b}.
 \end{aligned}$$

【595】 (1) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \arctan \frac{1}{1-x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \arctan \frac{1}{1-x}$.

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \arctan \frac{1}{1-x} = \frac{\pi}{2}$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \arctan \frac{1}{1-x} = -\frac{\pi}{2}$.

【596】 (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; (2) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

解 (1) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1;$$

(2) 当 $x \rightarrow +0$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

【597】 (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$.

解 (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} \cdot \frac{e^x}{x} = 0$;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(1+e^{-x})}{x} = 1$.

【598】 证明:

(1) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2+0$;

(2) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2-0$.

证 显然 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1+x} = 2$.

(1) 若 $x \rightarrow -\infty$, 当 $|x|$ 充分大时

$$\frac{2x}{1+x} = \frac{2}{1+\frac{1}{x}} > 2.$$

于是当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2+0$.

(2) 若 $x > 0$, 则 $0 < \frac{2x}{1+x} < 2$.

于是当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2-0$.

【599】 证明:

(1) 当 $x \rightarrow -0$ 时, $2^x \rightarrow 1-0$;

(2) 当 $x \rightarrow +0$ 时, $2^x \rightarrow 1+0$.

证 显然 $\lim_{x \rightarrow 0} 2^x = 1$.

(1) 当 $x < 0$ 时, $0 < 2^x < 1$. 于是, 当 $x \rightarrow -0$ 时, $2^x \rightarrow 1-0$.

(2) 当 $x > 0$ 时, $2^x > 1$. 于是, 当 $x \rightarrow +0$ 时, $2^x \rightarrow 1+0$.

【600】 若: $f(x) = x + [x^2]$, 求: $f(1)$, $f(1-0)$, $f(1+0)$.

解 $f(1) = 2$,

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x + [x^2]) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x + 0) = 1,$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + [x^2]) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + 1) = 2.$$

【601】 若: $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$

求: $f(n)$, $f(n-0)$, $f(n+0)$ ($n = 0, \pm 1, \dots$).

解 $f(n) = 0$,

$$f(n-0) = \lim_{x \rightarrow n-0} \operatorname{sgn}(\sin \pi x) = (-1)^{n-1},$$

$$f(n+0) = \lim_{x \rightarrow n+0} \operatorname{sgn}(\sin \pi x) = (-1)^n$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

求下列极限(602 ~ 606).

【602】 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$.

解 因为 $\sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ 为有界函数, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = 0$.

【603】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \right]$.

解 因为 $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] < \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$.

当 $x > 0$ 时, $1 - x < x \left[\frac{1}{x} \right] < 1$;

当 $x < 0$ 时, $1 - x > \left[\frac{1}{x} \right] > 1$.

而 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x) = 1$,

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \right] = 1$.

【604】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1} - n\pi) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \pi = 0. \end{aligned}$$

【605】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n})$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2[\pi(\sqrt{n^2 + n} - n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2\left(\frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \pi\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

【606】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_{n \text{ 个}}$.

解 先设 $0 \leq x \leq \pi$, 这时 $0 \leq \sin x \leq x$, 从而
 $0 \leq \sin \sin x \leq \sin x \leq 1$,

依此类推有

$$0 \leq \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_{n \uparrow} \leq \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_{n-1 \uparrow} \leq 1,$$

即 $\underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_{n \uparrow}$ 是单调减少的有界数列. 从而, $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_{n \uparrow}$ 存

在, 设为 A , 显然 $0 \leq A \leq 1$. 因此

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_n = \sin \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_{n-1} \right) = \sin A$$

因此 $A = 0$.

再设 $-\pi \leq x \leq 0$,

则 $0 \leq -x \leq \pi$,

且 $\sin \sin \cdots \sin x = -\sin \sin \cdots \sin(-x)$,

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_{n \uparrow} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin(-x)}_{n \uparrow} = 0$.

再由 $\sin x$ 的周期性, 得对任一 x 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_{n \uparrow} = 0.$$

【607】 若 $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$ 及 $\lim_{x \rightarrow A} \psi(x) = B$, 由此能否推导出 $\lim_{x \rightarrow a} \psi(\varphi(x)) = B$?

研究下例:

当 $x = \frac{p}{q}$ (式中 p 和 q 为互质整数) 时, $\varphi(x) = \frac{1}{q}$; 当 x 为无

理数时, $\varphi(x) = 0$;

当 $x \neq 0$ 时, $\psi(x) = 1$;

当 $x = 0$ 时, $\psi(x) = 0$. 而且 $x \rightarrow 0$.

解 不一定. 例于对于函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{当 } x = \frac{p}{q} \text{ (其中 } p \text{ 和 } q \text{ 互质) 时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时,} \end{cases}$$

及 $\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x = 0, \end{cases}$

显然 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0,$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 1,$

但 $\psi(\varphi(x)) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时,} \end{cases}$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(\varphi(x))$ 不存在.

【608】 证明柯西定理:

如果函数在区间 $(a, +\infty)$ 有定义并且在每个有穷区间 (a, b) 内是有界的, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)];$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} \quad (f(x) \geq C > 0),$$

假设在等式的右边极限都存在.

证 (1) 设

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = A.$$

则任给 $\varepsilon > 0$, 必存在正数 $X_0 > 0$, 使得当 $x \geq X_0$ 时, 恒有

$$|f(x+1) - f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

现设 $x > X_0 + 1$, 于是存在一个唯一的正整数 n (依赖于 x), 满足 $n \leq x - X_0 < n + 1$. 令 $\tau = x - X_0 - n$, 则

$$0 \leq \tau < 1, x = X_0 + n + \tau.$$

于是我们有

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)}{x} - A \\ &= \frac{n}{x} \left[\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} - A \right] + \frac{f(X_0 + \tau)}{x} \\ & \quad - \frac{(X_0 + \tau)A}{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{显然} \quad & \left| \frac{x}{n} \left[\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} - A \right] \right| \\
& \leq \left| \frac{f(X_0 + \tau + n) - f(X_0 + \tau)}{n} - A \right| \\
& = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n [f(x_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1) - A] \right| \\
& \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1) - A| \\
& \leq \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

由假定知 $f(x)$ 在 $X_0 \leq x < X_0 + 1$ 上有界. 故存在 $X_1 > 0$, 使得当 $x > X_1$ 时,

$$\left| \frac{f(X_0 + \tau)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (0 \leq \tau < 1).$$

另外, 显然存在 $X_2 > 0$, 使得当 $x > X_2$ 时,

$$\left| \frac{(X_0 + \tau)A}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $X = \max\{X_0 + 1, X_1, X_2\}$, 于是当 $x > X$ 时, 必有

$$\left| \frac{f(x)}{x} - A \right| < \varepsilon,$$

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)).$

(2) 设

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = B.$$

因为 $f(x) \geq C > 0$,

所以 $B \geq 0$. 下面证明 $B > 0$. 事实上, 若 $B = 0$, 则必存在 $X_0 > 0$, 使得当 $x \geq X_0$ 时,

$$0 < \frac{f(x+1)}{f(x)} < \frac{1}{2}.$$

于是 $0 < \frac{f(X_0 + n)}{f(X_0)}$

$$= \frac{f(X_0 + n)}{f(X_0 + n - 1)} \cdot \frac{f(X_0 + n - 1)}{f(X_0 + n - 2)} \cdots \frac{f(X_0 + 1)}{f(X_0)} \\ < \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(X_0 + n) = 0$, 这与 $f(x) \geq C > 0$ 相矛盾. 因此, 有 $B > 0$.

由于 $f(x) \geq C > 0$, 且 $f(x)$ 在每个有穷区间 (a, b) 内有界, 故 $\ln f(x)$ 在每个有穷区间 (a, b) 内也有界, 并且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln f(x+1) - \ln f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{f(x+1)}{f(x)} = \ln B.$$

于是, 将(1)的结果用于函数 $\ln f(x)$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{x} = \ln B,$$

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{\frac{1}{x}} = B$.

【609】 证明: 如果(1) 函数 $f(x)$ 在域 $x > a$ 内有定义;

(2) 在每个有限的域 $a < x < b$ 内有界;

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$,

则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$.

注: 原题应改为如果(1) $f(x)$ 定义在域 $x > a$ 内,

(2) 在每一个有限的域 $a < x < b$ 内为有界,

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = +\infty$ (或 $-\infty$)

则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty (-\infty)$.

原题中条件(3) 误为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$ 结论误为

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$. 例如, 按下式定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 2n & x \in [2n, 2n+1) \\ -2n & x \in [2n+1, 2n+2) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

显然 $f(x)$ 满足条件(1), (2) 并且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty.$$

但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq \infty$,

事实上 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$,

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

证 只须证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = +\infty$ 的情形. 这时要证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, $\forall E > 0, \exists X_0 > 0$, 使得当 $x \geq X_0$ 时 $f(x+1) - f(x) > 4E$. 现设 $x > 2(X_0 + 1)$. 则恰有一正整数 n , 满足 $n \leq x - X_0 < n + 1$, 令 $\tau = x - X_0 - n$, 则 $0 \leq \tau < 1$, $x = X_0 + \tau + n$. 由于 $n + 1 > x - X_0 > X_0 + 2$, 故 $n > X_0 + 1 > X_0 + \tau$. 从而

$$x = X_0 + \tau + n < 2n,$$

即 $\frac{n}{x} > \frac{1}{2}$.

又 $\frac{f(x)}{x} = \frac{n}{x} \cdot \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} + \frac{f(X_0 + \tau)}{x}$,

$$\begin{aligned} \text{显然 } & \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)] \\ &> \frac{1}{n} \times n \cdot 4E = 4E, \end{aligned}$$

故 $\frac{n}{x} \cdot \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} > 2E$.

由于 $f(x)$ 在 $X_0 \leq x < X_0 + 1$ 上有界, 故存在正数 X_1 , 使得当 $x > X_1$ 时, $\left| \frac{f(X_0 + \tau)}{x} \right| < E$.

令 $X = \max\{2(X_0 + 1), X_1\}$, 则当 $x > X$ 时, $\frac{f(x)}{x} > E$,

即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

【610】 证明:如果(1) 函数 $f(x)$ 在域 $x > a$ 内有定义;(2) 在每个有限的域 $a < x < b$ 内有界;(3) 对于某个自然数 n 存在着有穷或无穷极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = l$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

证 我们先证明一条一般性的定理:

若(1) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都定义在 $x > a$ 内;

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在每一个有限区间 $a < x < b$ 内均有界, 并且当 $x > a$ 时, $g(x+1) > g(x)$, 又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$;

(3) 存在极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} = l$$

(l 为有限数或为 $+\infty$ 或为 $-\infty$),

则必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

证明如下:

第一情况: l 为有限数. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在正数 $X_0 > a$, 使得当 $x \geq X_0$ 时, 恒有

$$\left| \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现设 $x > X_0 + 1$. 于是存在唯一的整数 n (依赖于 x) 使得 $n \leq x - X_0 < n + 1$, 令 $\tau = x - X_0 - n$,

则 $0 \leq \tau < 1$, $x = X_0 + \tau + n$,

因此 $\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} - l$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} \\ &\quad \cdot \left[\frac{f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)}{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)} - l \right], \end{aligned}$$

$$\text{而} \quad \left| \frac{f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)}{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

又由于

$$g(x) = g(X_0 + \tau + n) > g(X_0 + \tau + n - 1) > \dots > g(X_0 + \tau),$$

从而

$$\frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} > 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

$$\text{由此可知} \quad \left| \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} - l \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\text{并且} \quad \frac{f(x)}{g(x)} - l$$

$$= \left[1 - \frac{g(X_0 + \tau)}{g(x)} \right] \cdot \left[\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} - l \right]$$

$$+ \frac{f(X_0 + \tau) - lg(X_0 + \tau)}{g(x)}.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, 并且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $X_0 \leq x < X_0 + 1$ 上有界, 故必存在 $X_1 > a$, 使得当 $x > X_1$ 时, 恒有

$$\left| \frac{g(X_0 + 1)}{g(x)} \right| < \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{f(X_0 + \tau) - lg(X_0 + \tau)}{g(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

令 $X = \max\{X_1, X_0 + 1\}$, 于是当 $x > X$ 时, $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \varepsilon$.

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

第二种情况: $l = +\infty$. 任给 $M > 0$, 存在正数 $X_0 > a$, 使得当 $x \geq X_0$ 时, 恒有

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)} > 4M,$$

与前面一样的证明,可得当 $x > X_0 + 1$ 时有

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)} \\ & \quad \cdot \frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)} \\ &> 4M \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)} \\ &= 4M, \end{aligned}$$

并且
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left[1 - \frac{g(X_0+\tau)}{g(x)} \right] \frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)} + \frac{f(X_0+\tau)}{g(x)}.$$

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$,

以及 $f(x), g(x)$ 在 $X_0 \leq x < X_0 + 1$ 上有界,故存在正数 $X_1 > a$,使得当 $x > X_1$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(X_0+\tau)}{g(x)} \right| &< \frac{1}{2} \\ \left| \frac{f(X_0+\tau)}{g(x)} \right| &< M \end{aligned}$$

令 $X = \max\{X_0 + 1, X_1\}$,则当 $x > X$ 时,恒有

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2} \cdot 4M - M = M,$$

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

第三种情况: $l = -\infty$. 则设 $F(x) = -f(x)$,因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x+1)-F(x)}{g(x+1)-g(x)} = +\infty,$$

由第二种情况的证明,我们有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{g(x)} = +\infty$,

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

现在我们应用此一般性定理来证明本题. 设 $g(x) = x^{n+1}$, 则 $g(x)$ 满足一般性定理的条件, 并且

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(n+1)x^n + \frac{1}{2}(n+1)nx^{n-1} + \cdots + (n+1)x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} \cdot \frac{x^n}{(n+1)x^n + \frac{1}{2}(n+1)nx^{n-1} + \cdots + 1} \\ &= \frac{l}{n+1}, \end{aligned}$$

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1)^n - x^n} = \frac{l}{n+1}$.

注: 原题所说明无穷, 必须是带符号的无穷, 即 $+\infty$ 或 $-\infty$. 参见 609 题的注.

【611】 证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x.$$

证 (1) 当 $x = 0$ 时, 等式显然成立.

当 $x \neq 0$ 时, 令 $y_n = \frac{n}{x}$, 由 71 题的结果, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{y_n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n}\right]^x = e^x.$$

(2) 当 $x = 0$ 时, 显然. 先讨论 $x > 0$ 的情形. 由牛顿二项式定理得

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots \\
 &\quad + \frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
 &\leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

另一方面, 当 $m > n$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m &> 1 + x + \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \cdots \\
 &\quad + \frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right).
 \end{aligned}$$

令 $m \rightarrow +\infty$ (n 保持不变), 得

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x \quad (x > 0).$

由

$$\begin{aligned}
 \text{于} \quad &\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) \\
 &= 1 + (-1)^n \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2.
 \end{aligned}$$

而对固定的 x , $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. 因此对 $x < 0$, 仍然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x.$$

【612】 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!) = 2\pi$.

提示: 利用 72 题的公式.

证 由 72 题有

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{\theta_k}{k!k},$$

其中 $0 < \theta_k < 1$, 因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$$

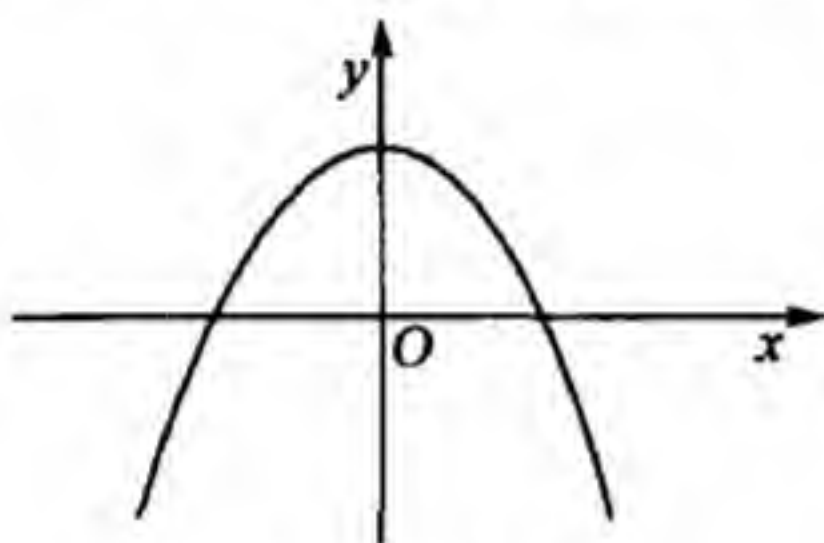
$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left[2\pi n! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left[2\pi \left(\frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right) \right]}{2\pi \left(\frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right)} \cdot 2\pi n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right) \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

绘制以下函数的图形(613 ~ 625).

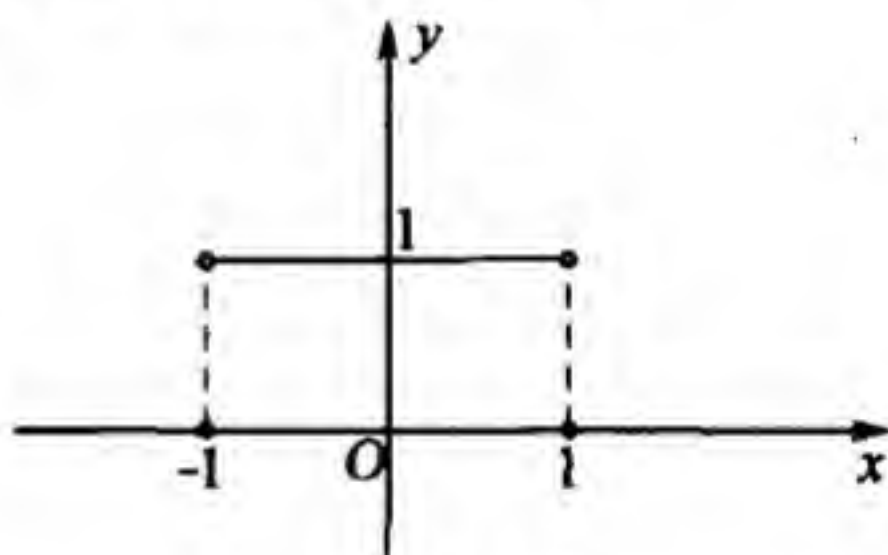
【613】 (1) $y = 1 - x^{100}$;

(2) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{2n}) \quad (-1 \leq x \leq 1)$.

解 (1) 图形关于 y 轴对称. 如 613 题图 1 所示.



613 题图 1



613 题图 2

(2) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{2n}) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1. \end{cases}$

如 613 题图 2 所示.

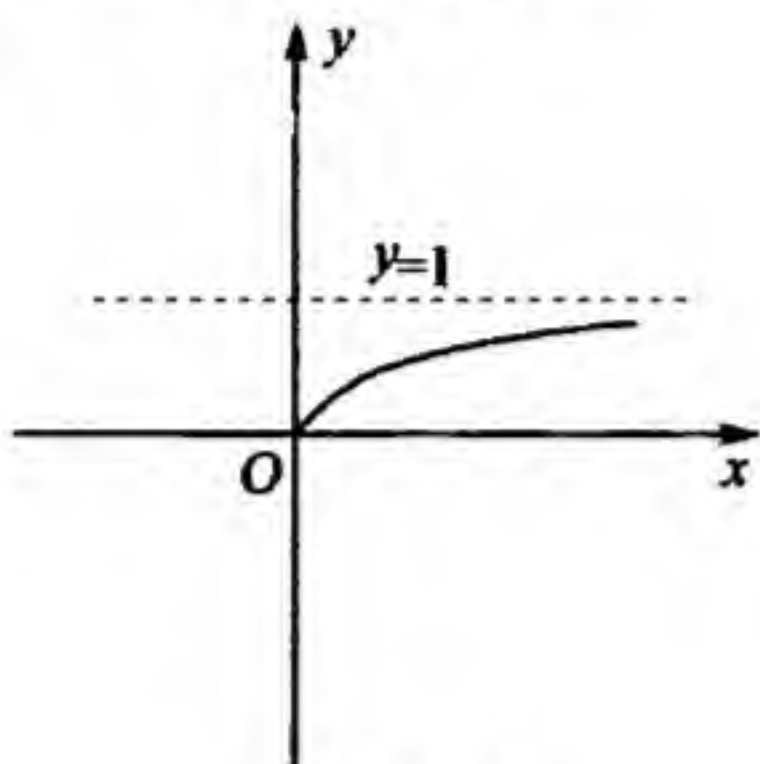
【614】 (1) $y = \frac{x^{100}}{1 + x^{100}} \quad (x \geq 0)$;

(2) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1 + x^n} \quad (x \geq 0)$.

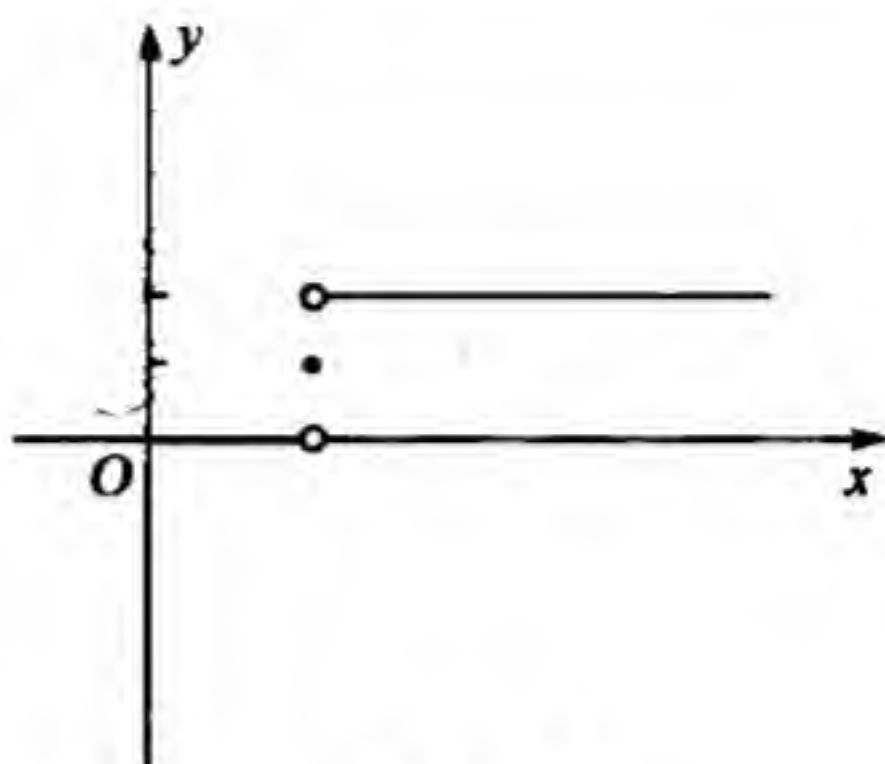
解 (1) 如 614 题图 1 所示.

(2) $y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

如 614 题图 2 所示.



614 题图 1



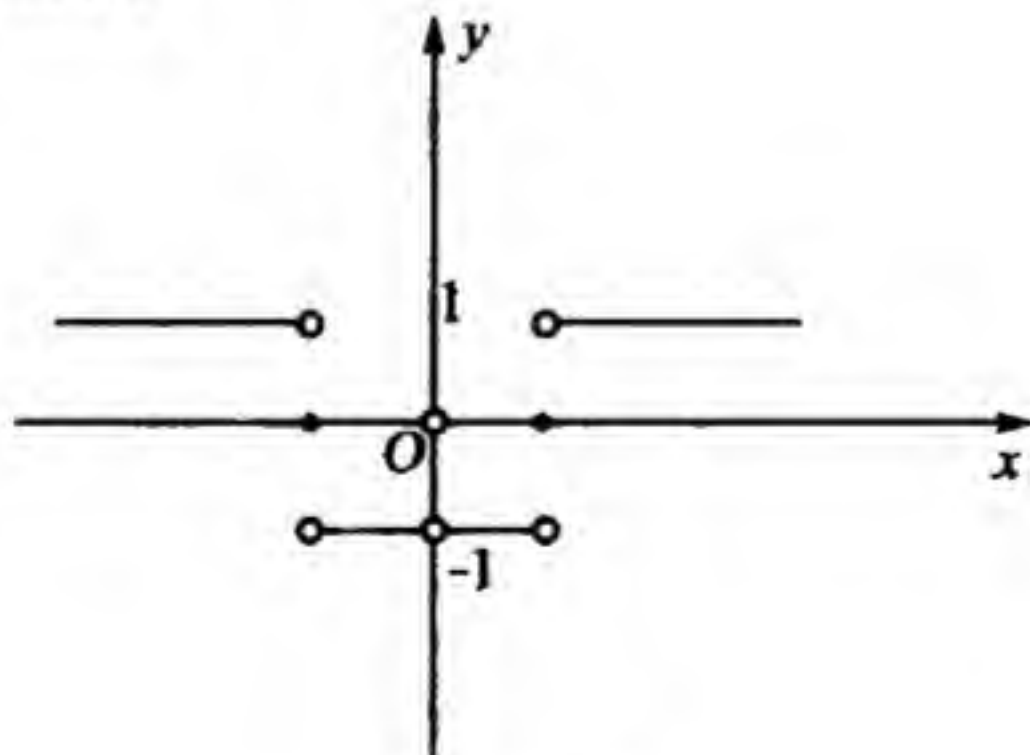
614 题图 2

【615】 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \quad (x \neq 0).$

解 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$

$$= \begin{cases} -1, & \text{若 } |x| < 1 (x \neq 0), \\ 0, & \text{若 } |x| = 1, \\ 1, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

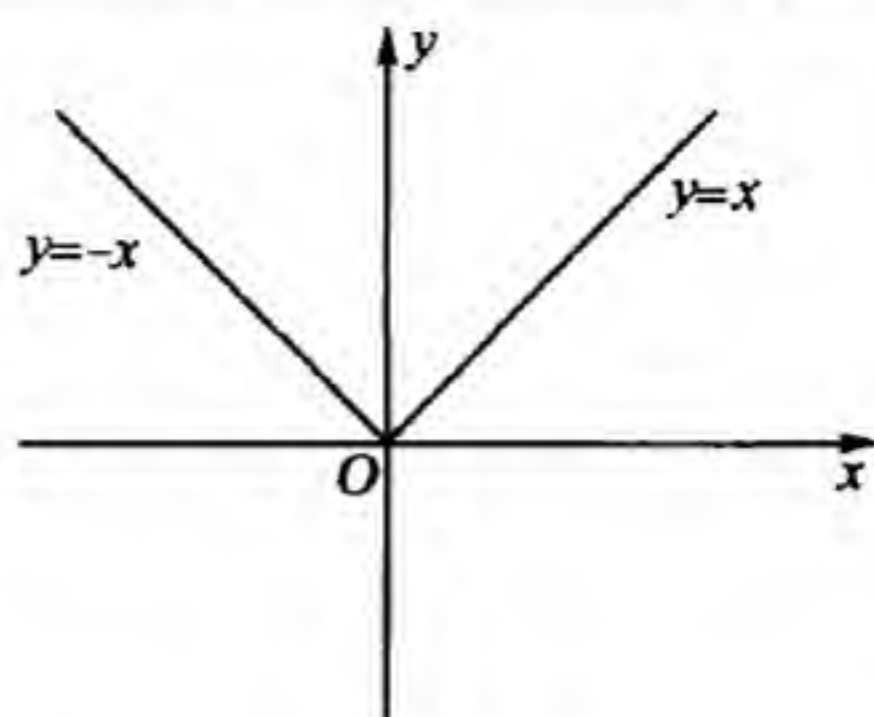
如 615 题图所示.



615 题图

【616】 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$

解 $y = \sqrt{x^2} = |x|$, 如 616 题图所示.



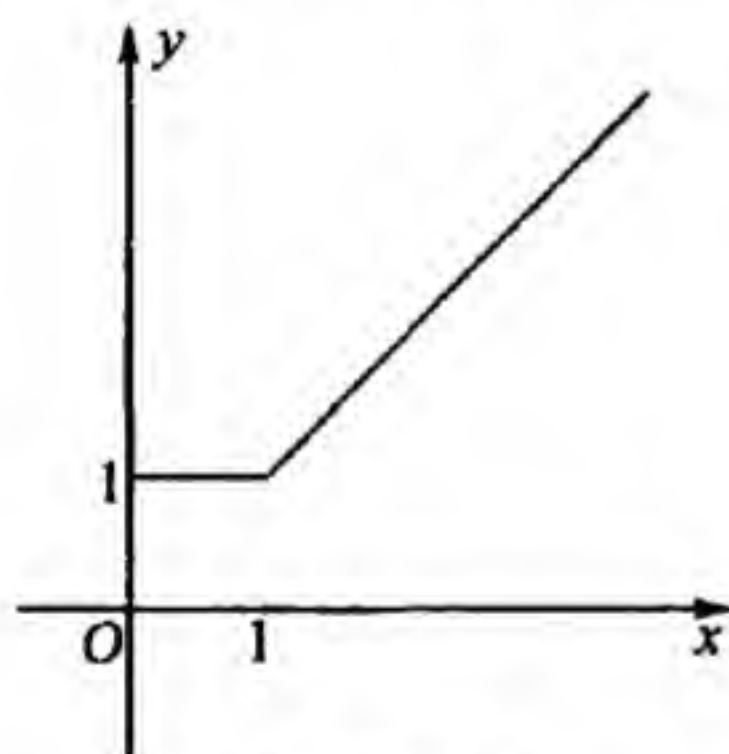
616 题图

【617】 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} \quad (x \geqslant 0).$

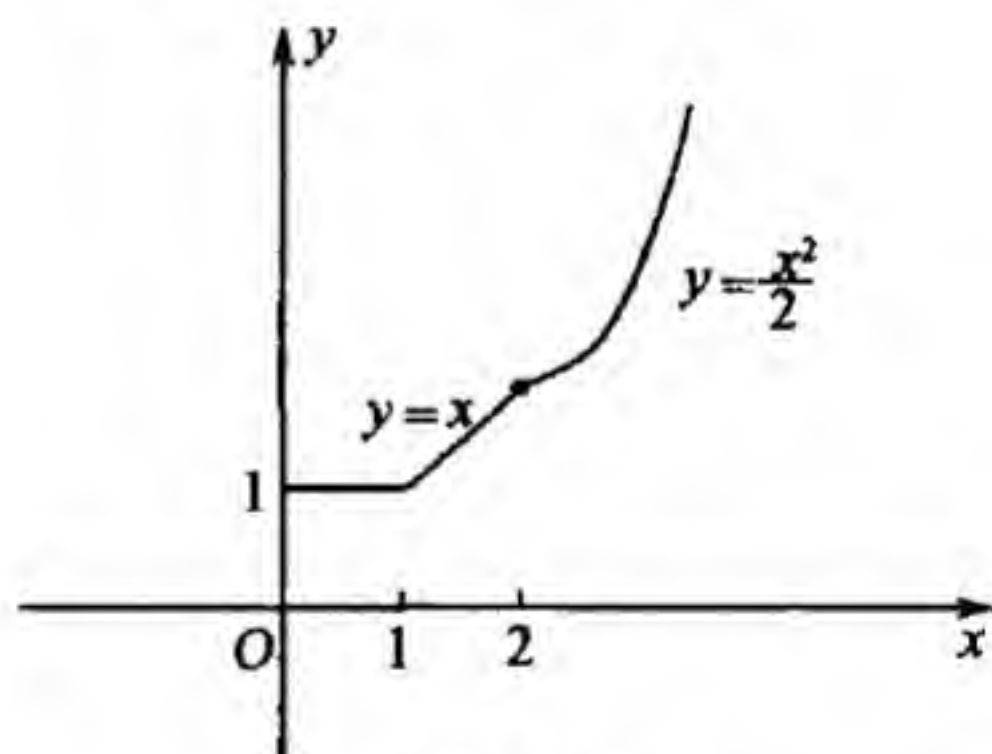
解 $y = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x, & \text{若 } x > 1. \end{cases}$

如 617 题图所示.

【618】 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \geqslant 0).$



617 题图



618 题图

解 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时, $1 \leqslant \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \leqslant 3^{\frac{1}{n}},$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = 1.$

当 $1 < x < 2$ 时

$$x \leqslant \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \sqrt[n]{x^n \left(\frac{1}{x^n} + 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n \right)} < \sqrt[n]{3}x$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = x$.

当 $x > 2$ 时

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} &\leq \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \\ &= \sqrt[n]{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n \left(\left(\frac{2}{x^2}\right)^n + \frac{2^n}{x^n} + 1\right)} \leq \sqrt[n]{3} \frac{x^2}{2}, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \frac{x^2}{2}$.

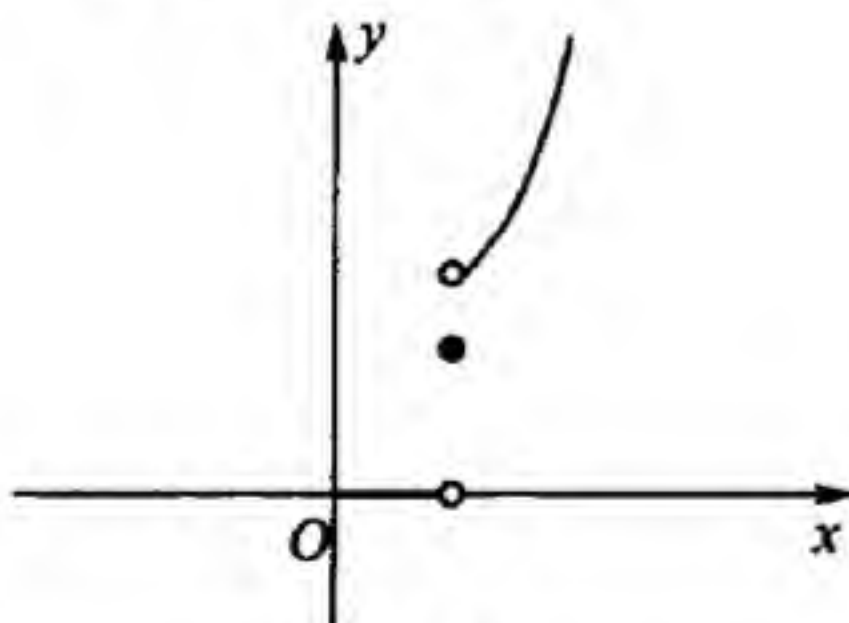
因此 $y = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1; \\ x, & \text{若 } 1 < x < 2; \\ \frac{x^2}{2}, & \text{若 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$

如 618 题图所示.

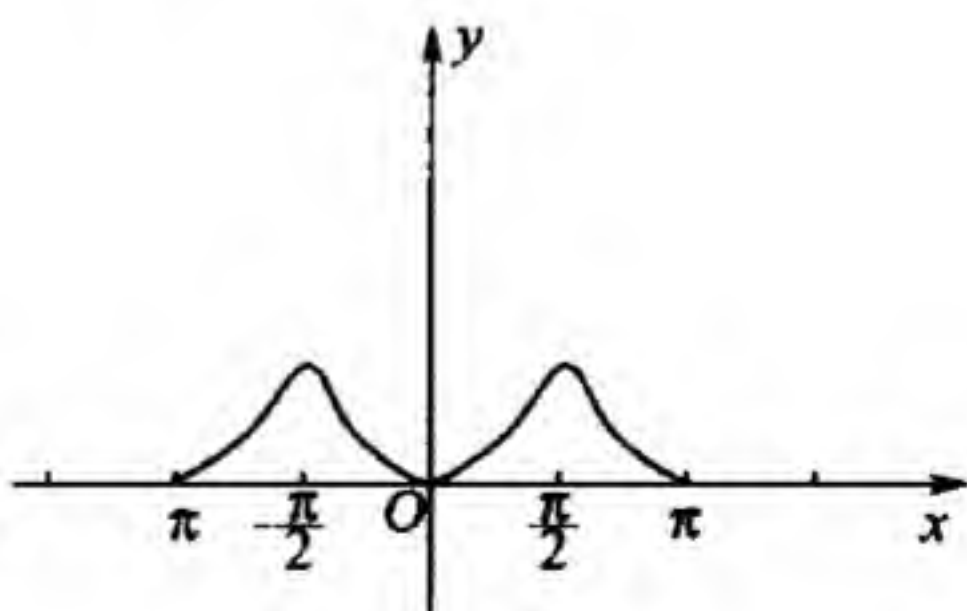
【619】 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}} \quad (x \geq 0)$.

解 $y = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leq x < 2; \\ 2\sqrt{2}, & \text{若 } x = 2; \\ x^2, & \text{若 } x > 2. \end{cases}$

如 619 题图所示.



619 题图



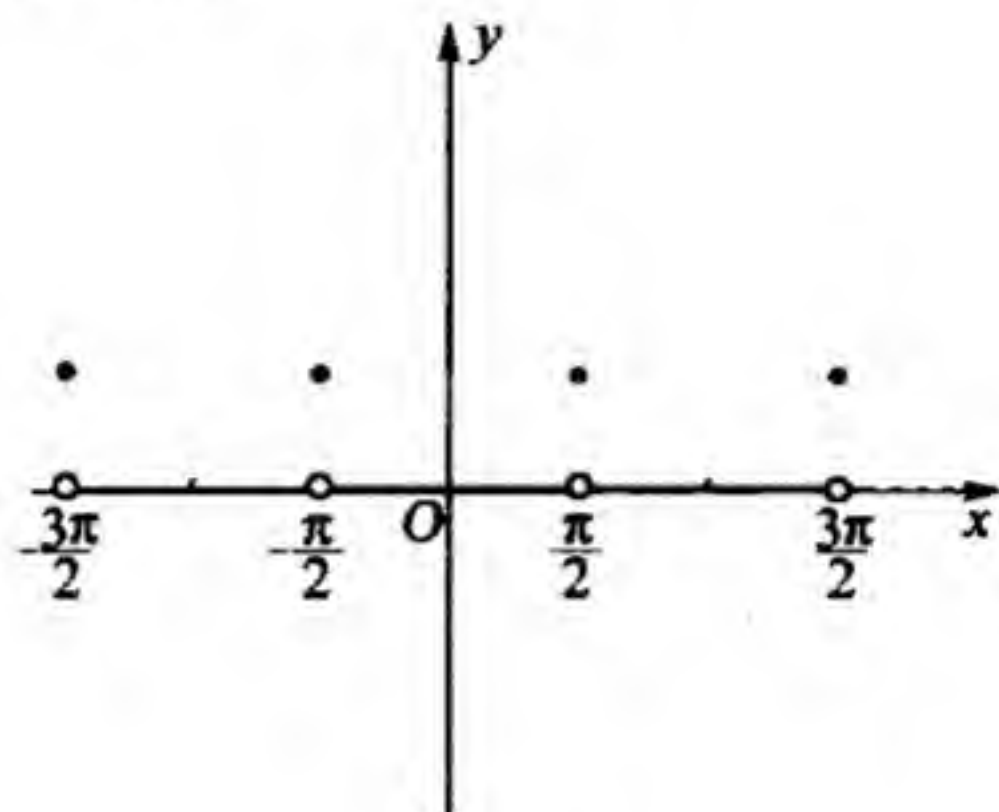
620 题图 1

【620】 (1) $y = \sin^{1000} x$; (2) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x$.

解 (1) 如 620 题图 1 所示.

$$(2) y = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } x = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 时,} \end{cases} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

如 620 题图 2 所示.

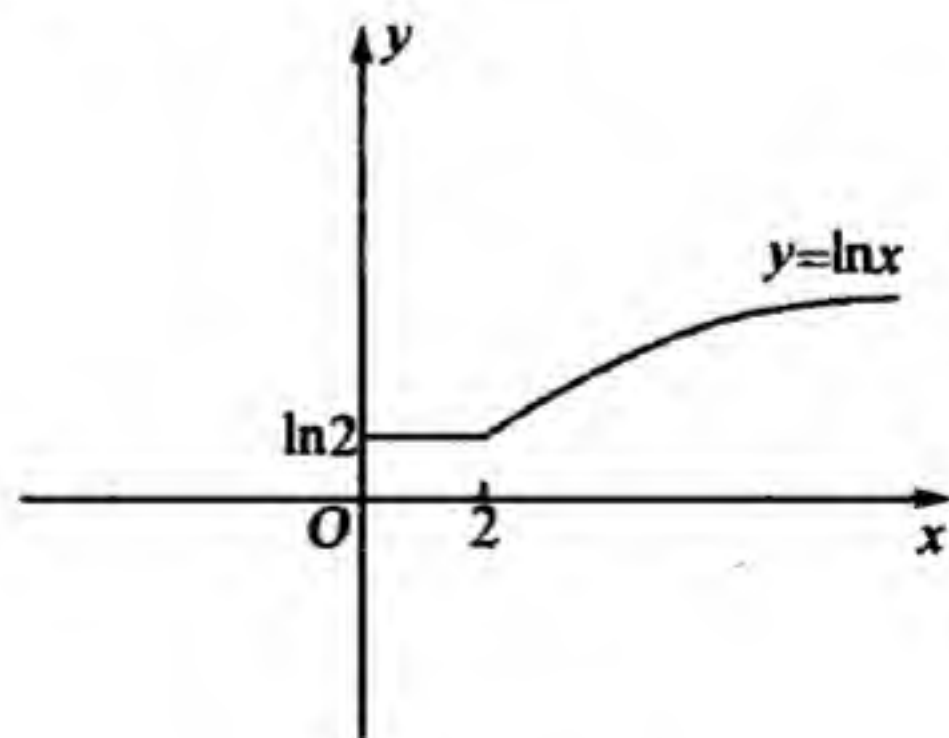


620 题图 2

$$\text{【621】 } y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n} \quad (x \geq 0).$$

$$\text{解 } y = \begin{cases} \ln 2, & \text{若 } 0 \leq x \leq 2, \\ \ln x, & \text{若 } x > 2. \end{cases}$$

如 621 题图所示.

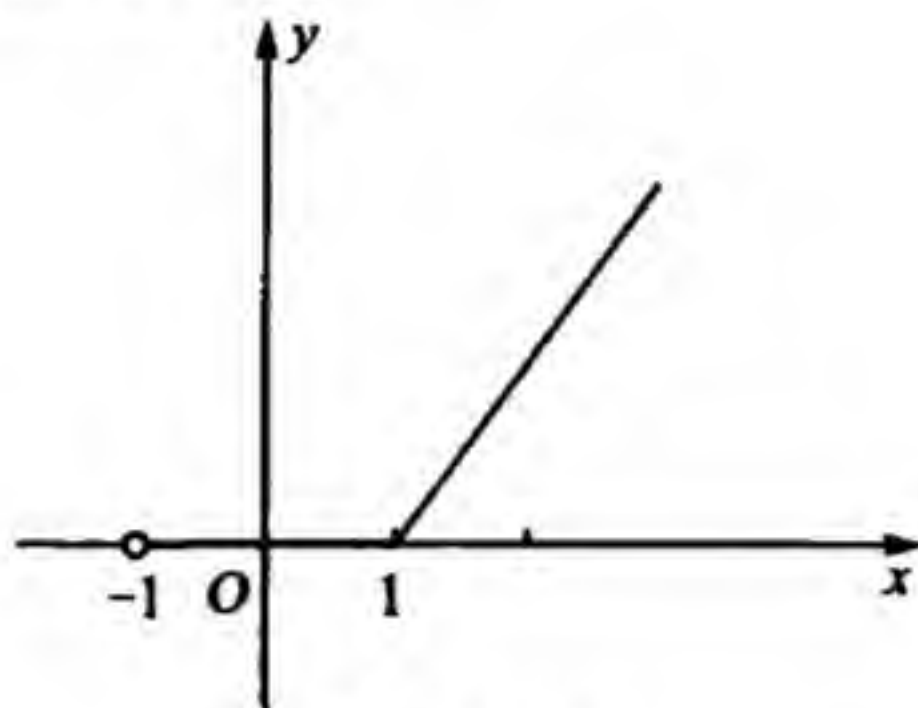


621 题图

$$\text{【622】 } y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \arctan x^n.$$

解 $y = \begin{cases} 0, & \text{若 } -1 < x \leq 1, \\ \frac{\pi}{2}(x-1), & \text{若 } x > 1. \end{cases}$

如 622 题图所示.



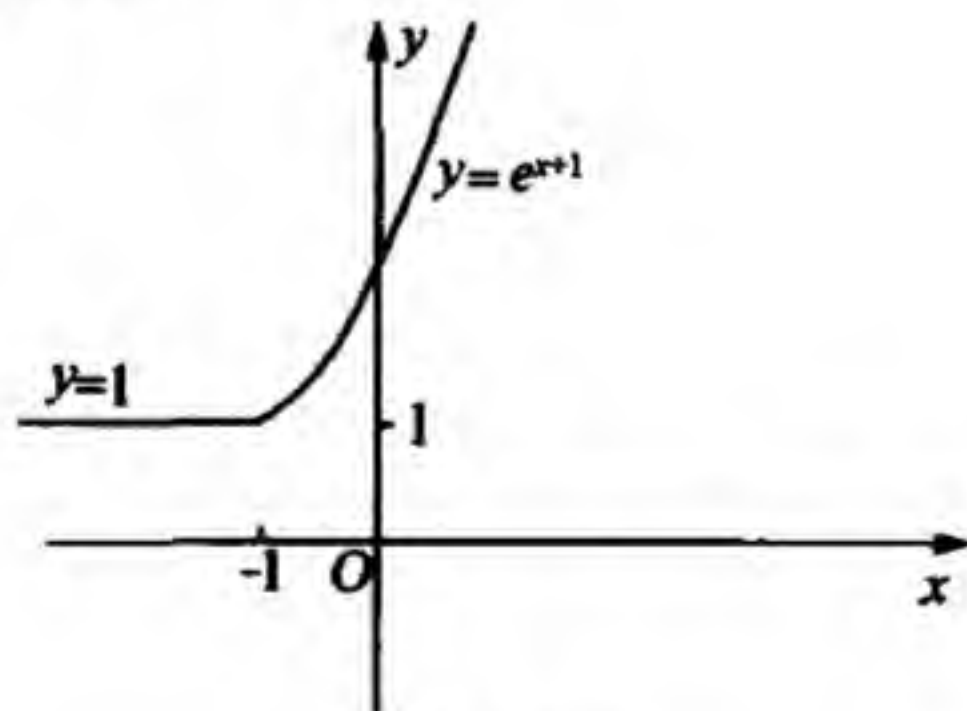
622 题图

注:应加上条件 $x > -1$.

【623】 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + e^{n(x+1)}}$.

解 $y = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \leq -1, \\ e^{x+1}, & \text{若 } x > -1. \end{cases}$

如 623 题图所示.

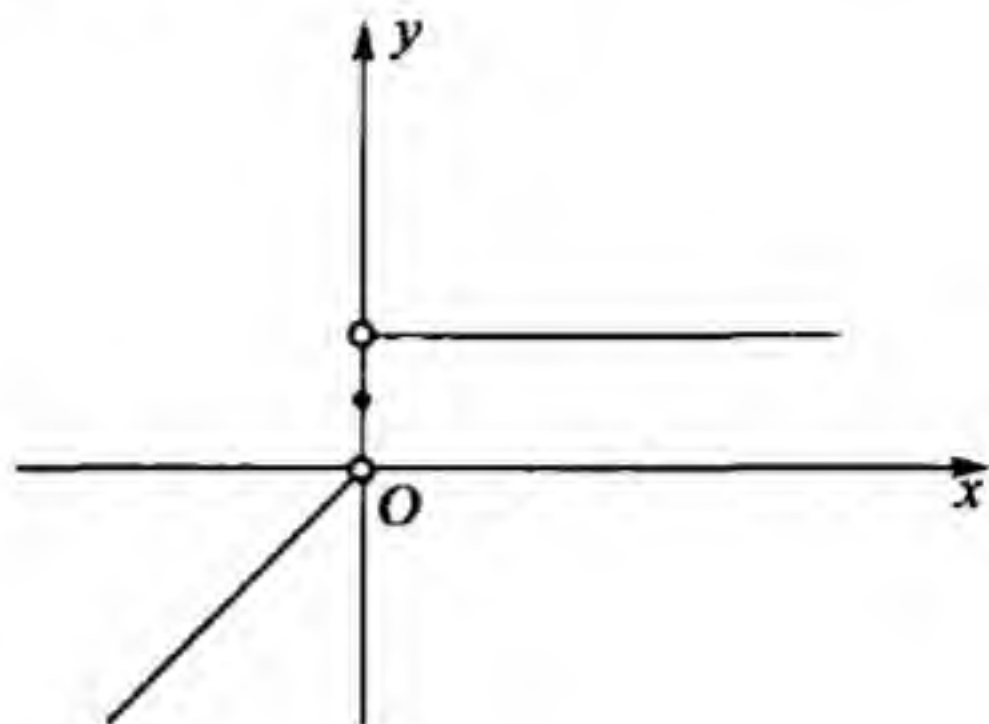


623 题图

【624】 $y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^x}{1 + e^x}$.

解 $y = \begin{cases} x, & \text{若 } x < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{若 } x = 0, \\ 1, & \text{若 } x > 0. \end{cases}$

如 624 题图所示.

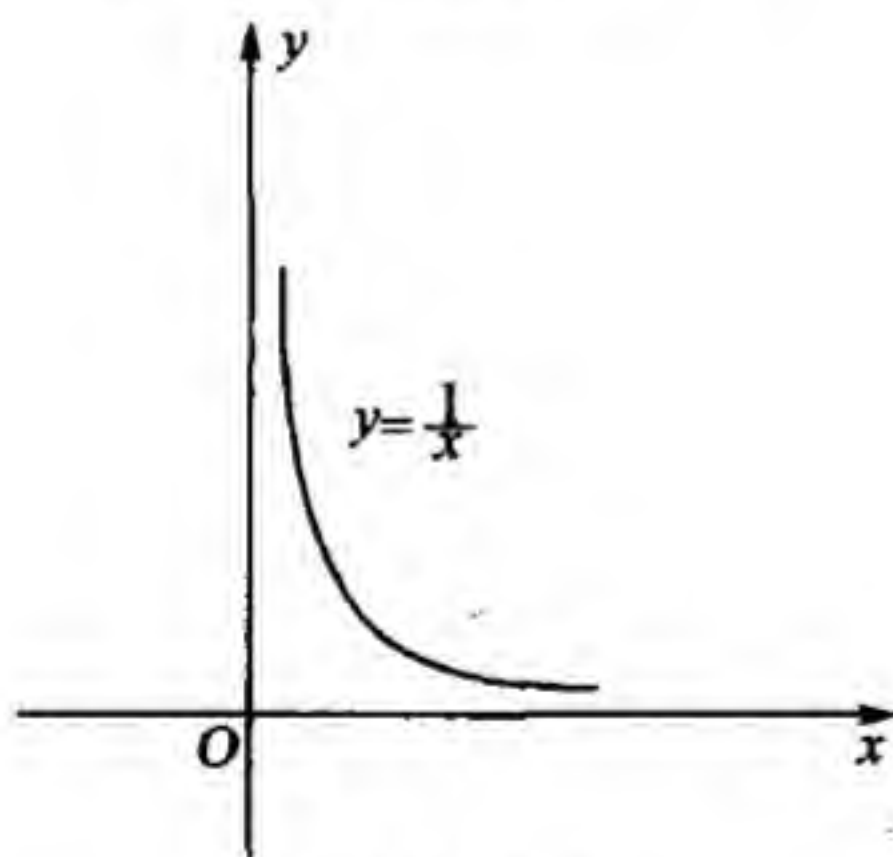


624 题图

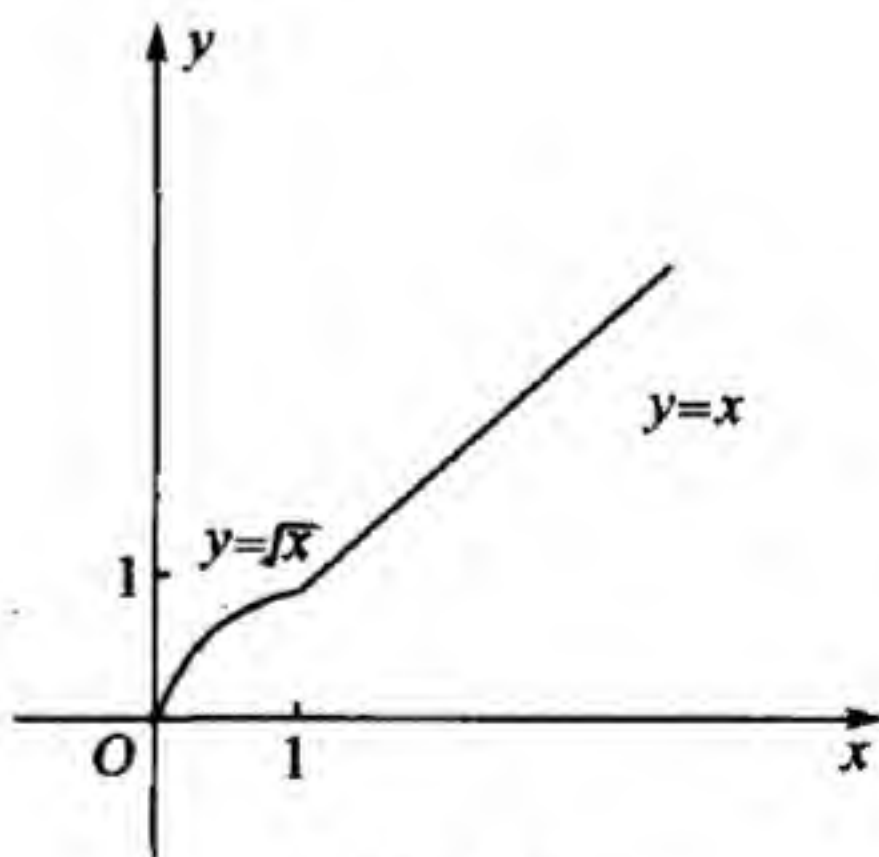
【625】 $y = \lim_{t \rightarrow x} \frac{1}{t-x} \ln \frac{t}{x} \quad (x > 0).$

解 $y = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\ln\left(1 + \frac{t-x}{x}\right)}{\frac{t-x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$

如 625 题图所示.



625 题图



625.1 题图

【625.1】 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \tan^{2n} \frac{\pi x}{4} + \sqrt{x}}{\tan^{2n} \frac{\pi x}{4} + 1} \quad (x \geq 0).$

$$\text{解 } y = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

如 625.1 题图.

$$\text{【625.2】 } y = \lim_{n \rightarrow \infty} x \operatorname{sgn} |\sin^2(n! \pi x)|.$$

若 x 为有理数, 则 x 可表示为某既约分数, 故

$$\text{解 } y = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为无理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为有理数时.} \end{cases}$$

如 625.2 题图所示

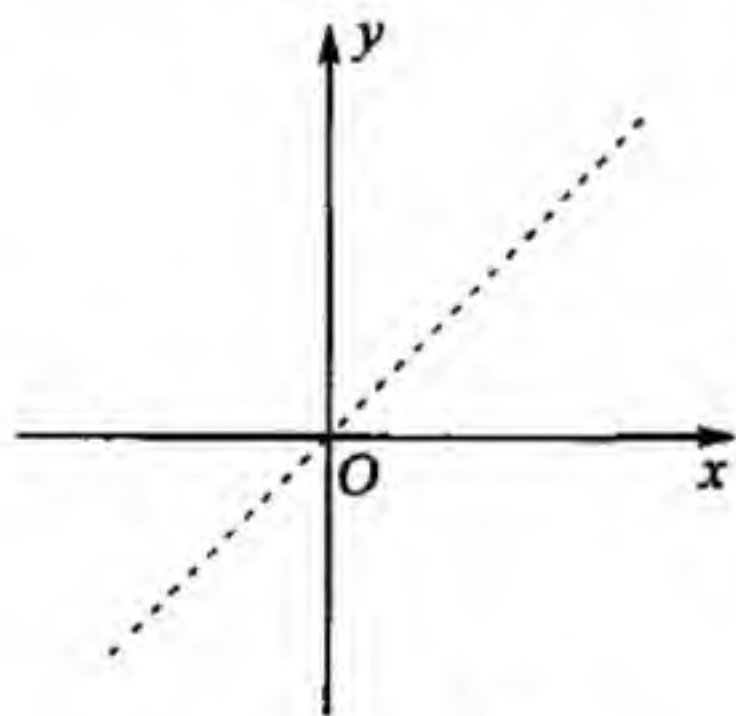
【625.3】 作出曲线

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = 1.$$

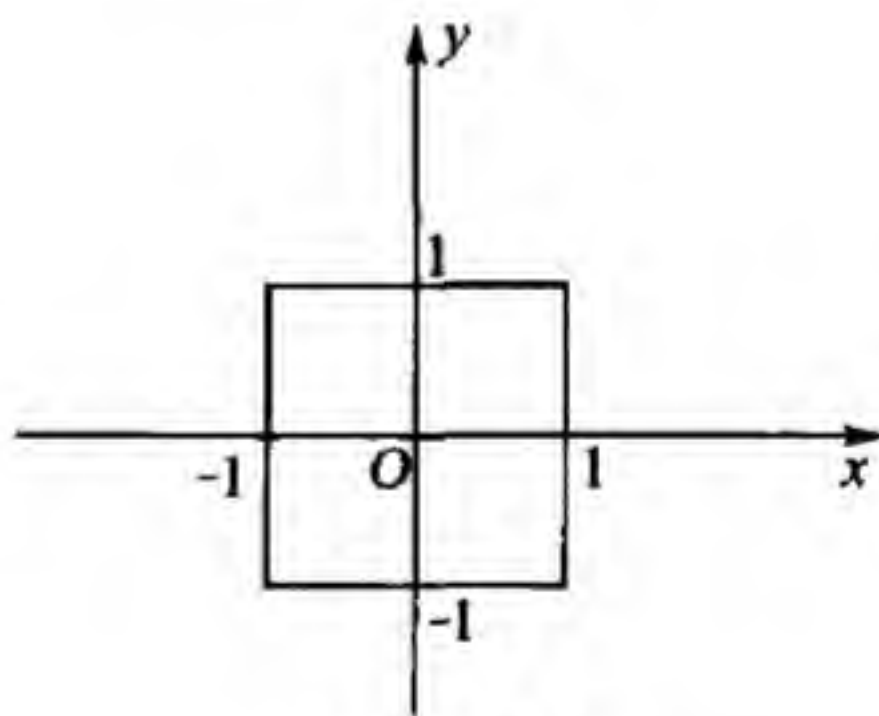
$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = \max\{|x|, |y|\}.$$

所以所求曲线为 $\max\{|x|, |y|\} = 1$.

如 625.3 题图所示.



625.2 题图



625.3 题图

【626】 若

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$$

那么直线 $y = kx + b$ 称为曲线 $y = f(x)$ 的(斜)渐近线, 利用这个方程式推导出渐近线存在的必要且充分的条件.

解 先讨论渐近线从右边伸向无穷远的情形即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0, \quad \text{①}$$

而当 $x > 0$ 时, $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - (kx + b)}{x} + k + \frac{b}{x}$.

从而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$. ②

由 ① 立得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$, ③

即常数 k, b 由 ②, ③ 即可得. 反之, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b.$$

则 ① 式成立, 即 $y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线. 同理, 若

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] = b$.

则 $y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条(从左边伸向无穷远的渐近线).

【627】 求出以下曲线的渐近线并作图:

$$(1) y = \frac{x^3}{x^2 + x - 2};$$

$$(2) y = \sqrt{x^2 + x};$$

$$(3) y = \sqrt[3]{x^2 - x^3};$$

$$(4) y = \frac{xe^x}{e^x - 1};$$

$$(5) y = \ln(1 + e^x);$$

$$(6) y = x + \arccos \frac{1}{x}.$$

解 (1) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2 + x - 2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3}{x^2 + x - 2} = \infty,$$

所以直线 $x = 1$ 及 $x = -2$ 为曲线的垂直渐近线.

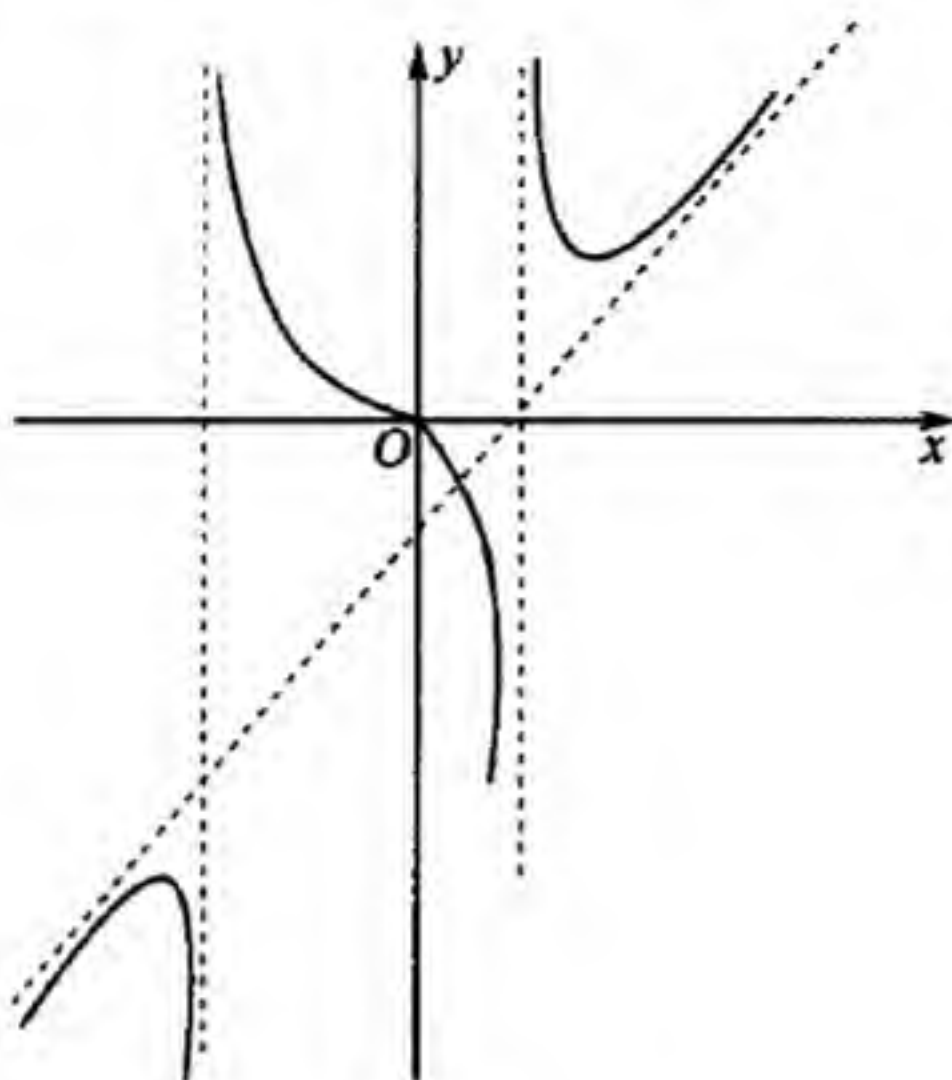
其次因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = 1 = k,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + x - 2} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 2x}{x^2 + x - 2} = -1, \end{aligned}$$

所以 $y = x - 1$ 为曲线的斜渐近线.

如 627 题图 1 所示.



627 题图 1

(2) 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = 1 = k_1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \frac{1}{2} = b_1,$$

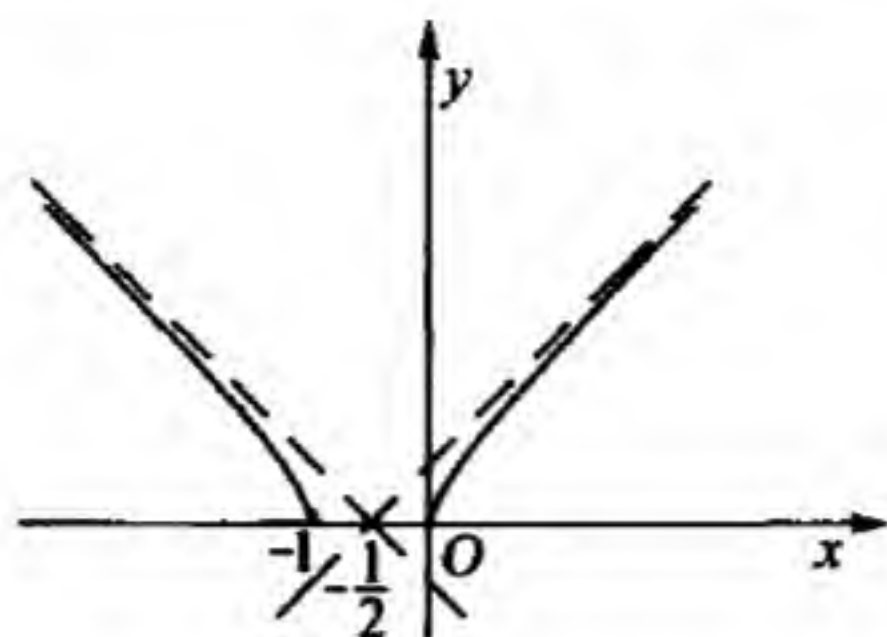
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = -1 = k_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = -\frac{1}{2} = b_2.$$

于是直线 $y = x + \frac{1}{2}$ 及 $y = -x - \frac{1}{2}$ 为曲线的斜渐近线. 曲线 $y =$

$\sqrt{x^2 + x}$ 为双曲线 $\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$ 在 Ox 轴上面的部分.

如 627 题图 2 所示.



627 题图 2

$$(3) k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = -1,$$

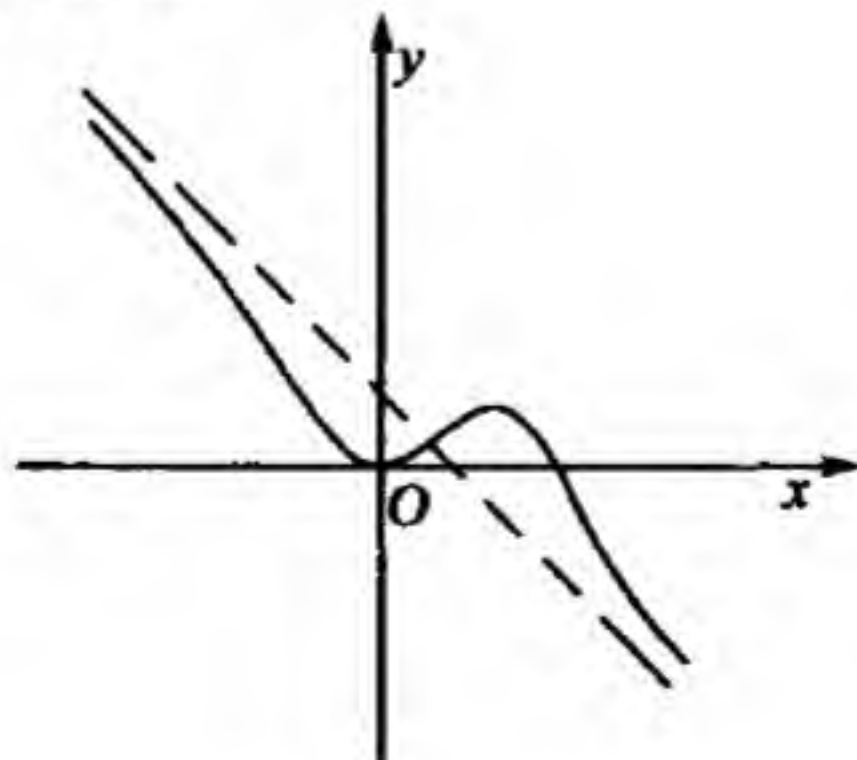
$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^2 - x^3} + x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(x^2 - x^3)^2 - x^3} \sqrt{x^2 - x^3} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1} + 1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

斜渐近线为 $y = -x + \frac{1}{3}$, 曲线过原点及 $A(1, 0)$ 点.

当 $-\infty < x < 1$ 时, $y > 0$;

当 $x > 1$ 时, $y < 0$.

如 627 题图 3 所示.



627 题图 3

$$(4) k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{xe^x}{e^x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = 0.$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0, b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = 0.$$

故 $y = x$ 为曲线的斜渐近线; $y = 0$ 为曲线的水平渐近线. 函数在 $x = 0$ 处无定义(以后可以说明这是可去间断), 如 627 题图 4 所示.

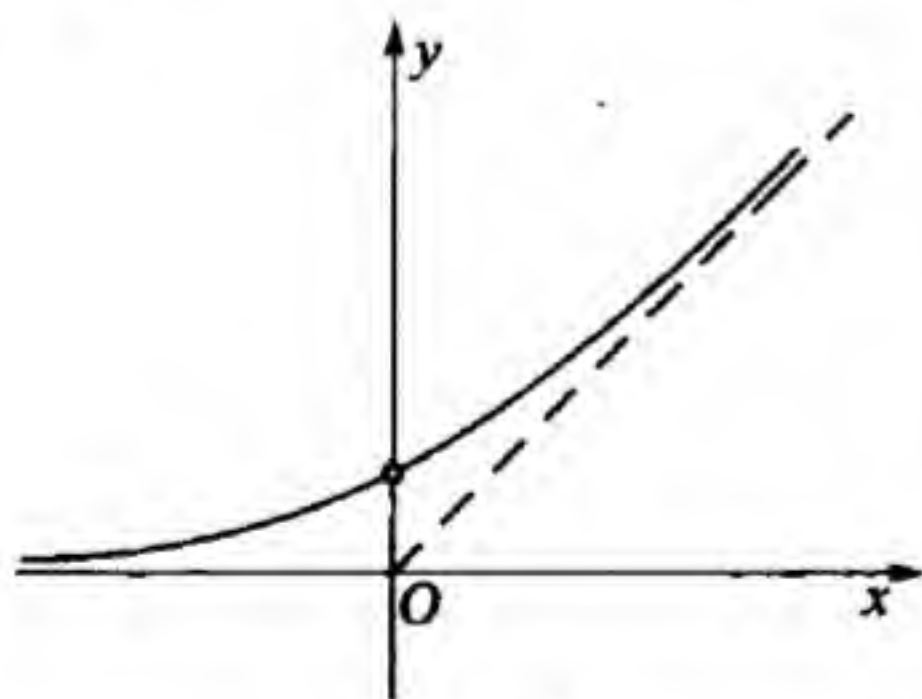
$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln(e^{-x} + 1)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{-x} + 1) = 0.$$

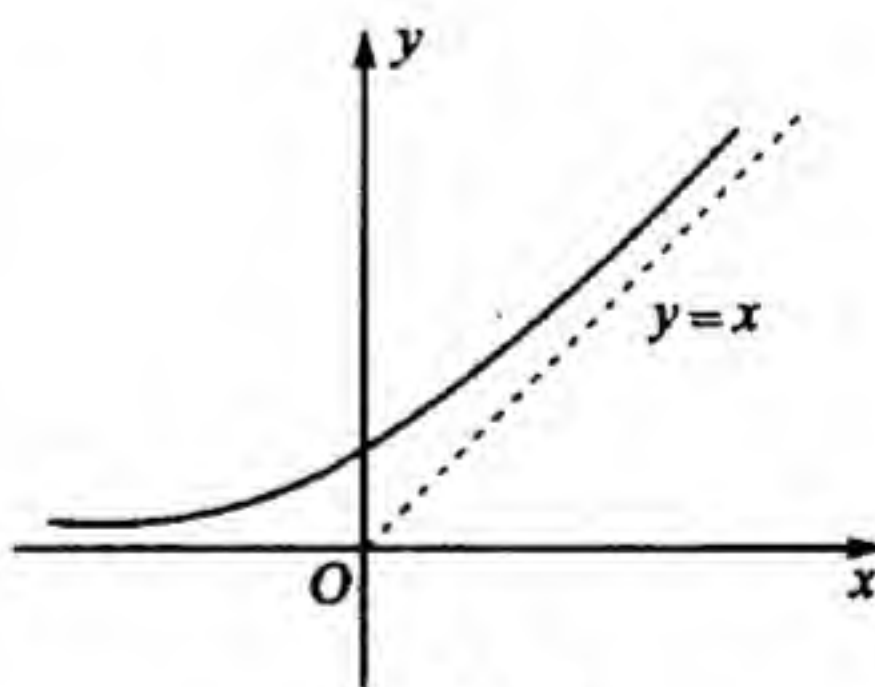
故 $y = x$ 为曲线的斜渐近线. 又

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x) = 0.$$

故 $y = 0$ 为曲线的水平渐近线. 且曲线过点 $A(0, \ln 2)$. 如 627 题图 5 所示.



627 题图 4

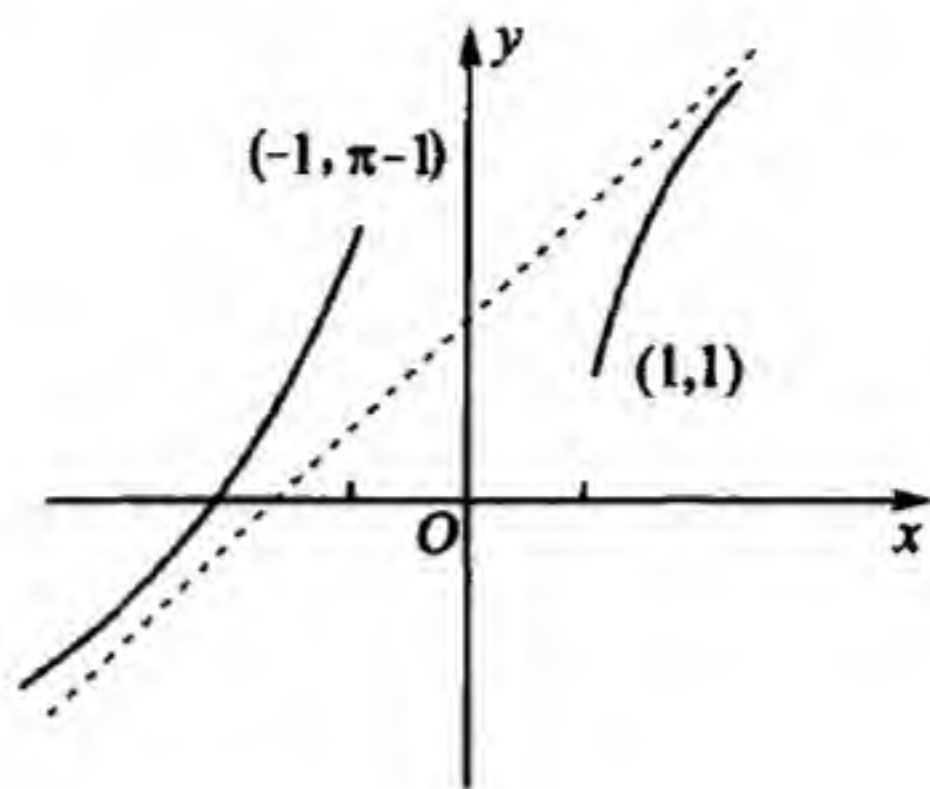


627 题图 5

$$(6) k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \arccos \frac{1}{x}}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x + \arccos \frac{1}{x} \right) - x \right] = \frac{\pi}{2},$$

故 $y = x + \frac{\pi}{2}$ 为曲线的斜渐近线, 如 627 题图 6 所示.



627 题图 6

求出下列极限(628 ~ 630).

【628】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right].$

解 法一: 因为

$$\begin{aligned} & \frac{x^{n+1}}{(2n)!} (1 + x + \cdots + x^{n-1}) \\ & < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ & < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} (1 + x + \cdots + x^{n-1}). \end{aligned}$$

若 $x = 1$, 显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} (1 + x + \cdots + x^{n-1}) = 0.$$

若 $x \neq 1$, 由 61 题的结果有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} (1 + x + \cdots + x^{n-1}) \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}(1-x^n)}{(n+1)!} \right] = 0, \end{aligned}$$

同理 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(2n)!} (1 + x + \cdots + x^{n-1}) = 0,$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right] = 0.$

法二: 由 611 题(2) 的结果有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right] \\ &= e^x - e^x = 0. \end{aligned}$$

【629】 若 $|x| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})].$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})]$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

【630】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right).$

解 因为

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \cos \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} = 2^2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{4} \\ &= \cdots = 2^n \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \cdot \sin \frac{x}{2^n}, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

【631】 令 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$

其中 $\psi(x) > 0$, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $a_{nm} \rightarrow 0 (m = 1, 2, \dots, n)$, 亦即当 $m = 1, 2, \dots$ 且 $n > N(\epsilon)$ 时 $|a_{nm}| < \epsilon$.

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(a_{1n}) + \varphi(a_{2n}) + \dots + \varphi(a_{nn})]$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [\psi(a_{1n}) + \psi(a_{2n}) + \dots + \psi(a_{nn})] \quad ①$$

假定等式 ① 右边存在极限.

注: 本题需假定 $a_{nm} \neq 0$.

证 任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x| < \delta$ 时, 恒有

$$\left| \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - 1 \right| < \epsilon.$$

又 $\psi(x) > 0$, 从而

$$(1 - \epsilon)\psi(x) < \varphi(x) < (1 + \epsilon)\psi(x).$$

由于 $a_{nm} \neq 0, a_{nm} \rightarrow 0 (m = 1, 2, \dots, n)$, 必有正整数 $N = N(\epsilon)$,

使得当 $n > N$ 时, 恒有

$$0 < |a_{nm}| < \delta \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

于是 $(1 - \epsilon)\psi(a_{nm}) < \varphi(a_{nm}) < (1 + \epsilon)\psi(a_{nm})$

$$(n > N, m = 1, 2, \dots, n),$$

将这 n 个不等式相加得

$$(1 - \epsilon) \sum_{m=1}^n \psi(a_{nm}) < \sum_{m=1}^n \varphi(a_{nm}) < (1 + \epsilon) \sum_{m=1}^n \psi(a_{nm}),$$

即
$$1 - \epsilon < \frac{\sum_{m=1}^n \varphi(a_{nm})}{\sum_{m=1}^n \psi(a_{nm})} < 1 + \epsilon,$$

因此
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n \varphi(a_{nm})}{\sum_{m=1}^n \psi(a_{nm})} = 1.$$

由假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \psi(a_{nm})$ 存在, 因此

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \varphi(a_{nm}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n \varphi(a_{nm})}{\sum_{m=1}^n \phi(a_{nm})} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \phi(a_{nm}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \phi(a_{nm}).\end{aligned}$$

注:应加上条件 $a_{nm} \neq 0$ (原题没有) 因为 $\varphi(x), \phi(x)$ 可能在 $x = 0$ 处无定义.

利用上述定理, 求出 (632 ~ 636).

【632】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right).$

解 设 $\varphi(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1$, $\phi(x) = \frac{x}{3}$,

则
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\phi(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\frac{x}{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{x}{3} (\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1)} = 1.\end{aligned}$$

其次 $a_{kn} = \frac{k}{n^2} \Rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty, k = 1, 2, \dots, n).$

又
$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \phi(a_{kn}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{3n^2} \\ &= \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{6},\end{aligned}$$

所以由 631 题的结果知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) = \frac{1}{6}.$$

【633】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{ka}{n^2} \right).$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,

而当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_{kn} = \frac{ka}{n^2} \Rightarrow 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$

又
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{ka}{n^2} = \frac{a}{2},$$

因此
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{ka}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

【634】
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_n^{\frac{k}{n^2}} - 1) \quad (a > 0).$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \cdot \ln a} = 1,$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{k}{n^2} \ln a \Rightarrow 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln a = \frac{1}{2} \ln a,$$

因此
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_n^{\frac{k}{n^2}} - 1) = \frac{1}{2} \ln a.$$

【635】
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

解 设 $y_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right),$

则
$$\ln y_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

先求
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right),$$

因为
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

又当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{k}{n^2} \Rightarrow 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$

且
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2},$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = e^{\frac{1}{2}}.$

【636】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}$

解 设 $y_n = \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}$

当 n 充分大时 $\cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} > 0,$

此时 $\ln y_n = \sum_{k=1}^n \ln \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}.$

$$\begin{aligned} \text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{-\frac{1}{2}x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{-\frac{1}{2}x^2} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{又 } \frac{ka}{n\sqrt{n}} \Rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty, k = 1, 2, \dots, n).$$

$$\begin{aligned} \text{且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2} \frac{k^2 a^2}{n^3}\right) &= -\frac{a^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\ &= -\frac{a^2}{6}, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y_n = -\frac{a^2}{6},$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} = e^{-\frac{a^2}{6}}.$

【637】 序列 x_n 由以下等式给定:

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}},$$

$$x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots \quad (a > 0).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 显然 $x_n > x_{n-1} > 0$. 即序列是单调增加的; 其次, 由 $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$ 有 $x_n^2 = a + x_{n-1}$, 即

$$x_n = \frac{a}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

因为 $x_n > x_{n-1} > 0$, 所以 $x_n < \frac{a}{x_n} + 1$. 又显然 $x_n > \sqrt{a}$, 故 $x_n < \frac{a}{x_n} + 1 < \sqrt{a} + 1$, 即序列 $\{x_n\}$ 是有界的. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 则由 $x_n^2 = a + x_{n-1}$ 有

$$A^2 = a + A.$$

解之得 $A = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$.

因为 $x_n > 0$, 故 $A \geq 0$. 因此 $A = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$.

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$.

【637. 1】 由以下形式给出序列 x_n :

$$x_1 = 0, x_2 = 1,$$

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}) \quad (n = 2, 3, \dots).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 由 $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$ 有

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2(x_{n-2} - x_{n-3}) \\ &= \dots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2 - x_1) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
 x_n &= x_{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\
 &= x_{n-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\
 &= x_{n-2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}.
 \end{aligned}$$

我们讨论 $\{x_n\}$ 的两个子序列 $\{x_{2k}\}$ 及 $\{x_{2k+1}\}$,

$$\begin{aligned}
 x_{2k} &= x_{2(k-1)} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-3} \\
 &= x_{2(k-2)} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-5} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-3} \\
 &= \cdots = x_2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-3} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^k}{1 - \frac{1}{4}},
 \end{aligned}$$

故 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$

又

$$\begin{aligned}
 x_{2k+1} &= x_{2k-1} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-2} \\
 &= x_{2k-3} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-4} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-2} \\
 &= \cdots = x_3 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-2} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^k}{1 - \frac{1}{4}}.
 \end{aligned}$$

故 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{3}$.

【637.2】 序列 y_n 序列 x_n 由下列关系式给出:

$$y_0 = x_0, y_n = x_n - ax_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

其中 $|a| < 1$,

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 由 $y_n = x_n - ax_{n-1}$, 得

$$x_n = y_n + ax_{n-1} = y_n + ay_{n-1} + a^2 x_{n-2},$$

应用归纳法可得

$$x_n = y_n + ay_{n-1} + a^2 y_{n-2} + \dots + a^n y_0.$$

下面我们证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 事实上, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在. 故序列 $\{y_n\}$ 有界, 即存在 $M > 0$, 使得 $|y_n| \leq M (n = 1, 2, \dots)$, 又 $|a| < 1$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$, 所以, 对任给 $\epsilon > 0$. 存在 $N_1 > 0$, 使得当 $n > N$ 时, $|a^n| < \frac{1 - |a|}{4M} \epsilon$.

$$|a^n| < \frac{1 - |a|}{4M} \epsilon.$$

另一方面 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 由柯西收敛准则, 存在 $N_2 > 0$, 使得当 $n > N_2$ 时, 对任何正整数 p 都有

$$|y_{n+p} - y_n| < \frac{1 - |a|}{2} \epsilon.$$

取

$$N_3 = \max\{N_1, N_2\}, N = 2N_3,$$

则 $n > N$ 时, $n - N_3 > N_3 \geq N_2$, 因此, 对任何正整数 p 都有

$$\begin{aligned} & |x_{n+p} - x_n| \\ &= |y_{n+p} + ay_{n+p-1} + \dots + a^{n+p} y_0 - (y_n + ay_{n-1} + \dots + a^n y_0)| \\ &= |(y_{n+p} - y_n) + a(y_{n+p-1} - y_{n-1}) + \dots + a^{N_3} (y_{n+p-N_3} - y_{n-N_3}) \\ &\quad + a^{N_3+1} (y_{n+p-N_3-1} - y_{n-N_3-1}) + \dots + a^{n+p} y_0| \\ &< \frac{1 - |a|}{2} \epsilon (1 + |a| + \dots + |a|^{N_3}) \\ &\quad + 2M |a|^{N_3+1} (1 + |a| + \dots + |a|^{n+p-N_3-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &< \frac{1-|a|}{2} \epsilon \cdot \frac{1}{1-|a|} + 2M \cdot \frac{1-|a|}{4M} \cdot \epsilon \cdot \frac{1}{1-|a|} \\
 &= \epsilon.
 \end{aligned}$$

由柯西准则知, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 对 $y_n = x_n - ax_{n-1}$ 两取极限得 $b = l - al$,

所以
$$l = \frac{b}{1-a},$$

即
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b}{1-a}.$$

【637. 3】 序列 x_n 由以下形式确定:

$$x_0 = 1, x_n = \frac{1}{1+x_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

提示: 研究 x_n 与方程式 $x = \frac{1}{1+x}$ 的根之间的差.

解 设 A 是方程 $x = \frac{1}{1+x}$ 的正根, 即 $A = \frac{1}{1+A}$, 且 $A >$

0, 解之得 $A = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

由于 $x_n = \frac{1}{1+x_{n-1}},$

所以 $x_n - A = \frac{1}{1+x_{n-1}} - \frac{1}{1+A} = \frac{A - x_{n-1}}{(1+x_{n-1})(1+A)},$

故 $|x_n - A| \leq \frac{1}{2} |x_{n-1} - A|.$

用归纳法可得 $|x_n - A| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (A - 1).$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - A) = 0,$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

【638】 函数序列

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

由以下等式确定:

$$y_1 = \frac{x}{2}, y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

解 当 $x = 0$ 时, $y_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$,

当 $0 < x \leq 1$ 时, 用归纳法可证 $y_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$. 显然 $y_1 > 0$,

若 $y_k > 0$, 则 $1 \geq x > y_{k-1}^2$, 所以

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= \frac{x}{2} - \frac{y_k^2}{2} = \frac{4x - (x - y_{k-1}^2)^2}{8} \\ &> \frac{4x - x^2}{8} \geq \frac{3x}{8} > 0, \end{aligned}$$

因而 $y_1 - y_3 = \frac{y_2^2}{2} > 0$,

$$y_2 - y_4 = \frac{y_3^2 - y_1^2}{2} < 0.$$

用归纳法可证

$$y_{2n} - y_{2n+2} < 0,$$

$$y_{2n-1} - y_{2n+1} > 0 \quad n = 1, 2, \dots,$$

即 $\frac{x}{2} = y_1 > y_3 > \dots > 0$

$$0 < y_2 < y_4 < \dots < \frac{x}{2}$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n}$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+1}$ 均存在. 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} = A_1, \lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+1} = A_2.$$

由 $y_{2n} = \frac{x}{2} - \frac{y_{2n-1}^2}{2}$,

及 $y_{2n+1} = \frac{x}{2} - \frac{y_{2n}^2}{2}$,

得 $A_1 = \frac{x}{2} - \frac{A_2^2}{2}, A_2 = \frac{x}{2} - \frac{A_1^2}{2}.$

两式相减得 $A_1 - A_2 = (A_1 - A_2) \frac{A_1 + A_2}{2}$.

由于 $0 \leq A_1 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}, 0 \leq A_2 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}$,

可得 $A_1 = A_2 = A$,

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+1} = A$.

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$,

且 $A = \frac{x}{2} - \frac{A^2}{2}$.

解之得 $A = \sqrt{1+x} - 1$,

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{1+x} - 1$.

【639】 函数序列

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

由下式确定:

$$y_1 = \frac{x}{2}, y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

解 显然 $y_2 \geq y_1$, 假设 $y_n \geq y_{n-1}$, 则由

$$y_{n+1} - y_n = \frac{y_n^2 - y_{n-1}^2}{2}$$

可得 $y_{n+1} \geq y_n$

由数学归纳法知 $\{y_n\}$ 是单调增加序列. 下面我们证明 $\{y_n\}$ 有界.

显然 $0 \leq y_1 \leq 1$. 假设 $0 \leq y_k \leq 1$, 则 $0 \leq y_k^2 \leq 1$, 所以

$$0 \leq y_{k+1} = \frac{x}{2} + \frac{y_k^2}{2} \leq 1,$$

由数学归纳法知 $\{y_n\}$ 有界, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$. 得

$$l = \frac{x}{2} + \frac{l^2}{2}.$$

解之得 $l = 1 \pm \sqrt{1-x}$.

由于 $0 \leq l \leq 1$,

故必有 $l = 1 - \sqrt{1-x}$,

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1 - \sqrt{1-x}$.

【639. 1】 设 $x > 0$ 且

$$y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1}) \quad (n = 1, \dots).$$

证明: 若 $y_i > 0 (i = 0, 1, \dots)$, 则序列 y_n 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{x}$.

提示: 研究 $\frac{1}{x} - y_n$ 之差.

证 由 $y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})$,

有 $\frac{1}{x} - y_n = x \left(\frac{1}{x} - y_{n-1} \right)^2 > 0$,

从而, $\frac{1}{x} > y_n$, 而由假设知, $y_n > 0$. 即 $\{y_n\}$ 是有界序列, 下面证明

$\{y_n\}$ 是单调序列. 事实上, 由 $\frac{1}{x} > y_n > 0$, 有 $1 > xy_n > 0$, 因此

$\frac{y_{n+1}}{y_n} = 2 - xy_n > 1$, 即 $y_{n+1} > y_n$, 所以 $\{y_n\}$ 是单调序列. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

存在. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$. 则对 $y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})$,

两边取极限有 $A = A(2 - xA)$,

解之得 $A = 0$ 及 $A = \frac{1}{x}$.

由于 $A \geq y_0 > 0$, 舍去 $A = 0$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{x}$.

【639. 2】 为了求出 $y = \sqrt{x}$ 的近似解, 常采用以下步骤: $y_n = \frac{1}{2} \left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}} \right) (n = 1, 2, \dots)$, 其中 $y_0 > 0$ 为任意实数, $x > 0$.

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{x}$.

提示: 利用公式

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{y_{n-1} + \sqrt{x}} \right)^2 \quad (n \geq 1).$$

证 由 $y_n = \frac{1}{2} \left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}} \right)$,

有
$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left[\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{y_{n-1} + \sqrt{x}} \right]^2.$$

由归纳法, 我们有

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left[\frac{y_0 - \sqrt{x}}{y_0 + \sqrt{x}} \right]^{2^n}. \quad ①$$

设
$$q = \frac{y_0 - \sqrt{x}}{y_0 + \sqrt{x}}.$$

由于 $y_0 > 0$ 因此 $|q| < 1$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = 0$.

下面我们证明 $\{y_n\}$ 为有界序列. 事实上, 显然有 $y_n > 0$. 若 $\{y_n\}$ 为无界序列. 则 $\sup\{y_n\} = +\infty$, 因而存在 $\{y_n\}$ 的一子序列 $\{y_{n_k}\}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = +\infty$,

因此
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_{n_k} - \sqrt{x}}{y_{n_k} + \sqrt{x}} = 1.$$

这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = 0$ 相矛盾. 因此存在 $M > 0$, 使得 $0 < y_n < M$.

由 ① 式得

$$|y_n - \sqrt{x}| = |q|^{2^n} (y_n + \sqrt{x}) \leq (M + \sqrt{x}) |q|^{2^n},$$

因此
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - \sqrt{x}) = 0,$$

即
$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{x}.$$

【640】 为了求出开普勒方程式

$$x - \epsilon \sin x = m \quad (0 < \epsilon < 1) \quad ①$$

的近似解, 假设

$$\begin{aligned} x_0 &= m, x_1 = m + \epsilon \sin x_0, \dots, x_n \\ &= m + \epsilon \sin x_{n-1}, \dots \end{aligned}$$

(逐步逼近法).

证明: $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且数 ξ 是方程式 ① 的唯一的根.

$$\text{证 } x_2 - x_1 = \epsilon(\sin x_1 - \sin x_0)$$

$$= 2\epsilon \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \cos \frac{x_1 + x_0}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |x_2 - x_1| &\leq 2\epsilon \left| \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \right| \leq 2\epsilon \cdot \frac{|x_1 - x_0|}{2} \\ &= \epsilon |x_1 - x_0| = \epsilon \cdot \epsilon |\sin x_0| \leq \epsilon^2. \end{aligned}$$

$$\text{同理 } |x_3 - x_2| \leq \epsilon |x_2 - x_1| \leq \epsilon^3.$$

设 $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon^n$, 则有

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= 2\epsilon \left| \sin \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \right| \\ &\leq 2\epsilon \left| \sin \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right| \leq \epsilon |x_n - x_{n-1}| \\ &\leq \epsilon^{n+1}. \end{aligned}$$

因此由归纳法知对任一自然数 n 均有 $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon^n$.

于是对任何自然数 p , 有

$$\begin{aligned} &|x_{n+p} - x_n| \\ &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| \\ &\quad + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq \epsilon^{n+p} + \epsilon^{n+p-1} + \cdots + \epsilon^{n+1} \\ &= \epsilon^{n+1} \frac{1 - \epsilon^p}{1 - \epsilon} < \frac{\epsilon^{n+1}}{1 - \epsilon}. \end{aligned}$$

因此 $|x_{n+p} - x_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

由 Cauchy 判断法知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$$

则由 $x_n = m + \epsilon \sin x_{n-1}$,

有 $\xi = m + \epsilon \sin \xi$.

即 ξ 是方程 ① 的根. 最后证明根的唯一性. 设 ξ_1 是方程的另一根, 则有

$$\xi_1 - \xi = \epsilon(\sin \xi_1 - \sin \xi) = 2\epsilon \sin \frac{\xi_1 - \xi}{2} \cos \frac{\xi_1 + \xi}{2},$$

因此 $|\xi_1 - \xi| \leq \epsilon |\xi_1 - \xi|$.

由于 $0 < \epsilon < 1$, 故 $\xi_1 = \xi$, 证毕.

【641】 如果 $\omega_k(f)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $|x - \xi| \leq k (k > 0)$ 的振幅, 则数 $\omega_0(f) = \lim_{k \rightarrow 0} \omega_k(f)$ 被称作函数 $f(x)$ 在 ξ 点的振幅.

确定以下函数在点 $x = 0$ 的振幅:

$$(1) f(x) = \sin \frac{1}{x}; \quad (2) f(x) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \frac{1}{x};$$

$$(3) f(x) = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right); \quad (4) f(x) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{1}{x};$$

$$(5) f(x) = \frac{|\sin x|}{x}; \quad (6) f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}};$$

$$(7) f(x) = (1 + |x|)^{\frac{1}{x}}.$$

解 (1) $\omega_k(f) = 2, \omega_0(f) = 2$.

(2) $\omega_k(f) = +\infty, \omega_0(f) = +\infty$

(3) $k \leq \omega_k(f) \leq 3k, \omega_0(f) = 0$

$$(4) \omega_k(f) = \frac{1}{\pi} \left[\arctan \frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{(-k)} \right] = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{k},$$

$$\omega_0(f) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$(5) \text{ 因为 } \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1,$$

$$\text{且 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = -1,$$

所以 $\omega_k(f) = 2, \omega_0(f) = 2$.

$$(6) \omega_k(f) = \left| \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{k}}} - \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{k}}} \right|,$$

$$\omega_0(f) = 1.$$

$$(7) \omega_k(f) = (1 + k)^{\frac{1}{k}} - (1 + k)^{-\frac{1}{k}},$$

$$\omega_0(f) = e - e^{-1} = 2\text{sh}1.$$

【642】 设 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

证明:对于满足条件 $-1 \leq a \leq 1$ 的任何数 a , 可以选出序列 $x_n \rightarrow 0 (n = 1, 2, \dots)$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

证 对于确定的 $a: -1 \leq a \leq 1$, 存在

$$x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

使 $\sin x_0 = a$.

令 $x_n = \frac{1}{2n\pi + x_0},$

则显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$

且 $f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n} = \sin(2n\pi + x_0) = \sin x_0 = a,$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$

【643】 若

$$(1) f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x};$$

$$(2) f(x) = (2 - x^2) \cos \frac{1}{x};$$

$$(3) f(x) = \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x}\right)^{\sec^2(\frac{1}{x})}$$

求出 $l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x), L = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x).$

解 (1) 显然 $-1 < f(x) \leq 2$, 取

$$x_n = \frac{-1}{n\pi} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \arctan(-n\pi) = -1.$

取 $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \quad (n = 1, 2, \dots),$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 2.$

所以 $l = -1, L = 2.$

(2) $l = -2, L = 2.$

(3) $l = 2, L = e$.

【644】 若

$$(1) f(x) = \sin x; \quad (2) f(x) = x^2 \cos^2 x;$$

$$(3) f(x) = 2^{\sin x^2}; \quad (4) f(x) = \frac{x}{1+x^2 \sin^2 x} (x \geq 0).$$

求出 $l = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 和 $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

解 由 l 及 L 的定义, 容易求得

$$(1) l = -1, L = 1.$$

$$(2) l = 0, L = +\infty.$$

$$(3) l = \frac{1}{2}, L = 2.$$

$$(4) l = 0, L = +\infty.$$

§ 6. 无穷大和无穷小的阶

1. 当 $x \in X$ 时, 符号:

$$\varphi(x) = O(\psi(x)).$$

这表示对于 $x \in X$ 存在常数 A , 使得

$$|\varphi(x)| \leq A |\psi(x)|. \quad (1)$$

当 $x \rightarrow a$ 时, 类似地可定义

$$\varphi(x) = o(\psi(x)). \quad (2)$$

设不等式 (1) 在点 $a (x \neq a)$ 的某域 U_a 内成立; 若存在有限的

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \neq 0$. 在这种情况下, 将写成

$$\varphi(x) = o(\psi(x)).$$

$$\text{若 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0)$$

则 $\varphi(x)$ 称为对于无穷小 x 是 p 阶无穷小. 同样, 若

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0).$$

则 $\psi(x)$ 称为对于无穷大 x 是 p 阶无穷大.

2. 当 $x \rightarrow a$ 时, 符号:

$$\varphi(x) = o(\psi(x))$$

这表示 $\varphi(x) = \alpha(x)\psi(x) (x \in U_a, x \neq a)$ ③

其中当 $x \rightarrow a$ 时, $\alpha(x) \rightarrow 0$, 若当 $x \in U_a, x \neq a, \psi(x) \neq 0$ 时, 则等式 ③ 与下式等价

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

3. 当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 称为等价函数 ($\varphi(x) \sim \psi(x)$)

若 $x \rightarrow a$ 时,

$$\varphi(x) - \psi(x) = o(\psi(x)) \quad ④$$

若当 $x \in U_a, x \neq a, \psi(x) \neq 0$ 时, 则由式 ④ 得出

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1,$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有以下等价关系:

$$\sin x \sim x; \tan x \sim x;$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0);$$

$$\ln(1+x) \sim x; \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n},$$

通常认为: $\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x)$.

在求解当 $x \rightarrow a$ 两个无穷小(或无穷大)函数比的极限时, 已知函数可以用其等价的函数替换.

【645】 将中心角 $AOB = x$ (645 题图) 当作 1 阶无穷小, 求以下各无穷小的阶:

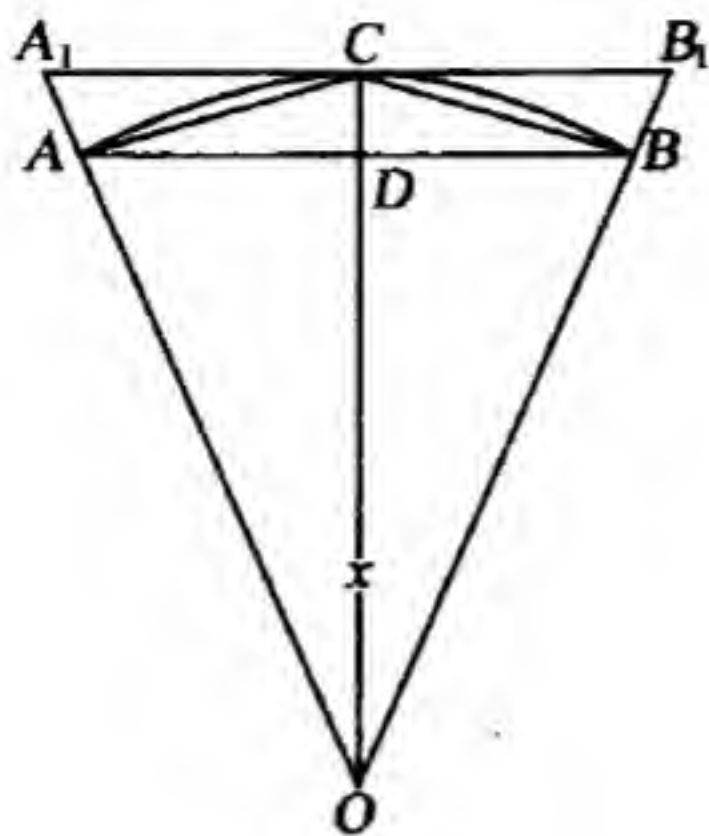
(1) 弦 AB ; (2) 矢 CD ;

(3) 扇形 AOB 的面积; (4) 三角形 ABC 的面积;

(5) 梯形 ABB_1A_1 的面积; (6) 弓形 ABC 的面积.

解 (1) $AB = 2R \sin \frac{x}{2}$, 其中 R 为圆的半径. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{AB}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2R \sin \frac{x}{2}}{x} = R,$$



645 题图

故弦 AB 是关于 x 的一阶无穷小.

$$(2) \quad CD = OC - OD = R - R \cdot \cos \frac{x}{2} = 2R \sin^2 \frac{x}{4},$$

所以
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{CD}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2R \cdot \sin^2 \frac{x}{4}}{x^2} = \frac{R}{8}.$$

故矢 CD 是关于 x 的二阶无穷小.

(3) 扇形 AOB 的面积 $S = \frac{1}{2}R^2x$ 是关于 x 的一阶无穷小.

(4) 三角形 ABC 的面积

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD| \\ &= \frac{1}{2} 2R \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot 2R \cdot \sin^2 \frac{x}{4} \\ &= 2R^2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin^2 \frac{x}{4}, \end{aligned}$$

是关于 x 的三阶无穷小.

(5) $A_1C = R \tan \frac{x}{2}$, 于是梯形 ABB_1A_1 的面积

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} |CD| (|AB| + |A_1B_1|) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2R \sin^2 \frac{x}{4} (2R \sin \frac{x}{2} + 2R \tan \frac{x}{2}) \end{aligned}$$

$$= 2R^2 \sin^2 \frac{x}{4} \cdot \sin \frac{x}{2} + 2R^2 \sin^2 \frac{x}{4} \cdot \tan \frac{x}{2}.$$

从而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S_1}{x^3} = \frac{R^2}{16} + \frac{R^2}{16} = \frac{R^2}{8}.$

所以 S_1 是关于 x 的三阶无穷小.

(6) 弓形 ABC 的面积

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} R^2 x - \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot R \cdot \cos \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{2} R^2 (x - \sin x). \end{aligned}$$

而 $S_{\triangle ABC} < S_2 < S_1$ 其中 S_1 是梯形 ABB_1A_1 的面积, 且 $S_{\triangle ABC}$ 及 S_1 均为 x 的三阶无穷小, 所以 S_2 是 x 的三阶无穷小. 事实上, 以后可以证明

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

【646】 设 $o(f(x))$ 为当 $x \rightarrow a$ 时比函数 $f(x)$ 有较低阶的任意无穷大函数, 而 $O(f(x))$ 为当 $x \rightarrow a$ 时与函数 $f(x)$ 同阶的任意无穷大函数, 其中 $f(x) > 0$.

证明:

- (1) $o\{o(f(x))\} = o\{f(x)\};$
- (2) $O\{o(f(x))\} = o\{f(x)\};$
- (3) $o\{O[f(x)]\} = o(f(x));$
- (4) $O\{O[f(x)]\} = O[f(x)];$
- (5) $O[f(x)] + o[f(x)] = O[f(x)].$

证 (1) 因为

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{o(f(x))\}}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{o(f(x))\}}{o(f(x))} \cdot \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0.$$

故 $o\{o(f(x))\} = o\{f(x)\}.$

(2) 由 133 题(2) 的结果, 有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|O\{o(f(x))\}|}{f(x)} = 0.$$

$$= \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O\{o(f(x))\}|}{o(f(x))} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{f(x)\}}{f(x)} = 0.$$

故 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{O\{o(f(x))\}}{f(x)} = 0,$

因此 $O\{o(f(x))\} = o\{f(x)\}.$

$$(3) \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|o\{O[f(x)]\}|}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{o\{O[f(x)]\}}{O[f(x)]} \right|,$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} = 0,$$

故 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{O[f(x)]\}}{f(x)} = 0,$

即 $o\{O[f(x)]\} = o(f(x)).$

(4) 由 132 题(2) 的结果, 有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O\{O[f(x)]\}|}{f(x)}$$

$$\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O\{O[f(x)]\}|}{|O(f(x))|} \cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)}$$

$$< +\infty,$$

故 $O\{O[f(x)]\} = O[f(x)].$

(5) 由 131 题(2), 有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)] + o[f(x)]|}{f(x)}$$

$$\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} + \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|o[f(x)]|}{f(x)}$$

$$= \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} < +\infty,$$

故 $O[f(x)] + o[f(x)] = O[f(x)].$

【647】 令 $x \rightarrow +0$ 且 $n > 0$

证明:

(1) $C \cdot O(x^n) = O(x^n)$ (C 为常数);

(2) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ ($n < m$);

(3) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m}).$

证 (1) 因为

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} = |C| \cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty,$$

故 $C \cdot O(x^n) = O(x^n)$.

(2) 因为

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n) + O(x^m)|}{x^n} &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} + \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \left(\frac{|O(x^m)|}{x^m} \cdot x^{m-n} \right) \\ &= \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty, \end{aligned}$$

故 $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n) \quad (n < m)$.

(3) 因为

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{O(x^n)O(x^m)}{x^{n+m}} &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} \cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^m)|}{x^m} < +\infty, \end{aligned}$$

故 $O(x^n) \cdot O(x^m) = O(x^{n+m})$.

【648】 令 $x \rightarrow +\infty$ 且 $n > 0$, 证明:

(1) $C \cdot O(x^n) = O(x^n)$;

(2) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n) \quad (n > m)$;

(3) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

证 (1) 因为

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n)|}{x^n} = |C| \cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty,$$

故 $C \cdot O(x^n) = O(x^n)$.

$$(2) \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n) + O(x^m)|}{x^n}$$

$$\begin{aligned} &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n)|}{x^n} + \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^m)|}{x^m} \cdot \frac{1}{x^{n-m}} \\ &= \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty, \end{aligned}$$

故 $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$.

(3) 同 647 题(3)

【649】 证明符号 \sim 具有以下性质:

(1) 自反性: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$;

(2) 对称性: 若 $\varphi(x) \sim \psi(x)$, 则 $\psi(x) \sim \varphi(x)$;

(3) 传递性: 若 $\varphi(x) \sim \psi(x)$ 和 $\psi(x) \sim \chi(x)$, 则 $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

证 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$ 故 $\varphi(x) \sim \varphi(x)$.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$,

则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 1$,

所以 $\psi(x) \sim \varphi(x)$.

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$; $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\psi(x)}{\chi(x)} = 1$,

故 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\chi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{\psi(x)}{\chi(x)} = 1$,

即 $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

【650】 令 $x \rightarrow +0$, 证明以下等式:

(1) $2x - x^2 = O^*(x)$; (2) $x \sin \sqrt{x} = O^*(x^{\frac{3}{2}})$;

(3) $x \sin \frac{1}{x} = O(|x|)$; (4) $\ln x = o\left(\frac{1}{x^\epsilon}\right) (\epsilon > 0)$;

(5) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}$; (6) $\arctan \frac{1}{x} = O(1)$;

(7) $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)$.

证 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{2x - x^2}{x} = 2$,

所以 $2x - x^2 = O^*(x)$.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \sin \sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} = 1$,

所以 $x \sin \sqrt{x} = O^*(x^{\frac{3}{2}})$.

$$(3) \text{ 因为 } \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \quad (x \neq 0),$$

所以 $x \sin \frac{1}{x} = O(|x|)$.

$$(4) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^{\epsilon}}} = \lim_{x \rightarrow +0} x^{\epsilon} \ln x = 0,$$

所以 $\ln x = o\left(\frac{1}{x^{\epsilon}}\right)$.

$$(5) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x^{\frac{3}{4}} + \sqrt{x^{\frac{1}{2}} + 1}} = 1,$$

故 $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}$.

$$(6) \text{ 因为 } \left| \arctan \frac{1}{x} \right| \leq \frac{\pi}{2} \quad (x \neq 0),$$

故 $\arctan \frac{1}{x} = O(1)$.

(7) 因为

$$\frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x} = \frac{1}{2}n(n-1)x + \cdots + x^{n-1} \rightarrow 0$$

($x \rightarrow 0$),

所以 $(1+x)^n - 1 - nx = o(x)$.

即 $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)$.

【651】 设 $x \rightarrow +\infty$, 证明以下等式:

$$(1) 2x^3 - 3x^2 + 1 = O^*(x^3); \quad (2) \frac{x+1}{x^2+1} = O^*\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$(3) x + x^2 \sin x = O(x^2); \quad (4) \frac{\arctan x}{1+x^2} = O^*\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$(5) \ln x = o(x^{\epsilon}) (\epsilon > 0); \quad (6) x^p e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^3}\right);$$

$$(7) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}; \quad (8) x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2.$$

证 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3} = 2$,

所以 $2x^3 - 3x^2 + 1 = O^*(x^3)$.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+1}{x^2+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+1)}{x^2+1} = 1$,

所以 $\frac{x+1}{x^2+1} = O^*\left(\frac{1}{x}\right)$.

(3) 因为

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x + x^2 \sin x}{x^2} \right| = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} + \sin x \right| = 1,$$

所以 $x + x^2 \sin x = O(x^2)$.

(4) 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\arctan x}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \arctan x = \frac{\pi}{2},$$

所以 $\frac{\arctan x}{1+x^2} = O^*\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

(5) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^e} = 0$,

所以 $\ln x = o(x^e)$.

(6) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p e^{-x}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p+3}}{e^x} = 0$,

所以 $x^p e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

(7) 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}} = 1,$$

所以 $\sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$.

(8) 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \ln^{100} x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln^{100} x}{x} \right) = 1,$$

故 $x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2$.

【652】 证明: 当 x 充分大 ($x > 0$) 时, 下列不等式成立:

(1) $x^2 + 10x + 100 < 0.001x^3$;

(2) $\ln^{1000} x < \sqrt{x}$; (3) $x^{10} e^x < e^{2x}$.

证 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 10x + 100}{0.001x^3} = 0$,

所以当 x 充分大时 $\frac{x^2 + 10x + 100}{0.001x^3} < 1$.

即 $x^2 + 10x + 100 < 0.001x^3$.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{1000} x}{\sqrt{x}} = 0$ (参阅 565 题),

所以当 x 充分大以后有 $\frac{\ln^{1000} x}{\sqrt{x}} < 1$.

即 $\ln^{1000} x < \sqrt{x}$.

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10} e^x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10}}{e^x} = 0$,

所以当 x 充分大以后, 有 $\frac{x^{10} e^x}{e^{2x}} < 1$, 即 $x^{10} e^x < e^{2x}$.

【652. 1】 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 证明渐近公式

$$\sqrt{x^2 + px + q} = x + \frac{p}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

证 因为

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + px + q} - \left(x + \frac{p}{2}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)x}{\sqrt{x^2 + px + q} + x + \frac{p}{2}} = \frac{q - \frac{p^2}{4}}{2}, \end{aligned}$$

即 $\sqrt{x^2 + px + q} - \left(x + \frac{p}{2}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right).$

所以 $\sqrt{x^2 + px + q} = x + \frac{p}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right).$

【653】 设 $x \rightarrow 0$, 选出以下函数的形同 Cx^n (C —常数) 的主部, 并求对于无穷小变数 x 的阶:

$$(1) 2x - 3x^3 + x^5; \quad (2) \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x};$$

$$(3) \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}; \quad (4) \tan x - \sin x.$$

解 所谓函数 $f(x)$ 的主部 $g(x)$, 即满足

$$f(x) = g(x) + o(x) \quad (x \rightarrow 0),$$

或 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$

(1) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3x^3 + x^5}{2x} = 1,$$

故其主部为 $2x$, 它对无穷小 x 是一阶的.

(2) 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}, \\ &= 1 \end{aligned}$$

故其主部为 x , 它对于 x 是一阶的.

(3) 因为

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{\frac{x^2}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 8x^3}{\frac{x^2}{2} (\sqrt[6]{(1-2x)^{15}} + \sqrt[6]{(1-2x)^{12}(1-3x)^2} + \cdots + \sqrt[6]{(1-3x)^{10}})} \\ &= 1, \end{aligned}$$

所以其主部为 $\frac{x^2}{2}$, 它对于 x 是二阶的.

$$(4) \text{ 因为 } \tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} (1 - \cos x) = \frac{2}{\cos x} \sin x \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\frac{x^3}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\cos x} \cdot \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^3}{2}} = 1,$$

故其主部为 $\frac{x^3}{2}$, 它对于 x 是三阶的.

【654】 假设 $x \rightarrow +0$, 证明: 无穷小

$$(1) f(x) = \frac{1}{\ln x}; \quad (2) f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

对任何的 n , 都不能与无穷小 $x^n (n > 0)$ 相比较, 即对任何的 n , 等式 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{x^n} = k$ 不成立, 式中 k 为非零的有限数.

证 (1) 由 592 题的结果有

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^n \ln x = 0 \quad (n > 0).$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{\ln x}}{x^n} = \infty,$$

即 $\frac{1}{\ln x}$ 不能与无穷小 x^n 相比较 ($x \rightarrow +0$).

$$(2) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{\frac{n}{2}}}{e^t} = 0,$$

所以 $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 不能与无穷小 x^n 相比较 ($x \rightarrow +0$).

【655】 设 $x \rightarrow 1$, 选出以下函数的形如 $C(x-1)^n$ 的主部, 并求出其对于无穷小 $(x-1)$ 的阶:

- (1) $x^3 - 3x + 2$; (2) $\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$;
 (3) $\ln x$; (4) $e^x - e$;
 (5) $x^x - 1$.

解 (1) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{3(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{3(x-1)^2} = 1,$$

所以其主部为 $3(x-1)^2$, 对于 $(x-1)$ 是二阶无穷小.

(2) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{-\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{2}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1-x)^{\frac{1}{3}}}{-\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} = 1,$$

故其主部为 $-\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{2}}$, 对于 $(x-1)$ 是 $\frac{1}{3}$ 阶无穷小.

$$(3) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1} = 1,$$

故其主部为 $x-1$, 对于 $(x-1)$ 是一阶无穷小.

$$(4) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{x-1} = e,$$

故其主部为 $e(x-1)$, 对于 $(x-1)$ 是一阶无穷小.

(5) 因为 $x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot \frac{x \ln[1+(x-1)]}{x-1} = 1,$$

故其主部为 $x-1$, 对于 $x-1$ 是一阶无穷小.

【656】 设 $x \rightarrow +\infty$, 选出以下函数的形如 Cx^n 的主部, 并求出其对于无穷大 x 的阶:

$$(1) x^2 + 100x + 10000; \quad (2) \frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1};$$

$$(3) \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}; \quad (4) \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}.$$

$$\text{解} \quad (1) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 100x + 10000}{x^2} = 1,$$

所以其主部为 x^2 , 它对于无穷大 x 是二阶的.

$$(2) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}}{2x^2} = 1,$$

故其主部为 $2x^2$, 它对于无穷大 x 是二阶的.

(3) 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} \right] = 1,$$

故其主部为 $x^{\frac{2}{3}}$, 它对于无穷大 x 是一阶的.

$$(4) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}} = 1,$$

故其主部为 $\sqrt[8]{x}$, 它对于无穷大 x 是 $\frac{1}{8}$ 阶的.

【657】 令 $x \rightarrow +\infty$, 请选出以下函数的形如 $C\left(\frac{1}{x}\right)^n$ 的主部, 并求出其对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 的无穷小的阶:

$$(1) \frac{x+1}{x^4+1}; \quad (2) \sqrt{x+1} - \sqrt{x};$$

$$(3) \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}; \quad (4) \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}.$$

解 (1) 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+1}{x^4+1}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4+x^3}{x^4+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^4}} = 1,$$

故其主部为 $\left(\frac{1}{x}\right)^3$, 它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是三阶的.

(2) 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 1,$$

故其主部为 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, 它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是 $\frac{1}{2}$ 阶的.

(3) 因为

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \\
&= \frac{-2}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})},
\end{aligned}$$

所以
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}} = 1,$$

故其主部为 $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$, 它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是 $\frac{3}{2}$ 阶的.

(4) 因为
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

故其主部为 $\left(\frac{1}{x}\right)^2$, 它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是二阶的.

【658】 令 $x \rightarrow 1$, 请选出以下函数的形如 $C\left(\frac{1}{x-1}\right)^n$ 的主部, 并确定其对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 的阶:

(1) $\frac{x^2}{x^2-1};$ (2) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$

(3) $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}};$ (4) $\frac{1}{\sin \pi x};$

(5) $\frac{\ln x}{(1-x)^2}.$

解 (1) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{\frac{1}{2(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2}{x+1} = 1,$$

故其主部为 $\frac{1}{2(x-1)}$, 它对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 是一阶的.

(2) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{\sqrt{2} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1}}{2} = 1,$$

故其主部为 $\sqrt{2} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$, 它对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 是 $\frac{1}{2}$ 阶的.

(3) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3}x}{\sqrt[3]{1+x+x^2}} = 1,$$

故其主部为 $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$, 它对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 是 $\frac{1}{3}$ 阶的.

(4) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sin \pi x}}{\frac{1}{\pi(1-x)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi(1-x)}{\sin \pi(-x)} = 1,$$

故其主部为 $\frac{1}{\pi(1-x)}$, 它对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 是 1 阶的.

(5) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\ln x}{(1-x)^2}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1} = 1,$$

故其主部为 $\frac{1}{x-1}$, 它对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 是一阶的.

【659】 设 $x \rightarrow +\infty$ 且 $f_n(x) = x^n (n = 1, 2, \dots)$, 证明:

- (1) $f_n(x)$ 中的每个函数都比其前一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加得快;
- (2) 函数 e^x 比函数 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 中的每个函数都增加得快.

证 (1) 因为 $\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} = x \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty)$,

所以 $f_n(x)$ 比 $f_{n-1}(x)$ 增加较快.

(2) 因为对任一固定的 n , $\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty (x \rightarrow +\infty)$, 所以, e^x 比 $f_n(x)$ 中的每一个都增加得较快.

【660】 假设 $x \rightarrow +\infty$ 且 $f_n(x) = \sqrt[n]{x} (n = 1, 2, \dots)$

证明:

(1) 函数 $f_n(x)$ 中的每个函数都比其前一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加得慢;

(2) 函数 $f(x) = \ln x$ 比函数 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 中的每个函数都增加得慢.

证 (1) 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n-1]{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{n(n-1)}}} = 0,$$

所以 $f_n(x)$ 比 $f_{n-1}(x)$ 增加得较慢.

(2) 因为对任一固定的 n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0$,

所以, $\ln x$ 比 $f_n(x)$ 增加得较慢.

【661】 证明: 对于任意的函数序列

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (x_0 < x < +\infty)$$

都可以举出一个函数 $f(x)$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时它比函数 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 中的每个函数都增加得快.

证 取正整数 $N > x_0$ 定义 $x_0 < x < +\infty$ 上的函数 $f(x)$ 如下:

$$f(x) = \begin{cases} n \left(\sum_{k=1}^n |f_k(x)| + 1 \right), & \text{当 } n \leq x < n+1 \text{ 时,} \\ & (n = N, N+1, \dots) \\ 0, & \text{当 } x_0 < x < N \text{ 时.} \end{cases}$$

于是, 对任何正整数 n , 当 $x > \max\{N, n\}$ 时, 有

$$\left| \frac{f_n(x)}{f(x)} \right| = \frac{|f_n(x)|}{[x] \left(\sum_{k=1}^{[x]} |f_k(x)| + 1 \right)} < \frac{1}{[x]},$$

其中 $[x]$ 表 x 的整数部分, 因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{f(x)} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

即当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 比 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 中的每一个都增加得较快.

§ 7. 函数的连续性

1. 函数的连续性

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

亦即函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 有定义, 若对于每个 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 对于 $f(x)$ 有意义的值, 不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

都成立, 则称函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时 (或在点 x_0) 为连续的.

如果函数 $f(x)$ 在集 X 的每一点上都是连续的, 则称函数 $f(x)$ 在已知集 $X = \{x\}$ (开区间、闭区间, 等等) 上是连续的.

如果 $x = x_0$ 是属于函数 $f(x)$ 定义域 $X = \{x\}$ 的某个值或者是此集的聚点, 等式 (1) 不成立, 也就是说, 或者 (1): 数 $f(x_0)$ 不存在, 换言之, 函数在点 $x = x_0$ 没有定义; 或者 (2): $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在; 或者 (3): 公式 (1) 的两端存在, 但它们不相等, 则 x_0 称作函数 $f(x)$ 的不连续点.

不连续点分为: (1) 第一类不连续点 x_0 , 对于这类点存在单侧有限极限: $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ 和 $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$

(2) 第二类不连续点 —— 其他的一切不连续点.

$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ 之差称为函数在点 x_0 的跳跃.

如果等式

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$

成立, 则不连续点 x_0 称作可去点, 如果极限 $f(x_0 - 0)$ 或 $f(x_0 + 0)$ 中至少有一个等于 ∞ , 则 x_0 被称为无穷不连续点.

如果等式:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \quad (\text{或者 } f(x_0 + 0) = f(x_0))$$

则称函数 $f(x_0)$ 在 x_0 点是左侧(右侧)连续. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的, 充要条件是下面三个数相等:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

2. 初等函数的连续性

如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 则函数

$$(1) f(x) \pm g(x); \quad (2) f(x)g(x);$$

$$(3) \frac{f(x)}{g(x)} [g(x_0) \neq 0]$$

在 $x = x_0$ 时也是连续的.

特别是: (1) 多项式函数

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

对任何 x 都是连续的;

(2) 有理分式函数

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m},$$

对使分母非零的所有 x 也是连续的.

一般来说, 基本初等函数: $x^n, \sin x, \cos x, \tan x, a^x, \log_a x, \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \cdots$ 在所有有定义的点上都是连续的.

较普遍的结果是: 如果函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时是连续的, 而函数 $g(y)$ 当 $y = f(x_0)$ 时是连续的, 则函数 $g(f(x))$ 在 $x = x_0$ 时也是连续的.

3. 连续函数的基本定理:

如果函数 $f(x)$ 在有限的闭区间 $[a, b]$ 上是连续的, 则:

(1) 函数 $f(x)$ 在此闭区间上有界;

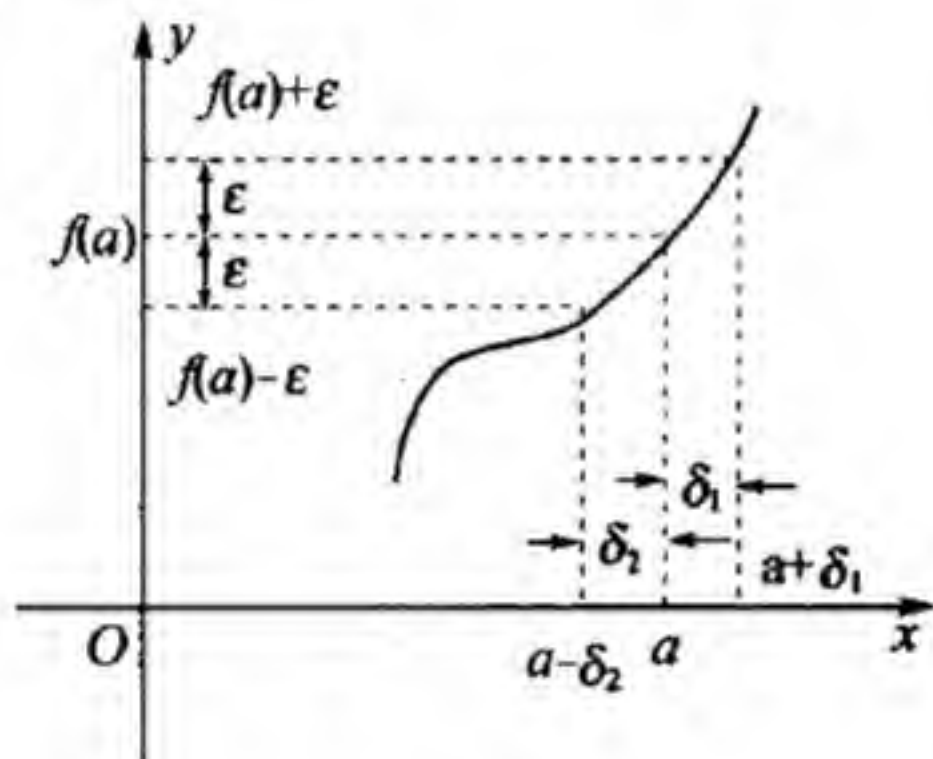
(2) 它能达到其下确界 m 和上确界 M (维尔斯特拉斯定理);

(3) 在每个区间 $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ 内, 函数具有介于 $f(\alpha)$ 和 $f(\beta)$ 之间的所有中间值(柯西定理).

特别是, 如果 $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, 则能找到一个数值 $\gamma (\alpha < \gamma < \beta)$, 使得 $f(\gamma) = 0$.

【662】 已给出连续函数 $y = f(x)$ 的图形. 对于给定点 a 和给定数 $\varepsilon > 0$, 用几何方法表示出这样的数 $\delta > 0$, 使得当 $|x - a| < \delta$ 时, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

解 如 662 题图所示.



662 题图

$\delta_1 < \delta_2$, 取 $\delta = \delta_1$, 于是当 $|x - a| < \delta$ 时,

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

【663】 要求制作一个边长 $x_0 = 10$ 厘米的金属正方形薄板. 如果要其面积 $y = x^2$ 与预计的 $y_0 = 100$ 平方厘米的差不超过 (1) ± 1 平方厘米; (2) ± 0.1 平方厘米; (3) ± 0.01 平方厘米; (4) $\pm \varepsilon$ 平方厘米, 问该薄板的边长 x 允许在什么范围内变动?

解 (1) 要使 $|x^2 - 100| < 1$,

$$\text{只要 } 99 < x^2 < 101,$$

$$\text{解之得 } 9.95 < x < 10.05.$$

$$(2) \text{ 要 } |x^2 - 100| < 0.1,$$

$$\text{只要 } \sqrt{100 - 0.1} < x < \sqrt{100 + 0.1},$$

$$\text{解之得 } 9.995 < x < 10.005.$$

$$(3) \text{ 要 } |x^2 - 100| < 0.001,$$

只要 $\sqrt{100-0.01} < x < \sqrt{100+0.01}$,

解之得 $9.9995 < x < 10.0005$.

(4) 要 $|x^2 - 100| < \epsilon$,

只要 $\sqrt{100-\epsilon} < x < \sqrt{100+\epsilon}$.

【664】 立方体的边长在2米和3米之间,为了在计算此立方体的体积时其绝对误差不超过 ϵ 立方米,设:(1) $\epsilon = 0.1$ 立方米;
(2) $\epsilon = 0.01$ 立方米;(3) $\epsilon = 0.001$ 立方米,问测量此立方体的边长 x 时,允许有怎样的绝对误差 Δ ?

解 要 $|x_1^3 - x_2^3| < \epsilon$,

只要 $|x_1 - x_2| (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < \epsilon$,

注意 $2 \leq x_1 \leq 3, 2 \leq x_2 \leq 3$,

故只要 $|x_1 - x_2| < \frac{\epsilon}{3 \times 3^2} = \frac{\epsilon}{27}$,

就有 $|x_1^3 - x_2^3| < \epsilon$,

因此 (1) $\Delta < \frac{0.1}{27}$ (米) = 3.7 (毫米),

(2) $\Delta < \frac{0.01}{27}$ (米) = 0.37 (毫米),

(3) $\Delta < \frac{0.001}{27}$ (米) = 0.037 (毫米).

【665】 在 $x_0 = 100$ 的点的邻域内要使函数 $y = \sqrt{x}$ 的图形的纵坐标与 $y_0 = 10$ 纵坐标之差小于 $\epsilon = 10^{-n} (n \geq 0)$,该邻域最大是多少?确定当 $n = 0, 1, 2, 3$ 时此邻域的大小.

解 要 $|\sqrt{x} - 10| < 10^{-n}$,

只要 $10[1 - 10^{-(n+1)}]^2 < \sqrt{x} < 10[1 + 10^{-(n+1)}]$,

即 $100[1 - 10^{-(n+1)}]^2 < x < 100[1 + 10^{-(n+1)}]^2$.

故得(1) 当 $n = 0$ 时, $81 < x < 121$,

(2) 当 $n = 1$ 时, $98.01 < x < 102.01$,

(3) 当 $n = 2$ 时, $99.8001 < x < 100.2001$,

(4) 当 $n = 3$ 时, $99.980001 < x < 100.020001$.

【666】 采用“ ϵ - δ ”论证法证明函数 $f(x) = x^2$ 在 $x = 5$ 时是连续的. 填下表:

ϵ	1	0.1	0.01	0.001	...
δ					

证 任给 $\epsilon > 0$. 要使 $|x^2 - 25| < \epsilon$, 只要

$$|x - 5| |x + 5| < \epsilon,$$

不妨设 $|x - 5| < 1$, 即 $4 < x < 6$,

从而 $9 < x + 5 < 11$.

于是只要 $|x - 5| < \frac{\epsilon}{11}$,

取 $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{11}, 1\right\}$, 则当 $|x - 5| < \delta$ 时, 恒有

$$|x^2 - 25| < \epsilon,$$

即 $y = x^2$ 在 $x = 5$ 处连续.

填下表

ϵ	1	0.1	0.01	0.001	...
δ	0.09	0.009	0.0009	0.00009	...

【667】 设 $f(x) = \frac{1}{x}$ 和 $\epsilon = 0.001$. 对于数值 $x_0 = 0.1$; 0.01 ; 0.001 ; ... 求出充分大的正数 $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$, 使得能从不等式 $|x - x_0| < \delta$ 推出不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

能否对已知的 $\epsilon = 0.001$ 选出 $\delta > 0$ 来, 使其对于区间 $(0, 1)$ 内的所有 x_0 值都适用, 亦即使得任何值 $x_0 \in (0, 1)$, 若

$$|x - x_0| < \delta,$$

则 $f(x) - f(x_0) < \epsilon$?

$$\text{解 } |f(x) - f(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{|x||x_0|}. \quad (1)$$

由于 $|x_0| - |x| \leq |x - x_0|$,

不妨设 $|x_0| > |x - x_0|$,

则 $|x| \geq |x_0| - |x - x_0| > 0$,

故有 $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{|x - x_0|}{|x_0|^2 - |x_0||x - x_0|}$.

于是只要 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 只要

$$\frac{|x - x_0|}{|x_0|^2 - |x_0||x - x_0|} < \epsilon,$$

即只要 $|x - x_0| < \frac{\epsilon |x_0|^2}{1 + \epsilon |x_0|}$,

取 $\delta < \frac{\epsilon x_0^2}{1 + \epsilon |x_0|} > 0$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

我们可取

$$\delta = \frac{\epsilon x_0^2}{2} = 0.0005 x_0^2 < \frac{\epsilon x_0^2}{1 + \epsilon |x_0|},$$

当 $x_0 = 0.1$ 时, $\delta = 5 \times 10^{-6}$.

当 $x_0 = 0.01$ 时, $\delta = 5 \times 10^{-8}$.

当 $x_0 = 0.001$ 时, $\delta = 5 \times 10^{-10}$.

由表达式(1)知, 对于无论怎样小的 δ (固定), 则当

$$|x - x_0| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

及 $x_0 \rightarrow 0$ 时, $|f(x) - f(x_0)|$ 可任意地大. 因此, 无法选出一个公共的正数 δ 来.

【668】 用“ $\epsilon\delta$ ”语言表述法, 在肯定的意义上表达以下论断: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义, 但在这一点是不连续的.

解 存在一个 $\epsilon_0 > 0$, 对于无论怎样小的 $\delta > 0$, 都有某一 x 满足 $|x - x_0| < \delta$, 但 $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$.

【669】 如果仅仅是设对于某些数 $\epsilon > 0$, 能找到相对应的数 $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$, 则要 $|x - x_0| < \delta$, 则有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

如果: (1) 诸数 ϵ 形成一个有穷集; (2) 诸数 ϵ 形成分数 $\epsilon =$

$\frac{1}{2^n} (n=1, 2, \dots)$ 的无穷集. 能否确定函数 $f(x)$ 在点 x_0 是连续的?

解 (1) 不能. 因为 ϵ 不能任意地小.

(2) 能. 事实上, 对于任给的 $\epsilon > 0$, 总可以取充分大的 n , 使 $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. 于是, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

【670】 假设已知函数 $f(x) = x + 0.001[x]$

证明: 对于每个 $\epsilon > 0.001$, 能选出 $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$, 使得只要 $|x' - x| < \delta$, 则 $|f(x') - f(x)| < \epsilon$.

而对于 $0 < \epsilon \leq 0.001$, 这种情况对于所有的值 x 都不行.

在哪些点上破坏了这个函数的连续性?

证 当 $\epsilon > 0.001$, 且 $|x' - x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} & |f(x') - f(x)| \\ &= |x' - x + 0.001([x'] - [x])| \\ &\leq |x' - x| + 0.001. \end{aligned}$$

此时只要取 $\delta = \min\{\epsilon - 0.001, 1\}$, 则当 $|x - x'| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - f(x')| < \epsilon$. 当 $0 < \epsilon \leq 0.001$, 且 x_0 不为整数时, 存在整数 n , 使得 $n < x_0 < n+1$, 只要取 $\delta = \min\{x_0 - n, n+1 - x_0, \epsilon\} > 0$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $[x] = [x_0]$, 从而

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta \leq \epsilon.$$

而当 $x_0 = n$ (n 为整数) 时, 则对于无论怎样选取的正数 δ , 总有 x 满足 $x < x_0$, 及 $x_0 - x < \delta$, 但

$$[x_0] - [x] = 1,$$

所以 $|f(x) - f(x_0)| = (x_0 - x) + 0.001 > \epsilon$.

于是, 函数 $f(x)$ 在点 $x = n$ (整数) 失去了连续性.

【671】 设对于每个充分小的数 $\delta > 0$, 都存在

$$\epsilon = \epsilon(\delta, x_0) > 0$$

使得: 若 $|x - x_0| < \delta$

则不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 成立.

由此能否得出函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 时是连续的? 用已知的不等式能说明函数 $f(x)$ 的什么性质?

解 不能, 因为 ϵ 是由 δ 所确定的, 它不能任意小. 不等式只能说明在 x_0 的 δ 邻域内, $f(x)$ 有界. 事实上, $|f(x)| \leq |f(x_0)| + \epsilon$.

【672】 假设对于每个数 $\epsilon > 0$, 都存在数 $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$, 使得如果 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则 $|x - x_0| < \delta$

由此能否得出函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 时是连续的? 这些不等式说明函数的什么性质?

解 不能. 它只能说明落在开区间 $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ 内的函数值都是由开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内的点映过来的. 事实上设 R 为 $f(x)$ 的值域. 则由题中条件

$$f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \supset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \cap R.$$

故 $f(x)$ 的逆函数 $f^{-1}(y)$ 在 $f(x_0)$ 的充分小邻域内是单值且有界的.

【673】 假设对于每个数 $\delta > 0$, 都存在数 $\epsilon = \epsilon(\delta, x_0) > 0$, 使得如果 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则 $|x - x_0| < \delta$.

由此是否得出函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 时是连续的? 已知的不等式说明函数的什么性质?

研究下题:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ \pi - \arctan x, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

解 不能. 它只能说明反函数的连续性和单值性.

【674】 用“ $\epsilon - \delta$ ”论证法, 证明以下函数的连续性:

- | | |
|---------------------|-------------------|
| (1) $ax + b$; | (2) x^2 ; |
| (3) x^3 ; | (4) \sqrt{x} ; |
| (5) $\sqrt[3]{x}$; | (6) $\sin x$; |
| (7) $\cos x$; | (8) $\arctan x$. |

证 (1) 设 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 要使

$$|(ax+b)-(ax_0+b)| = |a||x-x_0| < \varepsilon.$$

只要 $|x-x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|}$,

取 $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$, 则当 $|x-x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|(ax+b)-(ax_0+b)| < \varepsilon.$$

即 $ax+b$ 在 x_0 连续. 由 x_0 的任意性, 知 $ax+b$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内点点连续.

$$(2) |x^2 - x_0^2| = |x-x_0| \cdot |x+x_0|.$$

不妨设 $|x-x_0| < 1$,

则 $|x| < |x_0| + 1$.

所以 $|x^2 - x_0^2| \leq (2|x_0| + 1)|x-x_0|$,

对任给的 $\varepsilon > 0$, 要使 $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$,

只需 $|x-x_0| < 1$,

且 $(2|x_0| + 1)|x-x_0| < \varepsilon$,

取 $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}, 1\right\}$,

则当 $|x-x_0| < \delta$ 时,

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$

所以 x^2 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

(3) 由于

$$\begin{aligned} |x^3 - x_0^3| &= |x-x_0| |x^2 + x_0x + x_0^2| \\ &\leq |x-x_0| (|x|^2 + |x_0||x| + |x_0|^2). \end{aligned}$$

不妨设 $|x-x_0| < 1$,

则 $|x| < |x_0| + 1$,

所以 $|x^3 - x_0^3| < |x-x_0| (1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2)$,

对任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+3|x_0|+3|x_0|^2}\right\}$,

则当 $|x-x_0| < \delta$ 时, $|x^3 - x_0^3| < \varepsilon$,

因此 x^3 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

(4) 设 $x_0 \in (0, +\infty)$, 由于

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}},$$

对任给的 $\varepsilon > 0$. 取 $\delta = \varepsilon \sqrt{x_0}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon,$$

所以, \sqrt{x} 在 $x_0 (x_0 > 0)$ 连续.

若 $x_0 = 0$, 则要使 $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} < \varepsilon$,

只须 $0 < x < \varepsilon^2$, 取 $\delta = \varepsilon^2$, 则当 $0 < x < \delta$ 时, $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \varepsilon$.

因此 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续.

(5) 由于

$$\begin{aligned} |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| &= \frac{|x - x_0|}{|x^{\frac{2}{3}} + (x \cdot x_0)^{\frac{1}{3}} + x_0^{\frac{2}{3}}|} \\ &< \frac{|x - x_0|}{x_0^{\frac{2}{3}}} \quad (x_0 \neq 0, xx_0 > 0), \end{aligned}$$

取 $\delta = \min\{|x_0|, \varepsilon \sqrt[3]{x_0^2}\}$.

则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| < \varepsilon$.

若 $x_0 = 0$, 则取 $\delta = \varepsilon^3$, 因此 $\sqrt[3]{x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

(6) 由于

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \\ &\leq |x - x_0|, \end{aligned}$$

对任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$ 即可. 因此 $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

(7) 由于

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos x_0| &= 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \sin \frac{x + x_0}{2} \right| \\ &\leq |x - x_0|. \end{aligned}$$

对任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$ 即可. 因此 $\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

(8) 当 $x_0 = 0$ 时, $|\arctan x - \arctan 0| = |\arctan x|$

而当 $|y| < \frac{\pi}{2}$ 时, $|y| \leq |\tan y|$,

故 $|\arctan x| \leq |x|$,

对任给的 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \epsilon$ 即可, 当 $x_0 \neq 0$ 时, 不妨设 $|x - x_0| < |x_0|$, 由于

$$\begin{aligned} & |\arctan x - \arctan x_0| \\ &= \left| \arctan \frac{x - x_0}{1 + xx_0} \right| \leq \left| \frac{x - x_0}{1 + xx_0} \right| < |x - x_0|, \end{aligned}$$

(最后一个不等式是因为 $x \cdot x_0 > 0$), 所以取

$$\delta = \min\{|x_0|, \epsilon\}.$$

则当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

$$|\arctan x - \arctan x_0| < \epsilon,$$

因此 $\arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

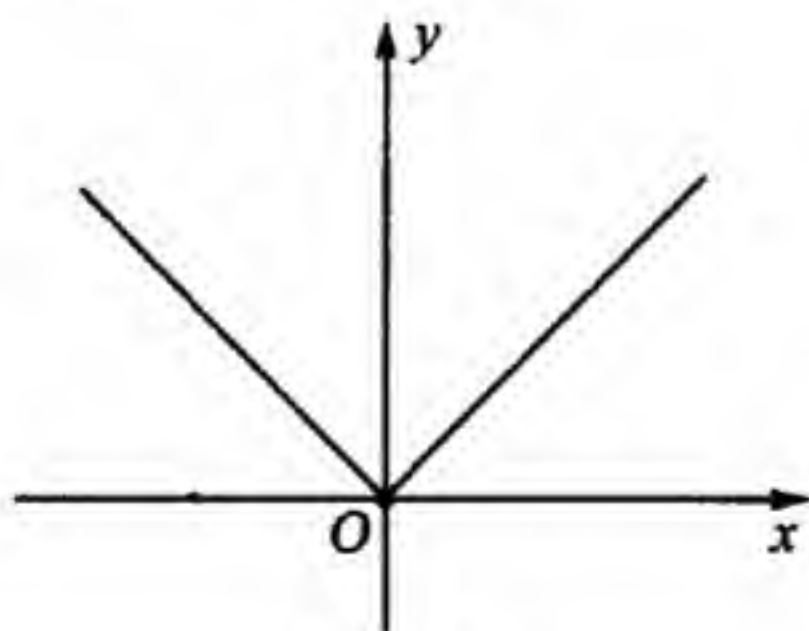
研究下列函数的连续性并作出其图形(675 ~ 686).

【675】 $f(x) = |x|$.

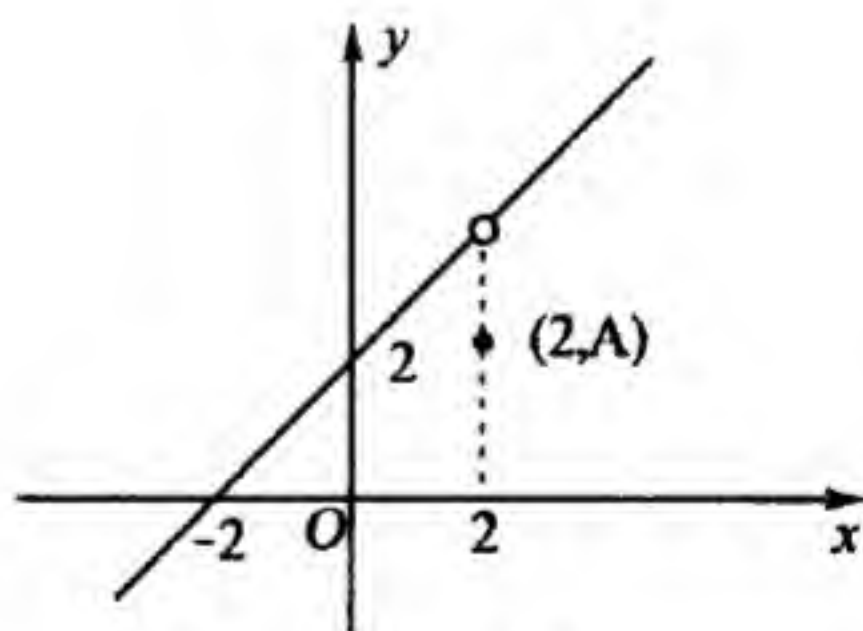
解 因为 $||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$, 因此, 对任给的 $\epsilon > 0$,

取 $\delta = \epsilon$, 即可证得 $|x|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

如 675 题图所示.



675 题图



676 题图

【676】 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{若 } x \neq 2, \\ A, & \text{若 } x = 2. \end{cases}$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$,

所以当 $A = 4$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 2$ 处连续; 而当 $A \neq 4$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 2$ 处不连续; 而当 $x \neq 2$ 时,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x - 2.$$

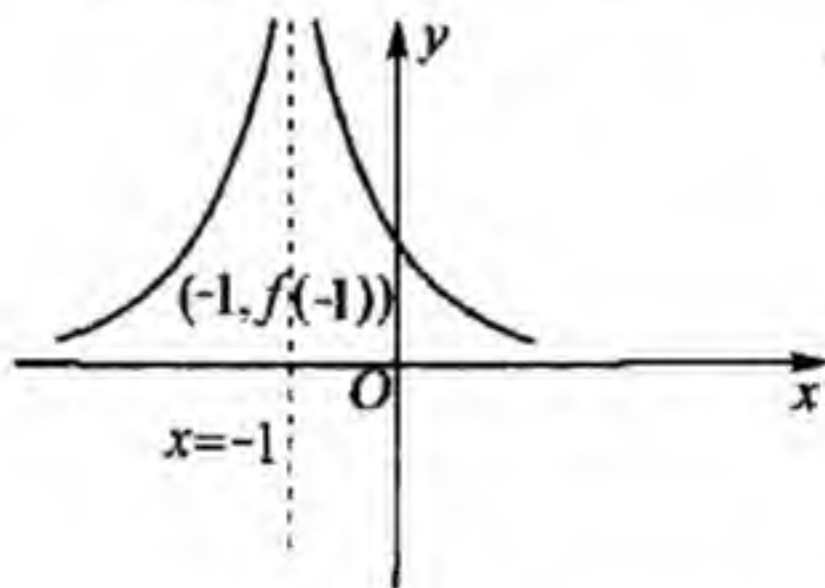
所以 $f(x)$ 连续, 如 676 题图所示.

【677】 若: $x \neq -1$ 时 $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, 而 $f(-1)$ 是任意的.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$.

故函数 $f(x)$ 在点 $x = -1$ 处不连续.

在 $x \neq -1$ 处, 函数连续, 如 677 题图.



677 题图

【678】 (1) 若 $x \neq 0$ 时 $f_1(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right|$, 而 $f_1(0) = 1$;

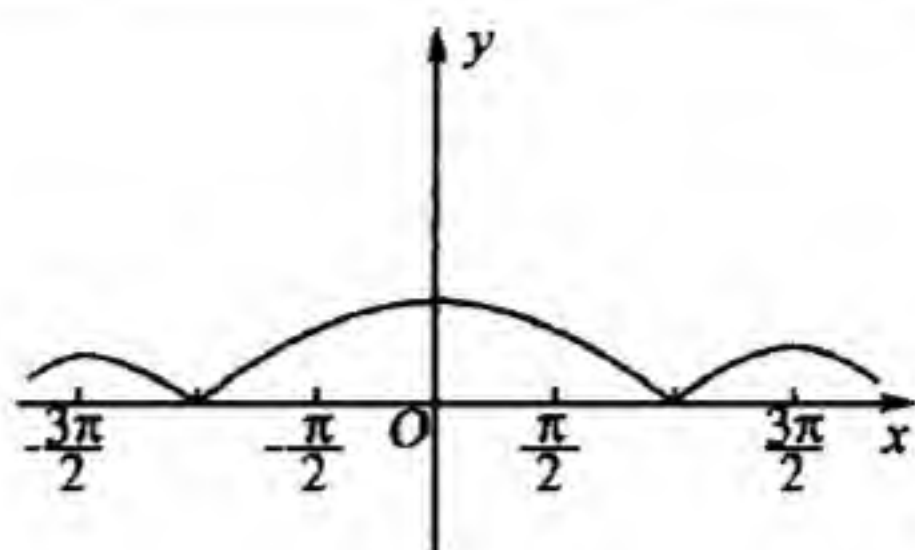
若 $x \neq 0$ 时 $f_2(x) = \frac{\sin x}{x}$, 而 $f_2(0) = 1$.

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 1 = f_1(0)$,

所以 $f_1(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 如 678 题图 1 所示.

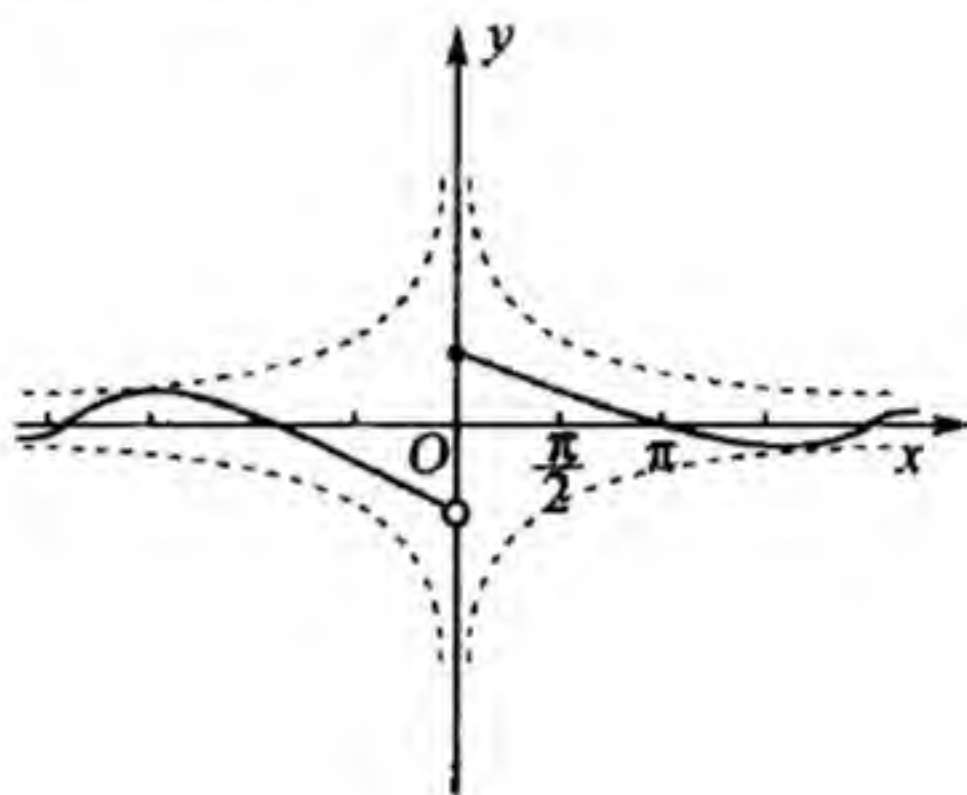
(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow -0} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{-x} = -1,$$



678 题图 1

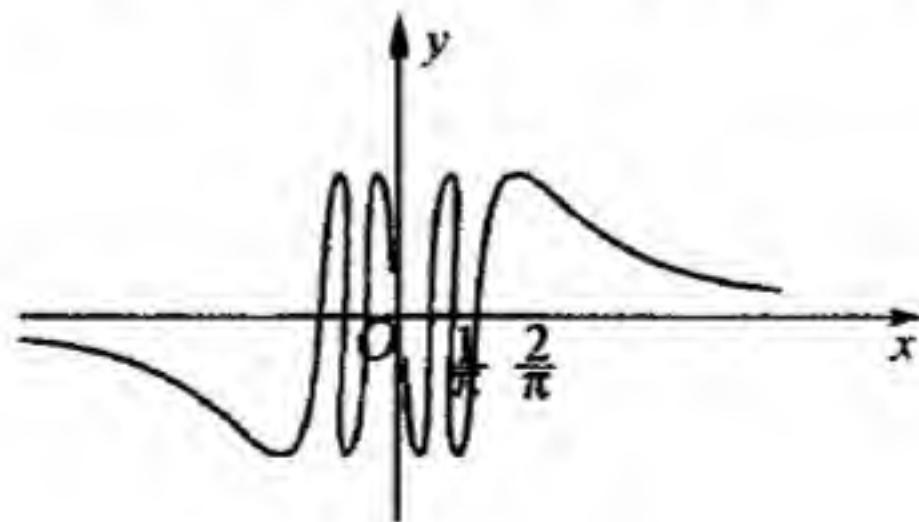
所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)$ 不存在. 因此 $f_2(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续, 其余各点均连续. 如 678 题图 2 所示.



678 题图 2

【679】 若 $x \neq 0$ 时 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, 而 $f(0)$ 是任意的.

解 当 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 连续, 而在点 $x = 0$ 处, $f(x)$ 不连续 (因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在). 图形关于原点对称. 如 679 题图所示.

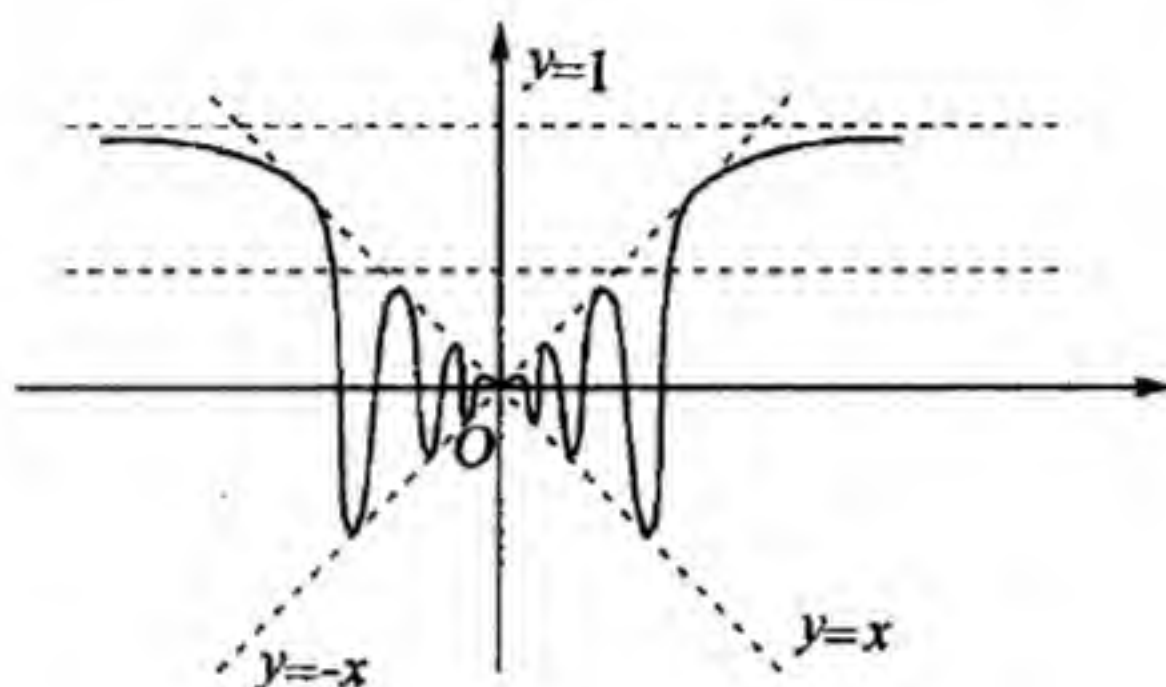


679 题图

【680】 若 $x \neq 0$ 时 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 而 $f(0) = 0$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$,

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续. 图形关于 Oy 轴对称. 如 680 题图所示.

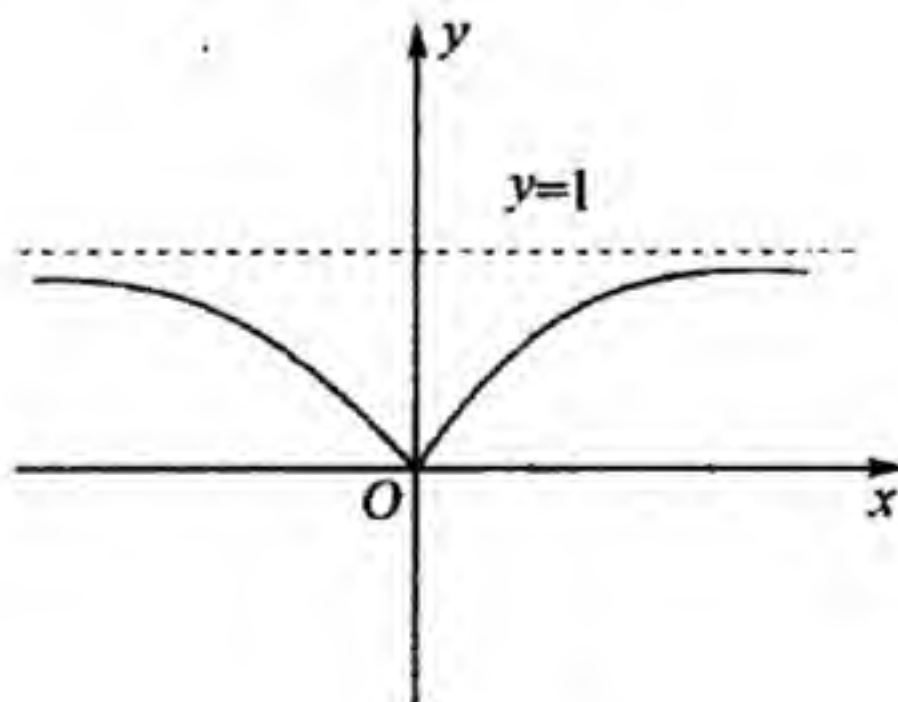


680 题图

【681】 若 $x \neq 0$ 时 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, 而 $f(0) = 0$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续. 如 681 题图所示, 图形关于 Oy 轴对称.



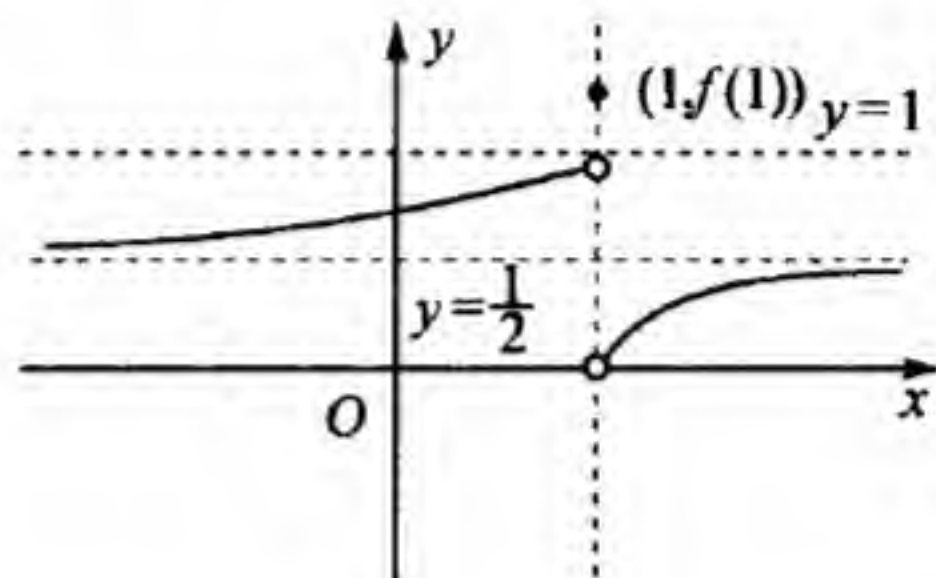
681 题图

【682】 若 $x \neq 1$ 时 $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$, 而 $f(1)$ 是任意的.

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1,$$

所以 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续, 在 $x \neq 1$ 处, $f(x)$ 连续, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{2}$, 如 682 题图所示.



682 题图

【683】 若: $x \neq 0$ 时 $f(x) = x \ln x^2$, 而 $f(0) = a$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x^2 = 0,$

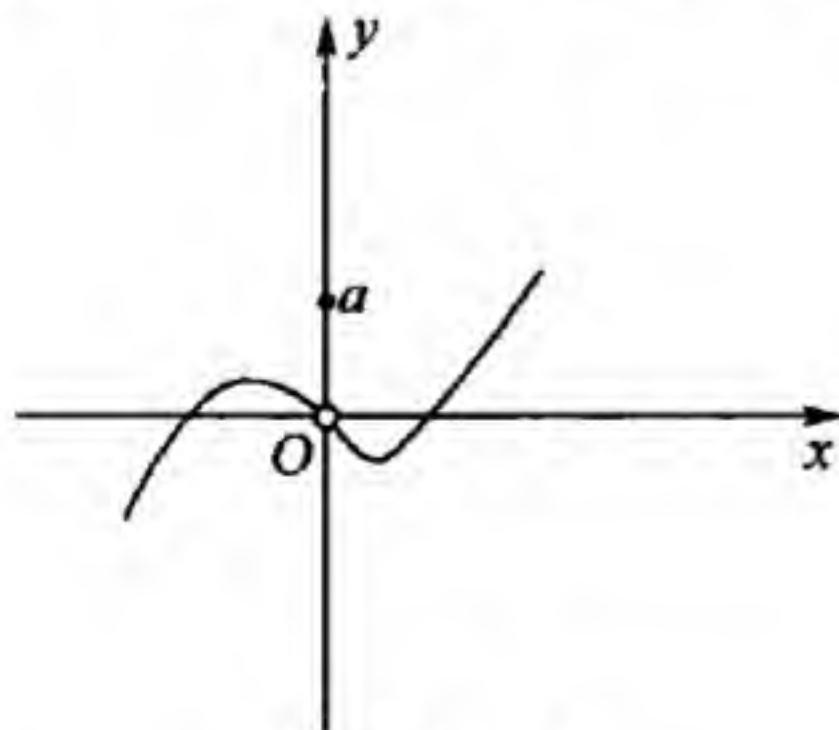
当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续;

当 $a \neq 0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 在其他点连续. 如 683 题图所示.

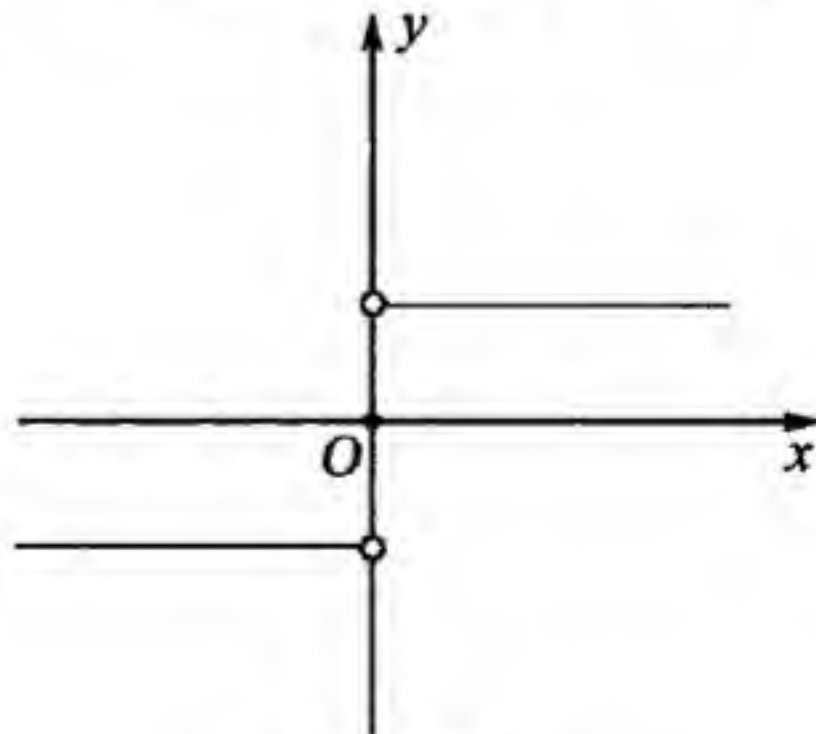
【684】 $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

解 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 而在其他点均连续. 如 684 题图所示.



683 题图

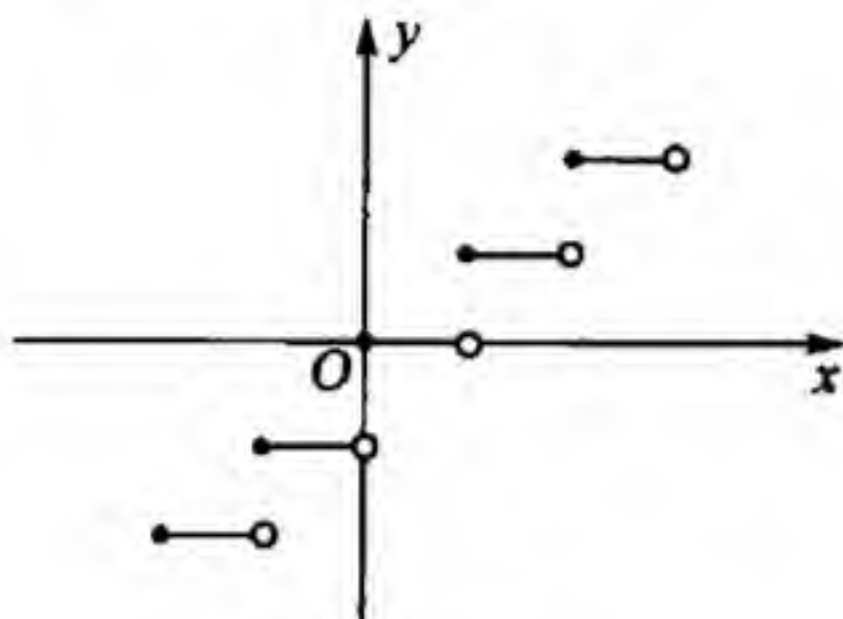


684 题图

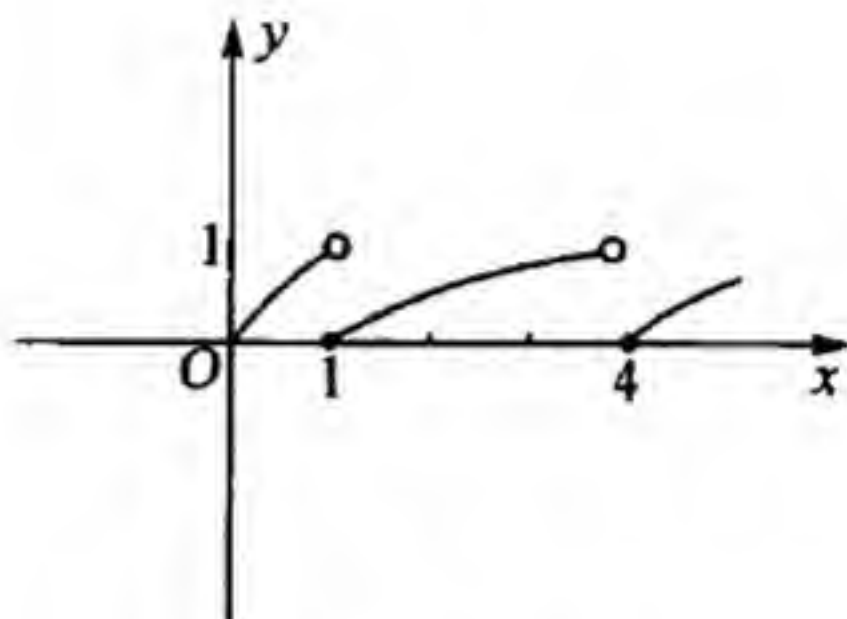
【685】 $f(x) = [x]$.

解 当 $x = k$ (k 为整数时), $f(x)$ 不连续而在其它点, $f(x)$ 均连续.

如 685 题图所示.



685 题图



686 题图

【686】 $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$.

解 当 $k^2 \leq x < (k+1)^2$ 时,

$$f(x) = \sqrt{x} - k,$$

$$\lim_{x \rightarrow (k+1)^2 - 0} f(x) = 1.$$

而 $f[(k+1)^2] = 0,$

所以 $f(x)$ 在点 $x = (k+1)^2$ 处不连续 ($k = 0, 1, 2, \dots$). 而在 $[0, +\infty)$ 内的其它点均连续. 如 686 题图所示.

确定下列函数的不连续点, 并研究这些点的性质 (687 ~ 700).

【687】 $y = \frac{x}{(1+x)^2}.$

解 $x = -1$ 为无穷型不连续点.

【688】 $y = \frac{1+x}{1+x^3}.$

解 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3},$

故 $x = -1$ 为“可去”的不连续点也称“无变化的”不连续点.

【689】 $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2}.$

$$\text{解 } y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+2)},$$

$x = 1$ 及 $x = -2$ 均为无穷型不连续点.

$$\text{【690】 } y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}.$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} y = -1$; $\lim_{x \rightarrow 1} y = 0$,

所以 $x = -1$ 为无穷型不连续点, 而 $x = 0$ 及 $x = 1$ 为“可去”的不连续点.

$$\text{【691】 } y = \frac{x}{\sin x}.$$

解 因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{x}{\sin x} = \infty$ (k 为不等零的整数), 所以

$x = 0$ 为可去的不连续点, 而 $x = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为无穷型不连续点.

$$\text{【692】 } y = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi x}{4 - x^2}}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2\pi \sin^2 \frac{\pi}{2}(2-x)}{\frac{\pi}{2}(2-x) \cdot 2(2+x)}} = 0,$$

同理 $\lim_{x \rightarrow -2} y = 0$. 所以 $x = 2$ 及 $x = -2$ 为可去的不连续点.

$$\text{【693】 } y = \cos^2 \frac{1}{x}.$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} y$ 及 $\lim_{x \rightarrow -0} y$ 均不存在, 故 $x = 0$ 为第二类不连续点.

$$\text{【694】 } y = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right).$$

解 $x = 0$ 为第二类不连续点. 而

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{k}-0} y = (-1)^k, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{k}+0} y = (-1)^{k+1},$$

故 $x = \frac{1}{k} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为第一类不连续点.

$$\text{【695】 } y = \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{\cos \frac{\pi}{x}}.$$

$$\text{解 } x = \frac{2}{2k+1} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

为可去的不连续点.

$$\text{【696】 } y = \arctan \frac{1}{x}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +0} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -0} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2},$$

故 $x = 0$ 为第一类不连续点.

$$\text{【697】 } y = \sqrt{x} \arctan \frac{1}{x}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \arctan \frac{1}{x} = 0, \text{ 故 } x = 0 \text{ 为可去的不连续点.}$$

$$\text{【698】 } y = e^{\frac{x+1}{x}}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{x+1}{x}} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{x+1}{x}} = 0,$$

所以, $x = 0$ 为第二类不连续点.

$$\text{【699】 } y = \frac{1}{\ln x}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{\ln x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{\ln x} = -\infty,$$

所以 $x = 0$ 为可去的不连续点, $x = 1$ 为无穷型不连续点.

$$\text{【700】 } y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}.$$

解 $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 1, \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 0,$

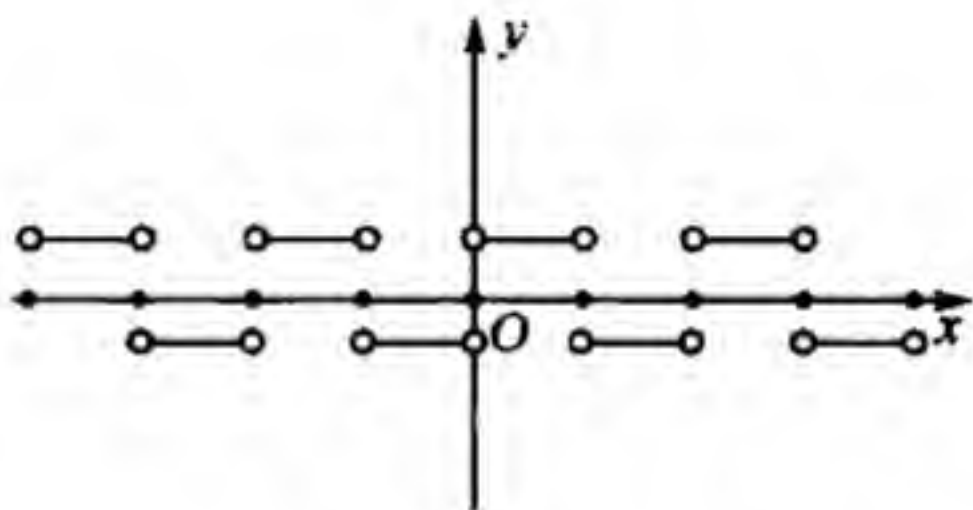
$\lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow -0} y = +\infty,$

故 $x = 1$ 为第一类不连续点, 而 $x = 0$ 为无穷型不连续点.

研究以下函数的连续性, 并画出其略图(701 ~ 719).

【701】 $y = \operatorname{sgn}(\sin x).$

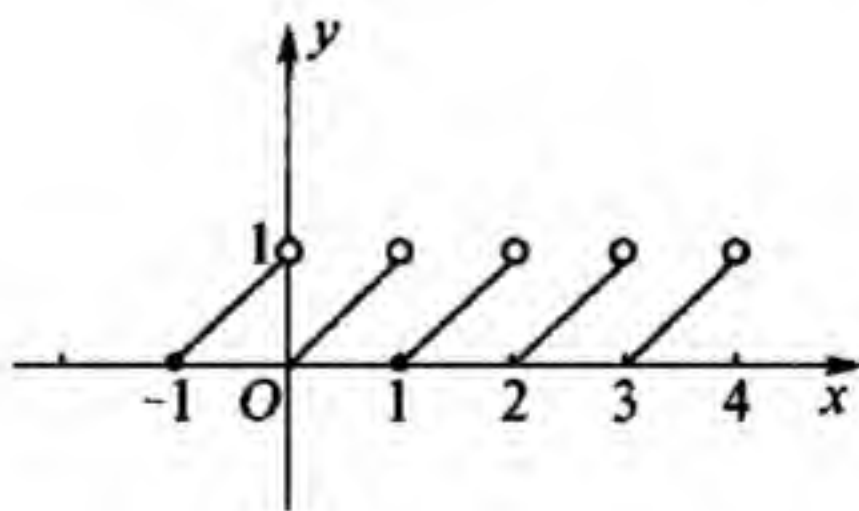
解 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为第一类不连续点, 如 701 题图所示.



701 题图

【702】 $y = x - [x].$

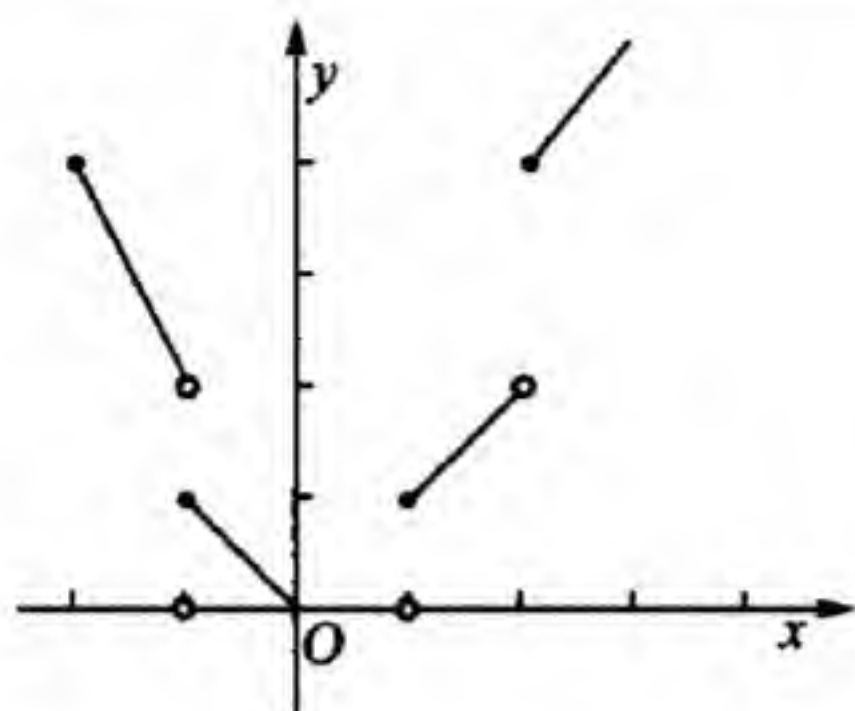
解 $x = k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为第一类不连续点, 如 702 题图所示.



702 题图

【703】 $y = x[x].$

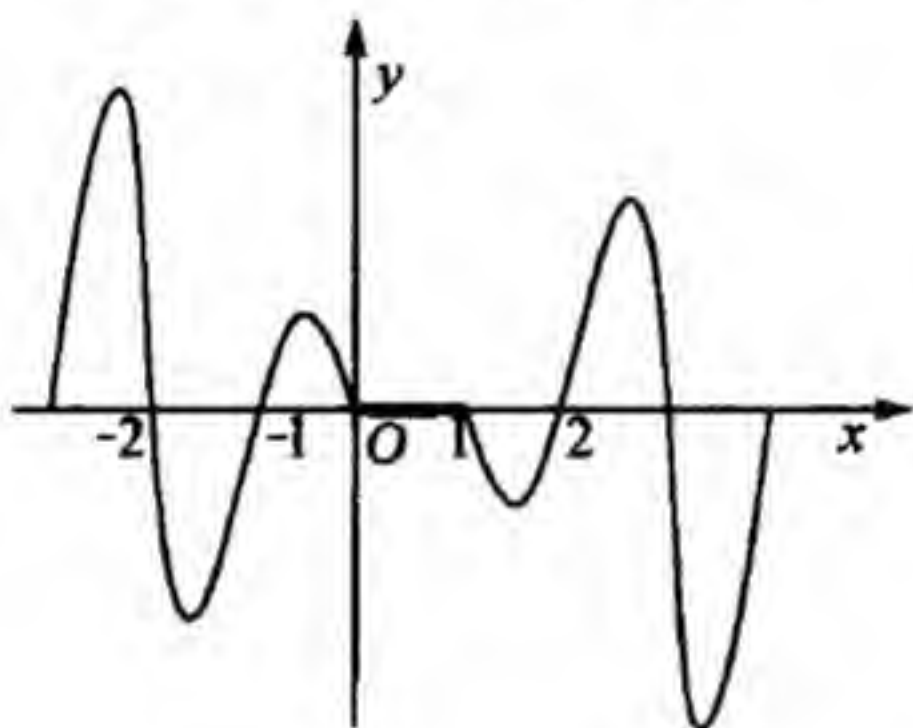
解 $x = k (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为第一类不连续点, 如 703 题图所示.



703 题图

【704】 $y = [x] \sin \pi x$.

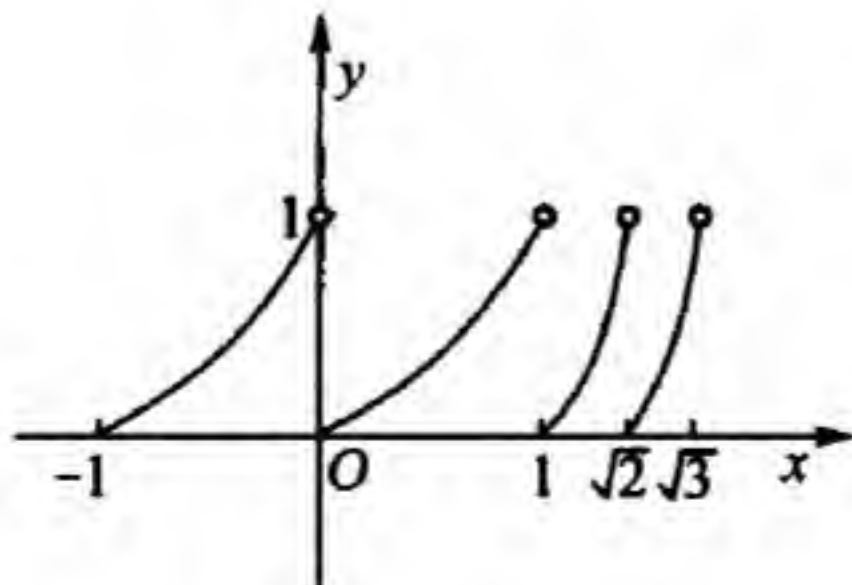
解 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处连续, 如 704 题图所示.



704 题图

【705】 $y = x^2 - [x^2]$.

解 $x = \pm\sqrt{k} (k = 1, 2, \dots)$ 为第一类不连续点, 如 705 题图所示.



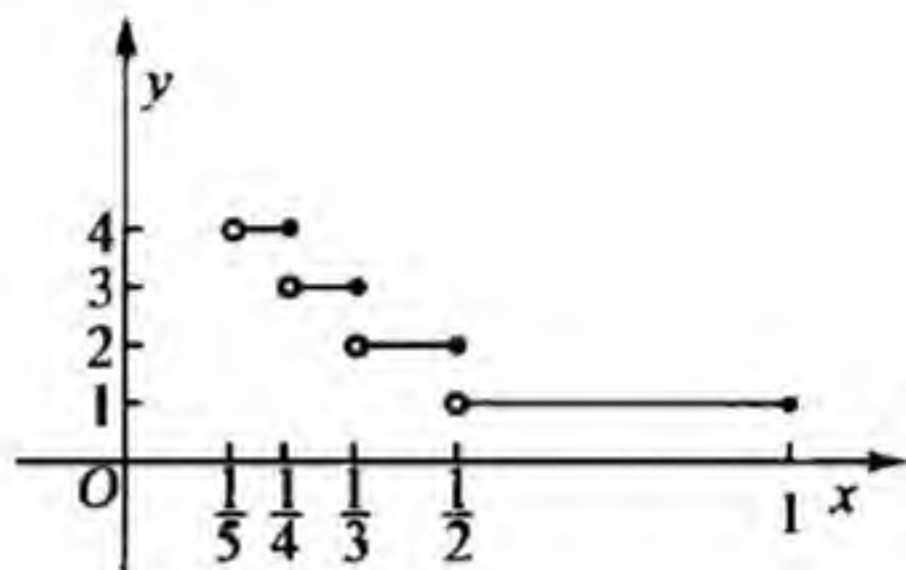
705 题图

【706】 $x = \left[\frac{1}{x} \right]$.

解 $x = 0$ 为无穷型不连续点.

$$x = \frac{1}{k} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

为第一类不连续点, 如 706 题图所示 (图中仅画了 $x > 0$ 的部分, 且在图形中两轴比例不一致).



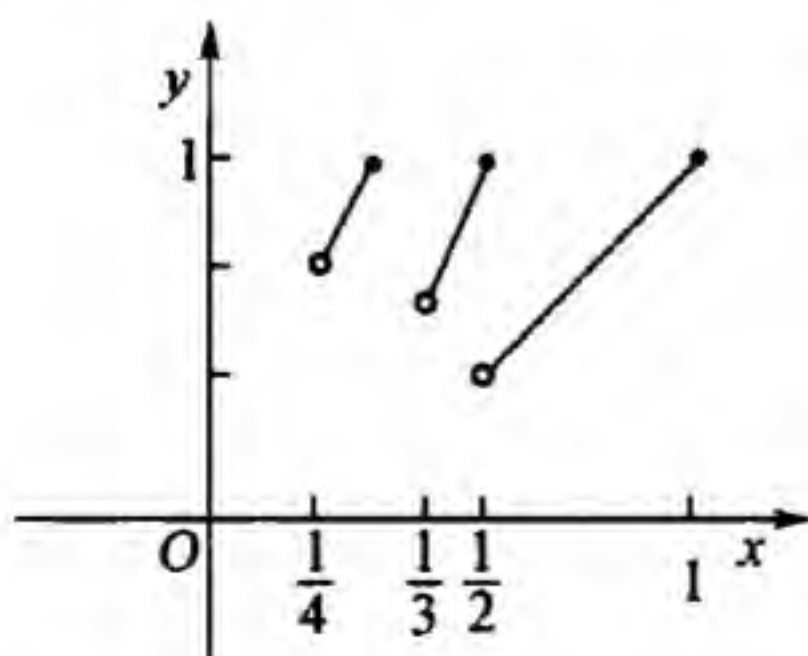
706 题图

【707】 $y = x \left[\frac{1}{x} \right]$.

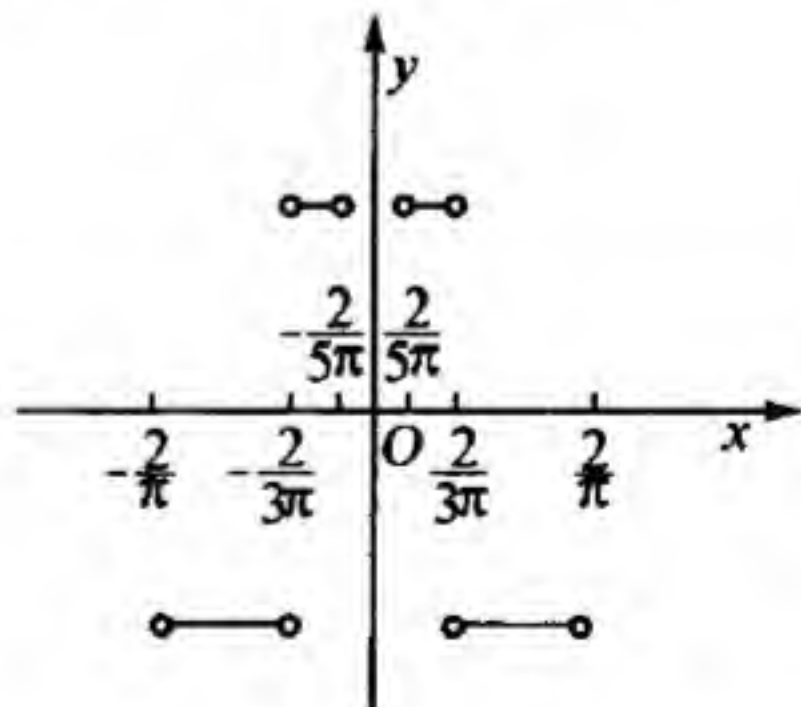
解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$, 所以 $x = 0$ 为可去的不连续点.

$$x = \frac{1}{k} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

为第一类不连续点, 707 题图仅画了 $x > 0$ 的部分.



707 题图



708 题图

【708】 $y = \operatorname{sgn}\left(\cos \frac{1}{x}\right).$

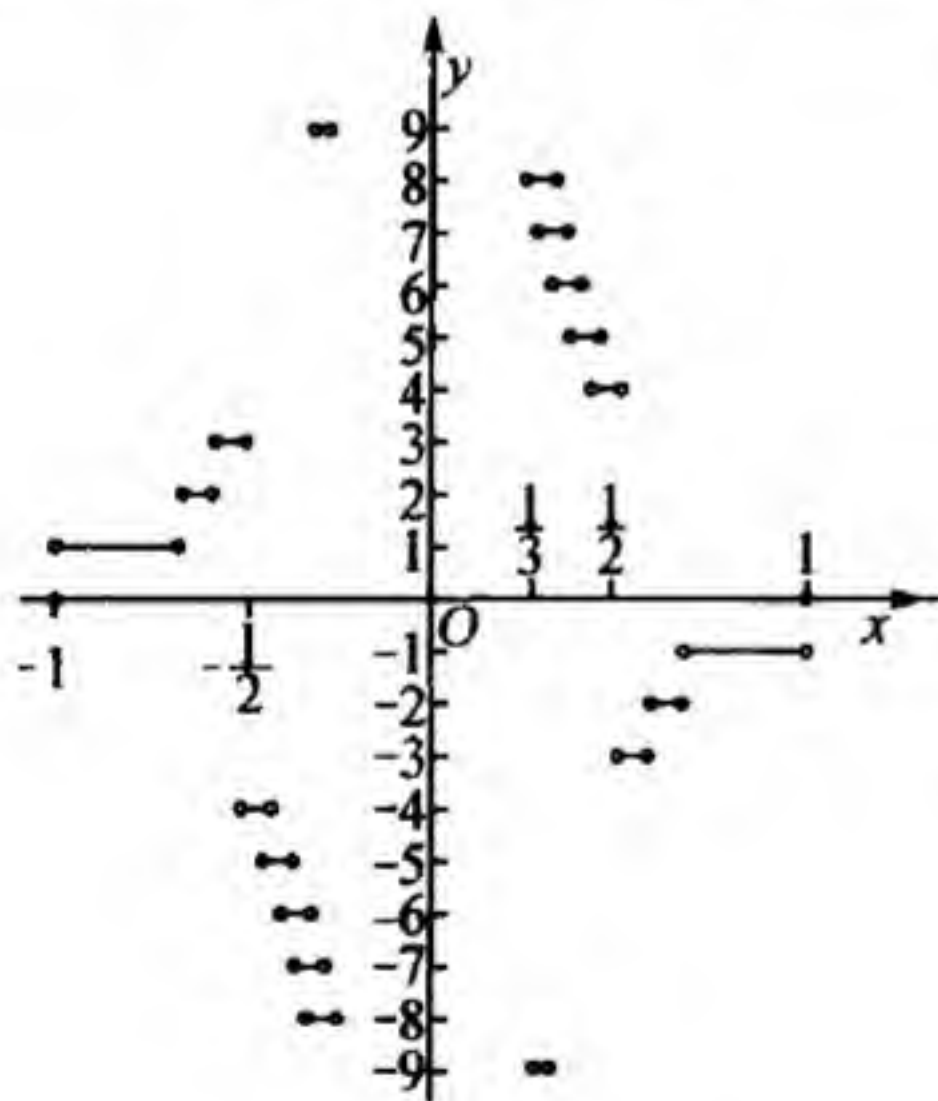
解 $x = 0$ 为第二类不连续点,

$$x = \frac{2}{(2k+1)\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

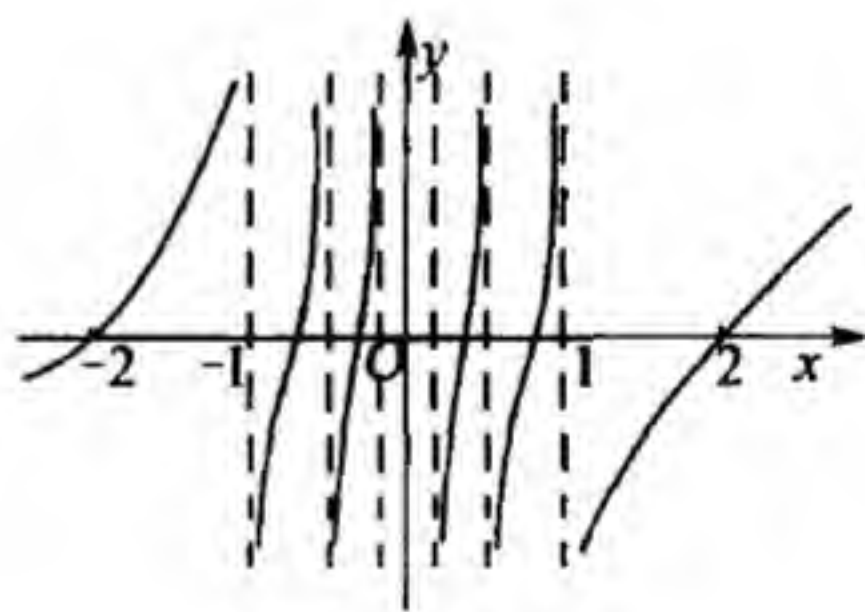
为第一类不连续点. 图形关于 Oy 轴对称. 如 708 题图所示(图中仅画了 $k = 0, \pm 1, \pm 2, -3$ 时的情形).

【709】 $y = \left[\frac{1}{x^2}\right] \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right).$

解 $x = 0$ 为第二类不连续点, $x = \pm \frac{1}{k}$ 及 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{k}} (k = 1, 2, \dots)$ 为第一类不连续点, 如 709 题图所示(图中两轴单位不同).



709 题图



710 题图

【710】 $y = \cot \frac{\pi}{x}.$

解 $x = \frac{1}{k} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为无穷型不连续点. $x = 0$ 为

第二类不连续点, 图形关于原点对称, 如 710 题图.

【711】 $y = \sec^2 \frac{1}{x}$.

解 $x = \frac{2}{(2k+1)\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$

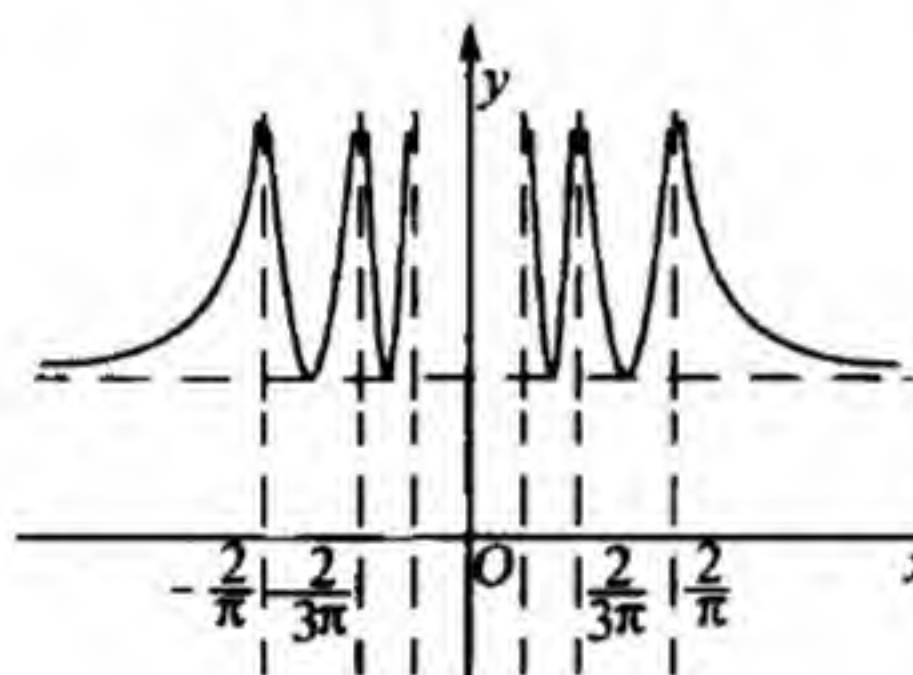
为无穷型不连续点. $x = 0$ 为第二类不连续点. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 1$. 图形关于 Oy 轴对称.

【712】 $y = (-1)^{[x^2]}.$

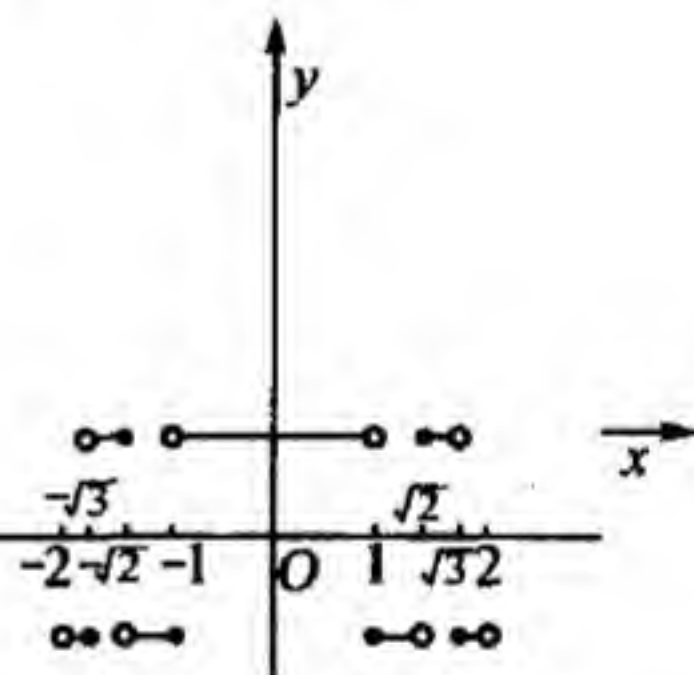
解 因为

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{n}-0} y = (-1)^{n-1}, \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{n}+0} y = (-1)^n,$$

$x = \pm\sqrt{n} (n = 1, 2, \dots)$ 为第一类不连续点.



711 题图



712 题图

【713】 $y = \arctan\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right).$

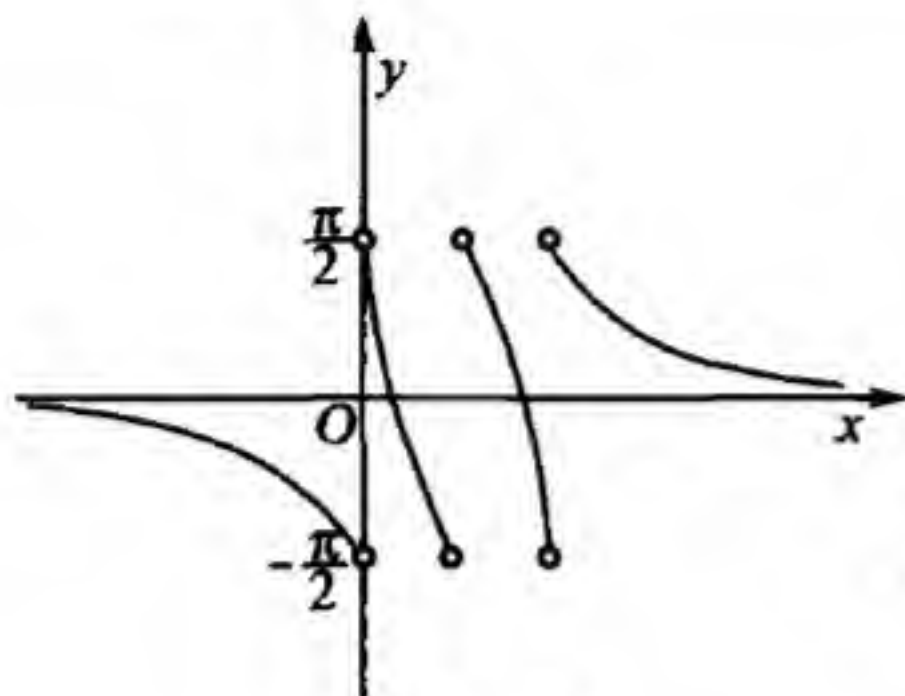
解 $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 2-0} y = -\frac{\pi}{2},$

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 2+0} y = \frac{\pi}{2},$$

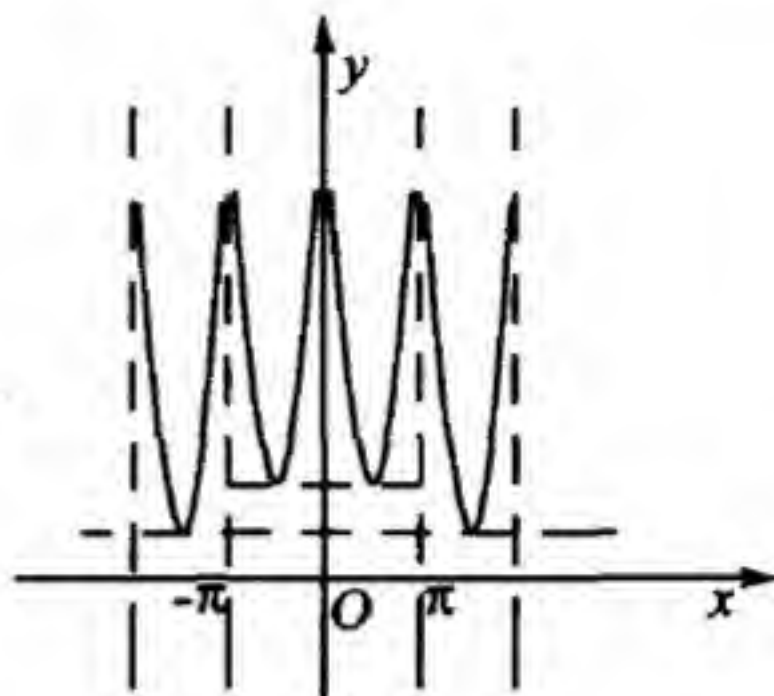
$x = 0, x = 1$ 及 $x = 2$ 为第一类不连续点, $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, 如 713 题图所示.

【714】 $y = \frac{1}{x^3 \sin^2 x}.$

解 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为无穷型不连续点. 图形关于 Oy 轴对称. 如 714 题图.



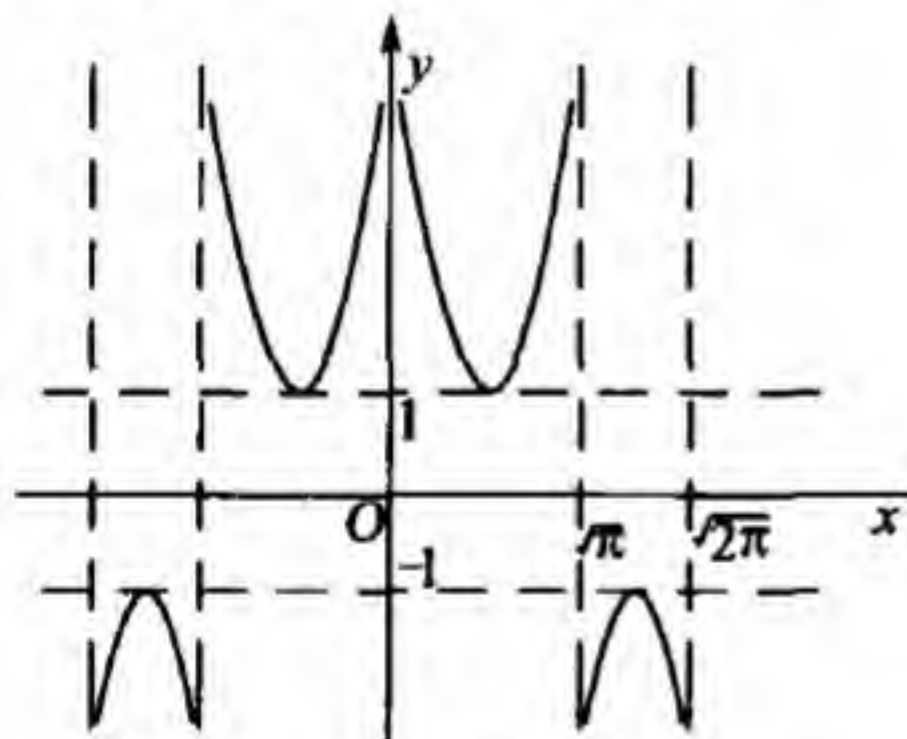
713 题图



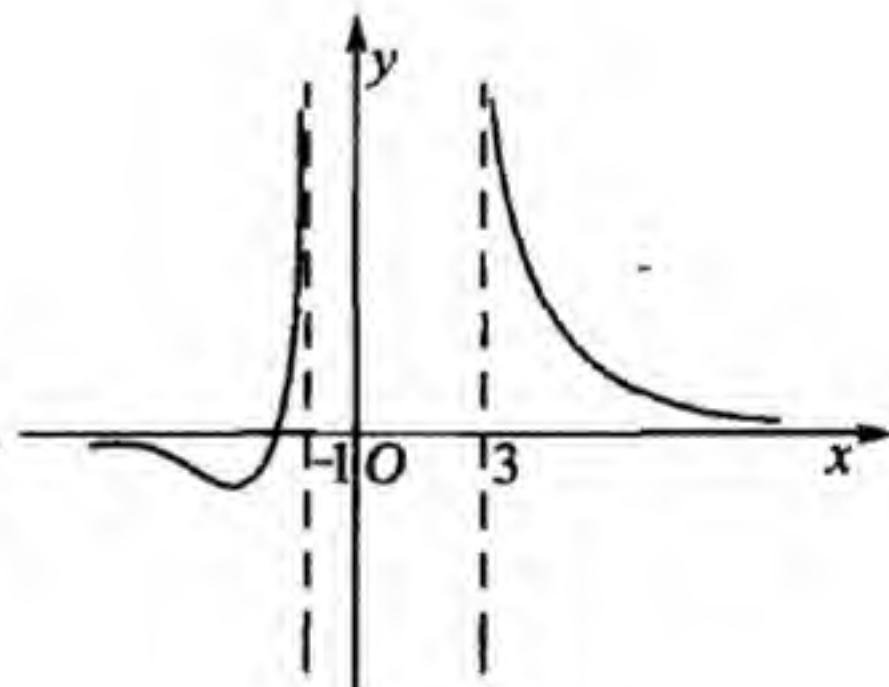
714 题图

【715】 $y = \frac{1}{\sin(x^2)}.$

解 $x = \pm \sqrt{k\pi} (k = 0, 1, 2, \dots)$ 为无穷型不连续点. 图形关于 Oy 轴对称. 如 715 题图.



715 题图



716 题图

【716】 $y = \ln \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}.$

解 定义域为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, $x = -1$ 和 $x = 3$ 为无穷型不连续点.

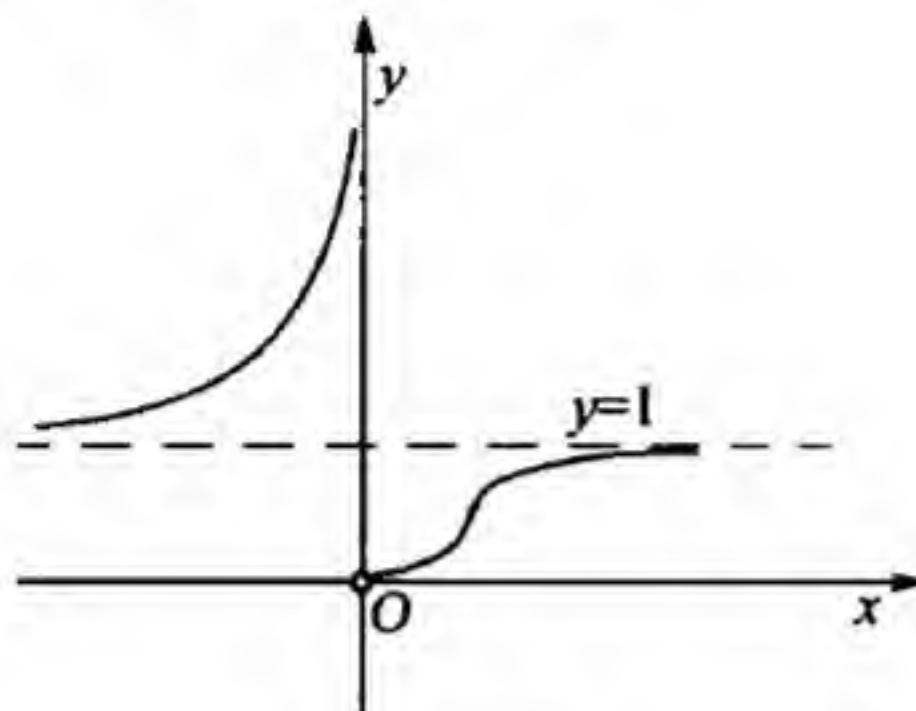
当 $x < -\frac{3}{2}$ 时, $0 < \frac{x^2}{x^2 - 2x - 3} < 1$, 故

$$\ln \frac{x^2}{(x+1)(x-3)} < 0;$$

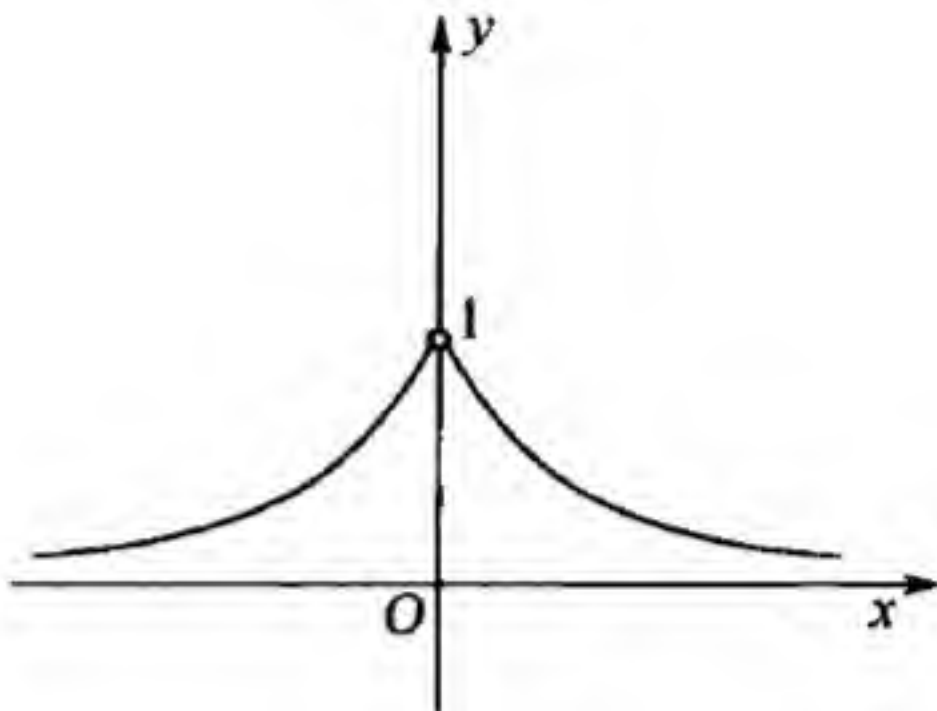
当 $x > \frac{3}{2}$ 时, $\frac{x^2}{x^2 - 2x - 3} > 1$, 故

$$\ln \frac{x^2}{(x+1)(x-3)} > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2}{(x+1)(x-3)} = 0$$

如 716 题图所示.



717 题图



718 题图

【717】 $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow +0} e^{-\frac{1}{x}} = 0, \lim_{x \rightarrow -0} e^{-\frac{1}{x}} = \infty, x = 0$ 为第二类不连续点.

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$, 如 717 题图所示.

【718】 $y = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$, 故 $x = 0$ 为可去的不连续点. 图形关于 Oy 轴对称. 如 718 题图所示.

【719】 $y = \operatorname{th} \frac{2x}{1-x^2}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow -1-0} y = 1,$
 $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow -1+0} y = -1,$

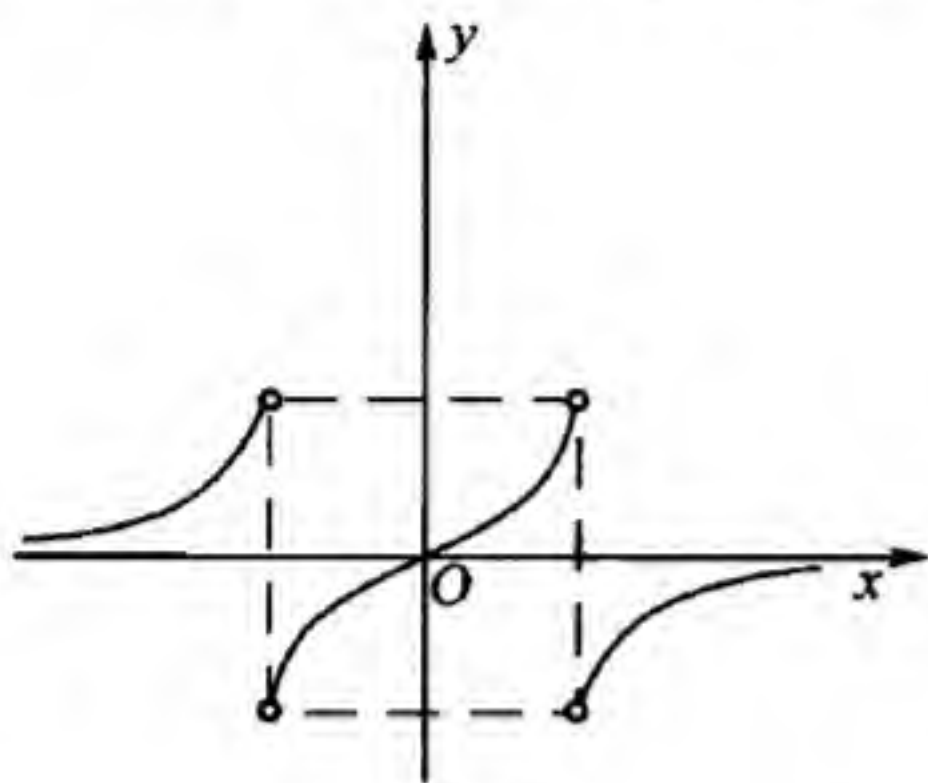
$x = \pm 1$ 为第一类不连续点. 图形关于原点对称, 如 719 题图所示.

研究下列函数的连续性, 并作出其图形(720 ~ 728).

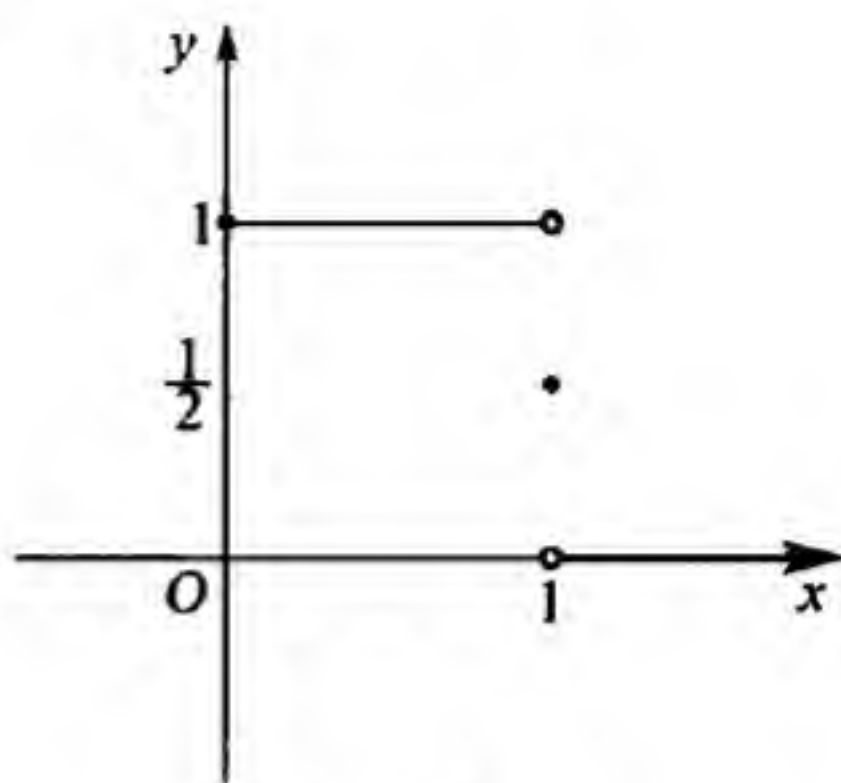
【720】 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} (x \geq 0).$

解 $y = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \leq x < 1 \text{ 时,} \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } x = 1 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x > 1 \text{ 时,} \end{cases}$

$x = 1$ 为第一类不连续点, 如 720 题图所示.



719 题图



720 题图

【721】 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}.$

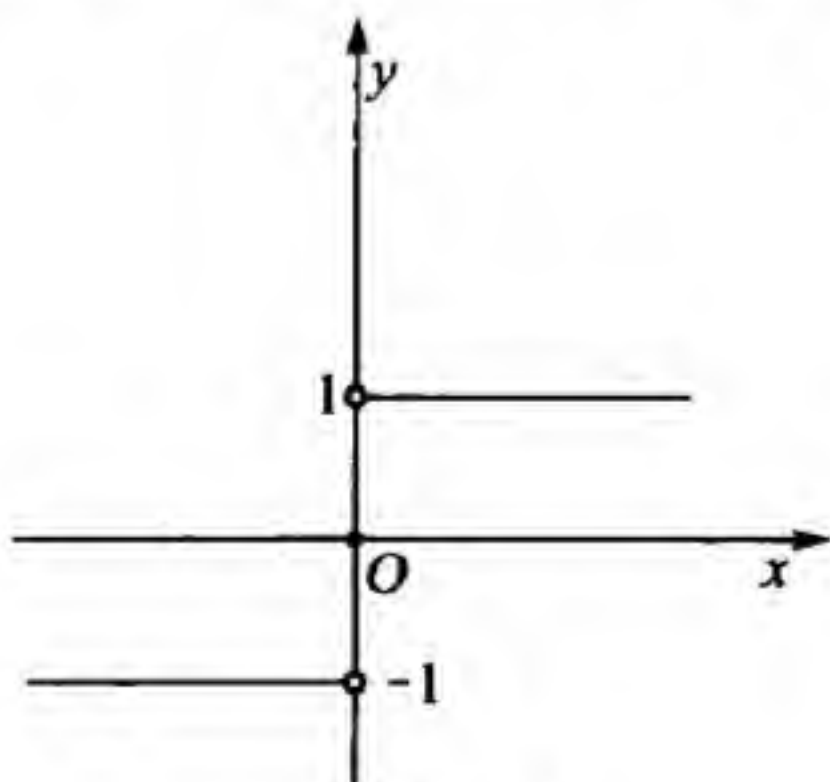
解 $y = \begin{cases} 1, & \text{若 } x > 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0, \\ -1, & \text{若 } x < 0, \end{cases}$

$x = 0$ 为第一类不连续点. 如 721 题图所示.

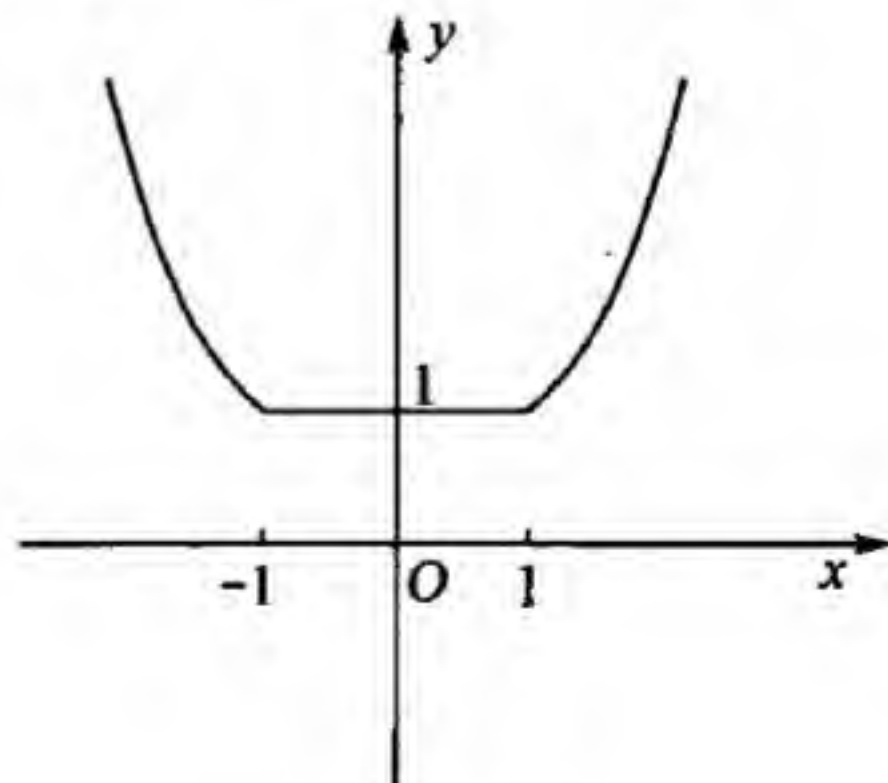
【722】 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}.$

解 $y = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时,} \\ x^2, & \text{当 } |x| > 1 \text{ 时,} \end{cases}$

函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续. 如 722 题图所示.



721 题图



722 题图

【723】 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x.$

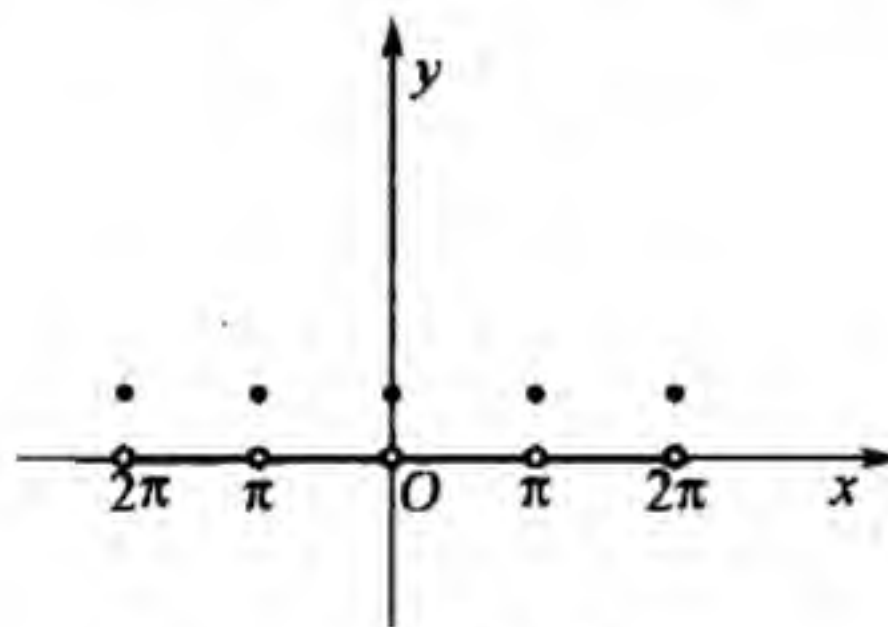
解 $y = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = k\pi \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x \neq k\pi \text{ 时,} \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$

$x = k\pi$ 为第一类不连续点, 如 723 题图所示.

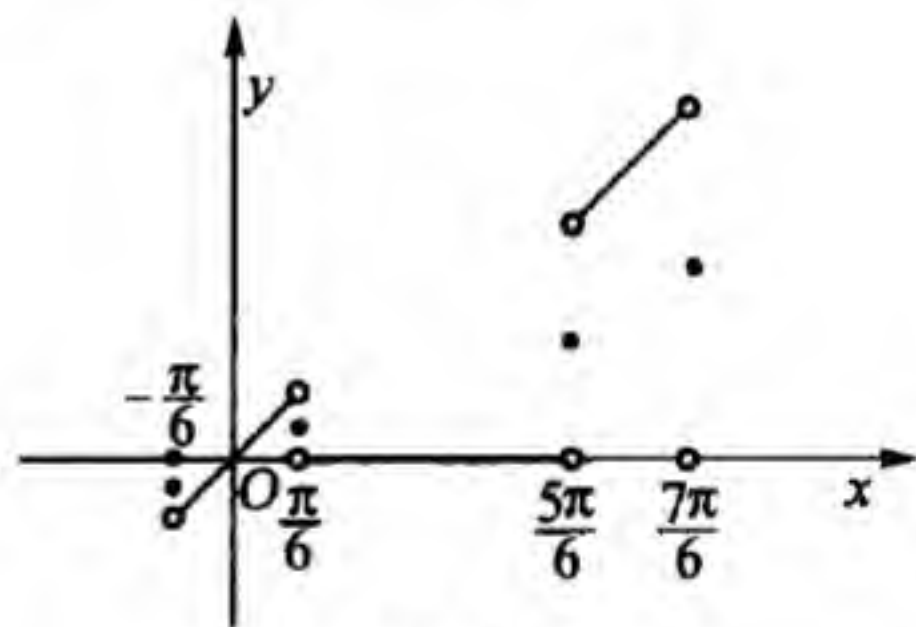
【724】 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2\sin x)^{2n}}.$

解 $y = \begin{cases} x, & \text{当 } |x - k\pi| < \frac{\pi}{6} \text{ 时,} \\ \frac{x}{2}, & \text{当 } x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } \frac{\pi}{6} < |x - k\pi| < \frac{5\pi}{6} \text{ 时,} \end{cases}$
 $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 为第一类不连续点, 如 724 题图所示.



723 题图

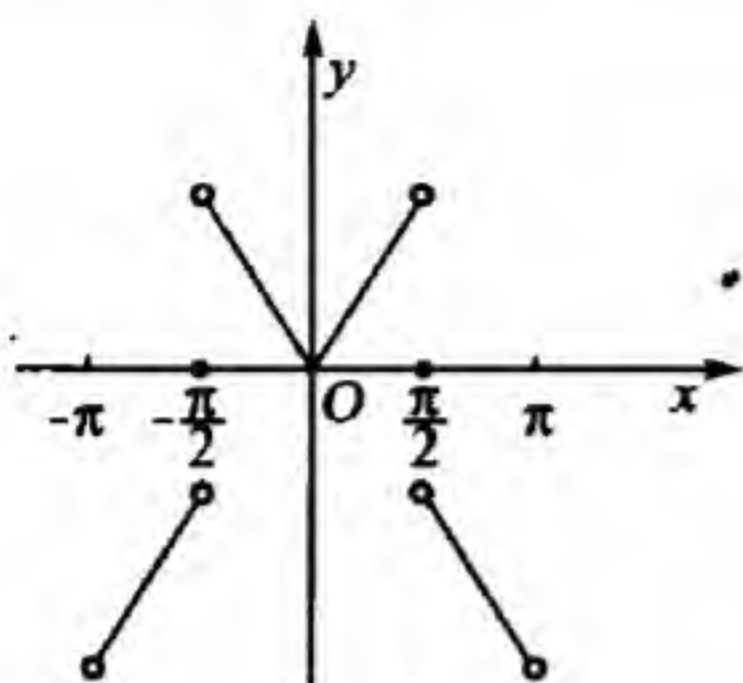


724 题图

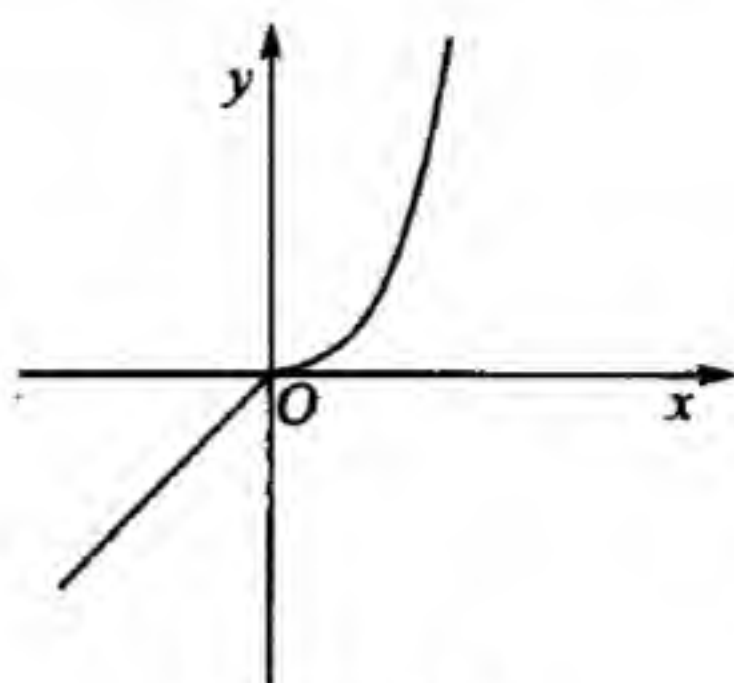
【725】 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} [x \arctan(n \cot x)].$

解 $y = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x, & \text{当 } k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2}x, & \text{当 } k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi, \\ 0, & \text{当 } x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \end{cases}$
 $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$

$x = \frac{k\pi}{2} (k \neq 0)$ 为第一类不连续点. 如 725 题图所示.



725 题图



726 题图

【726】 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$.

解 $y = \begin{cases} x, & \text{当 } x \leq 0 \text{ 时,} \\ x^2, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \end{cases}$

函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 如 726 题图所示.

【727】 $y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{tx})}{\ln(1 + e^t)}$.

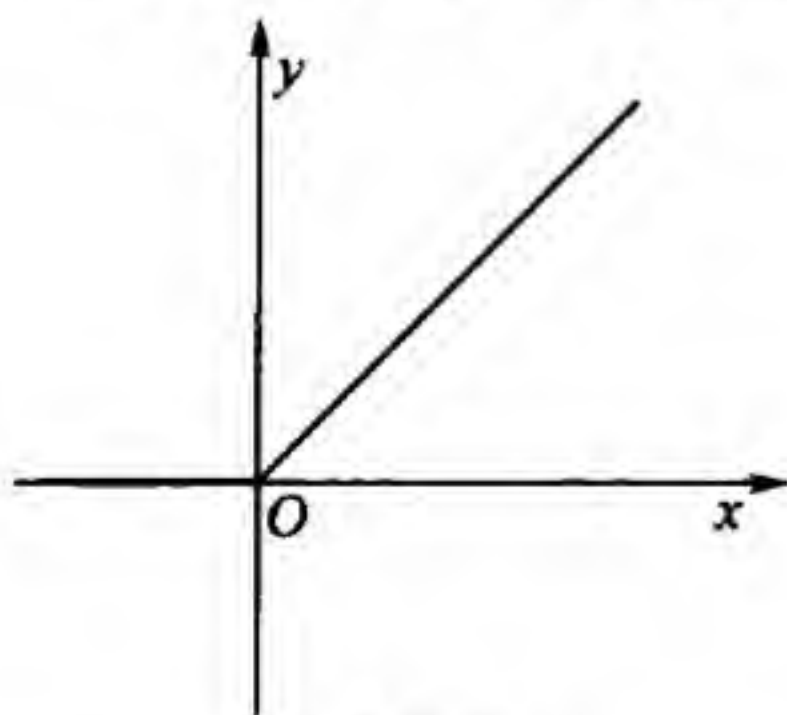
解 $y = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq 0 \text{ 时,} \\ x, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \end{cases}$

函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 如 727 题图所示.

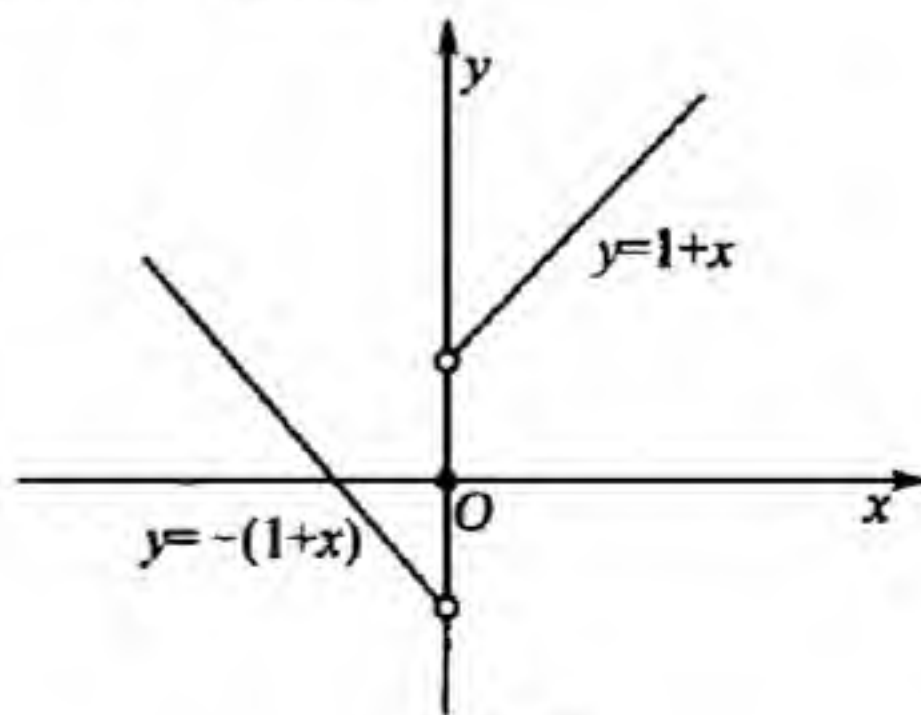
【728】 $y = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1+x) \operatorname{th} tx$.

解 $y = \begin{cases} -(1+x), & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时,} \\ (1+x), & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \end{cases}$

$x = 0$ 为第一类不连续点. 如 728 题图所示.



727 题图



728 题图

【729】 函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & \text{若 } 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

是否连续?

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$

故 $x = 1$ 为第一类不连续点. 在 $[0, 2]$ 上 $f(x)$ 不是连续函数. 如 729 题图所示.

$$\text{【730】 令 } f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{若 } x < 0, \\ a+x, & \text{若 } x \geq 0; \end{cases}$$

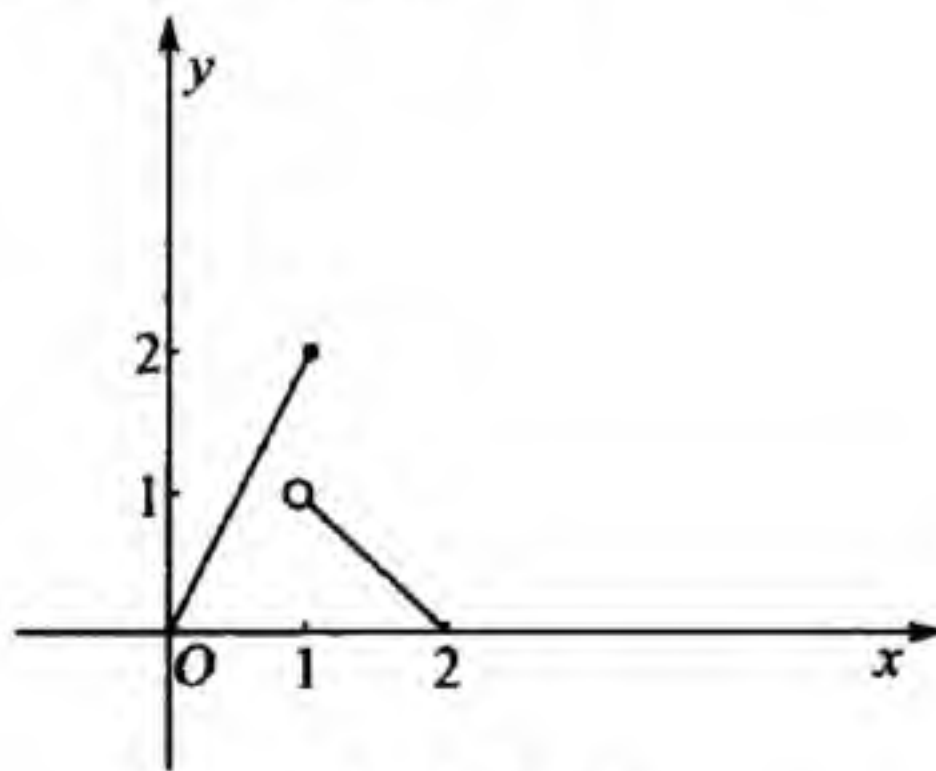
怎样选择数 a , 函数 $f(x)$ 才是连续的?

解 因为

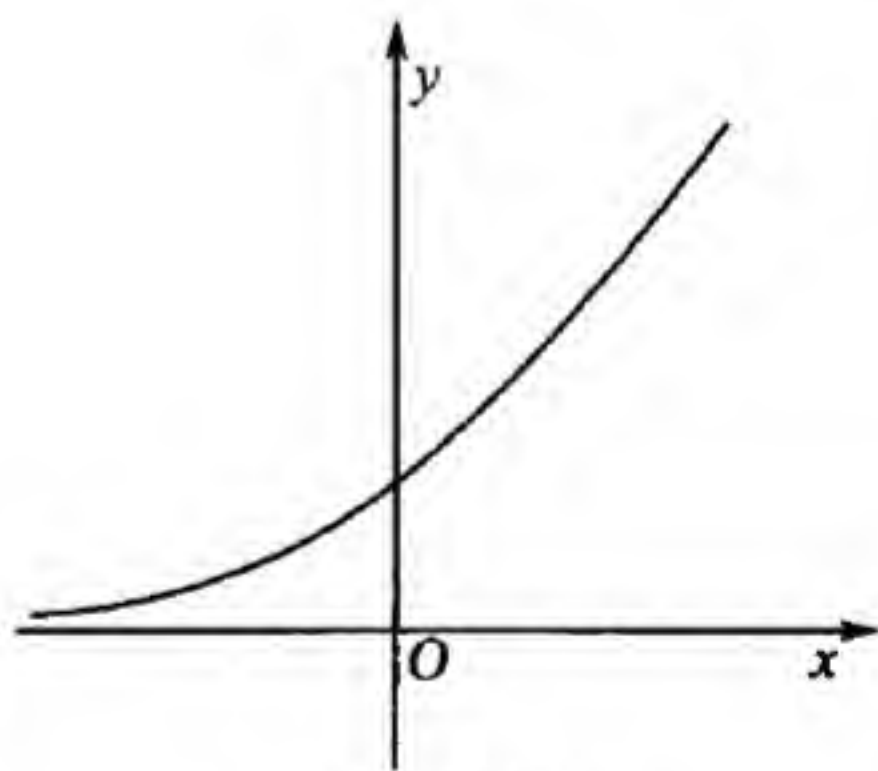
$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (a+x) = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} e^x = 1,$$

而且 $f(0) = a$, 故当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 因而在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续. 如 730 题图所示, 当选取 $a = 1$ 时, $f(x)$ 在整个数轴上连续.



729 题图



730 题图

【731】 研究以下函数的连续性并说明不连续点的性质. 设:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & \text{当 } 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } |x| \leq 1, \\ 1, & \text{当 } |x| > 1; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & \text{当 } |x| \leq 1, \\ |x-1|, & \text{当 } |x| > 1; \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} \cot^2 \pi x, & \text{当 } x \text{ 为非整数}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为整数}; \end{cases}$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{当 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

解 (1) 当 $x \neq 1$ 时, $f(x)$ 显然连续而

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1 = f(1),$$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续. 因而 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上为连续函数.

(2) $x=-1$ 为第一类不连续点.

$$(3) \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} |x-1| = 2,$$

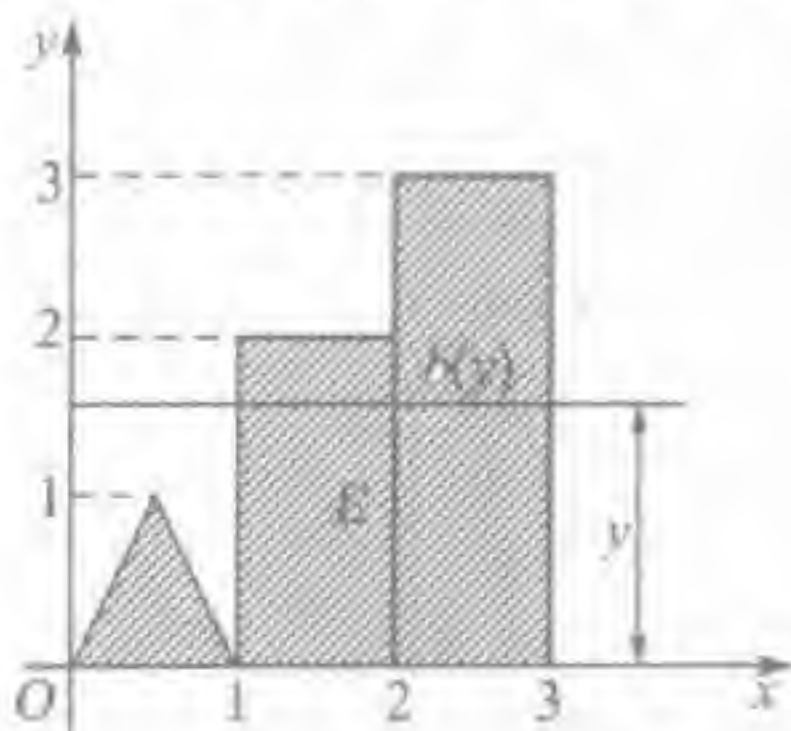
$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \cos \frac{\pi x}{2} = 0,$$

故 $x=-1$ 为第一类不连续点.

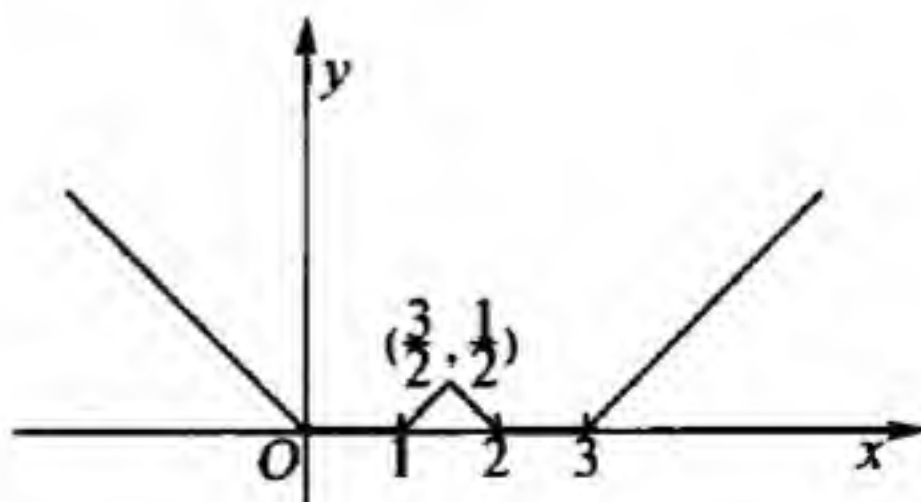
(4) $x=k(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为无穷型不连续点.

(5) $x \neq k(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为第二类不连续点.

【732】 函数 $d = d(x)$ 是数轴 Ox 上点 x 与由线段 $0 \leq x \leq 1$ 及 $2 \leq x \leq 3$ 所构成的点集之间的最短距离. 求函数 d 的解析表达式, 作出它的图形, 并研究其连续性.



733 题图



732 题图

$$\text{解 } d(x) = \begin{cases} -x, & -\infty < x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ x-1, & 1 < x \leq \frac{3}{2}, \\ 2-x, & \frac{3}{2} < x < 2, \\ 0, & 2 \leq x \leq 3, \\ x-3, & 3 < x < +\infty. \end{cases}$$

$d(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 如 732 题图所示.

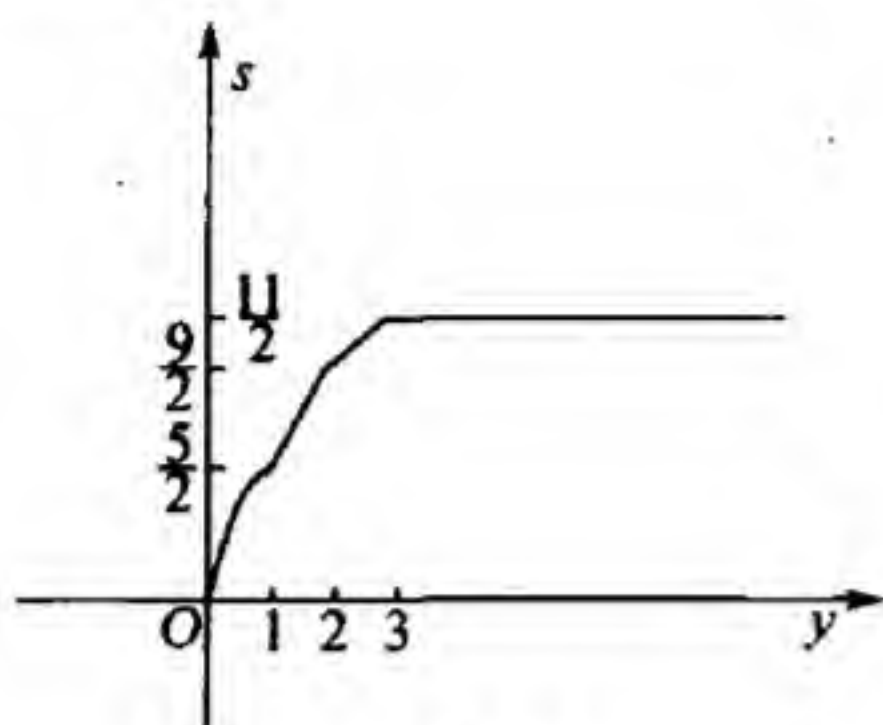
【733】 图形 E 是由底为 1, 高为 1 的等腰三角形和两个底均为 1, 高分别为 2 和 3 的矩形所构成的 (733 题图), 函数 $S = S(y)$ ($0 \leq y < +\infty$) 是图形 E 由平行线 $Y = 0$ 和 $Y = y$ 所界定的那部分面积, 而函数 $b = b(y)$ ($0 \leq y < +\infty$) 是用平行线 $Y = y$ 去截图形 E 的截线长度. 求出函数 S 和 b 的解析表达式, 绘制它们的图形, 并研究其连续性.

$$\text{解 } S(y) = \begin{cases} 3y - \frac{y^2}{2}, & \text{当 } 0 \leq y \leq 1 \text{ 时,} \\ \frac{1}{2} + 2y, & \text{当 } 1 < y \leq 2 \text{ 时,} \\ \frac{5}{2} + y, & \text{当 } 2 < y \leq 3 \text{ 时,} \\ \frac{11}{2}, & \text{当 } 3 < y < +\infty \text{ 时.} \end{cases}$$

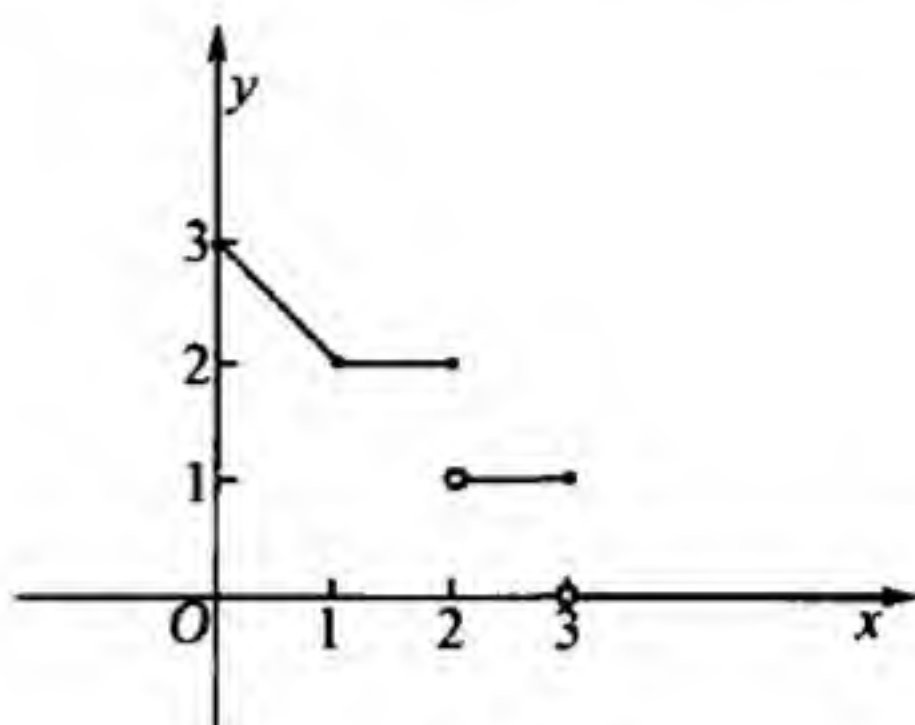
$S(y)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续, 如 733 题图 1 所示.

$$b(y) = \begin{cases} 3-y, & \text{当 } 0 \leq y \leq 1 \text{ 时,} \\ 2, & \text{当 } 1 < y \leq 2 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } 2 < y \leq 3 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } 3 < y < +\infty \text{ 时.} \end{cases}$$

$y = 2$ 及 $y = 3$ 为第一类不连续点. 如 733 题图 2 所示.



733 题图 1



733 题图 2

【734】 证明:狄利克雷函数

$$\chi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \{ \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x) \},$$

对任意的 x 都是不连续的.

证 设

$$f(m, n) = \cos^n(\pi m! x),$$

当 x 为有理数时, 设 $x = \frac{q}{p}$ (p, q 为互质的整数, 且 $p > 0$), 则

当 $m > p$ 时, $f(m, n) = 1$ 故 $\chi(x) = 1$.

当 x 为无理数时, 则对任一固定的 m 而言, $|\cos(\pi m! x)| < 1$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x) = 0,$$

故 $\chi(x) = 0$,

总之 $\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$

由实数的稠密性可知, 对于任意值 x_0 存在无理数列 $\{x_n\}$ 及有理数列 $\{r_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x_0$.

而 $\chi(x_n) = 0, \chi(r_n) = 1$,

因此 $\lim_{x \rightarrow x_0} \chi(x)$ 不存在,

即在任意点 $x, \chi(x)$ 都是不连续的.

【735】 研究函数 $f(x) = x\chi(x)$ 的连续性, 其中 $\chi(x)$ 为狄

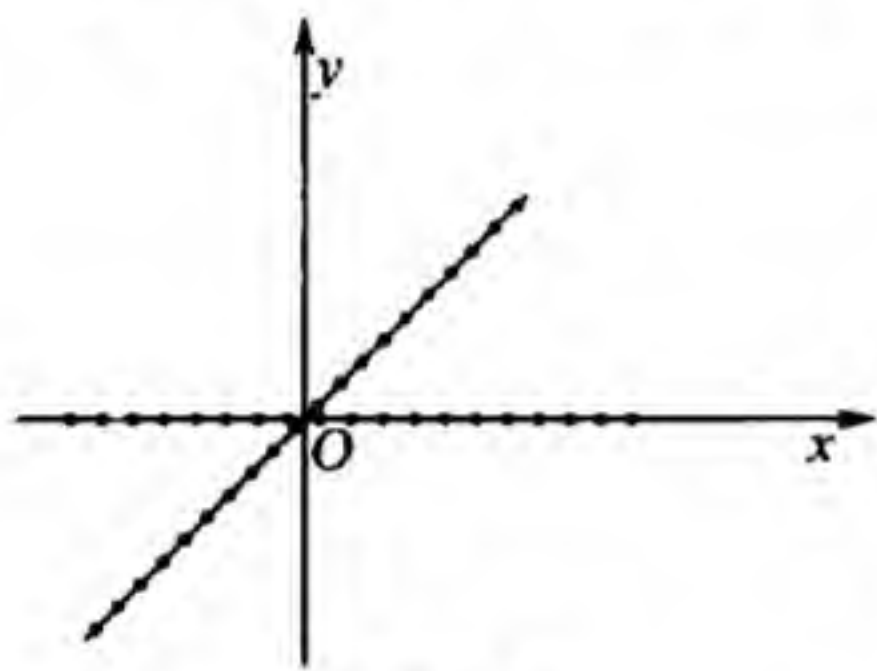
里克雷函数(参阅前题),作出此函数的略图.

$$\text{解 } x\chi(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

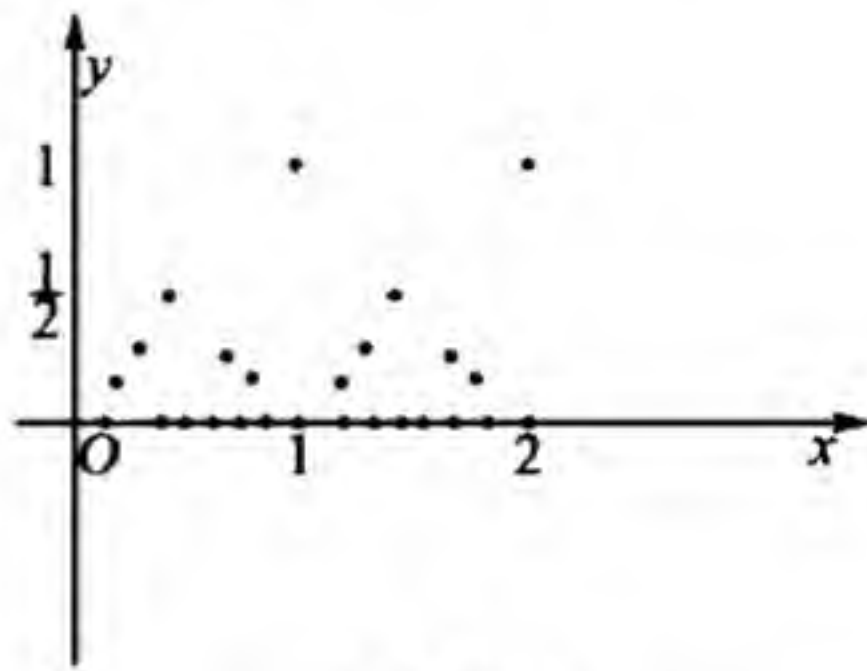
当 $x_0 \neq 0$ 时,如果 x 取有理数趋近于 x_0 时 $x\chi(x)$ 的极限为 x_0 ,如 x 取无理数趋近于 x_0 时 $x\chi(x)$ 的极限为 0,所以 $x\chi(x)$ 在点 $x_0 \neq 0$ 处不连续. 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} x\chi(x) = 0,$$

故 $x\chi(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 如 735 题图所示.



735 题图



736 题图

【736】 证明:黎曼函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{若 } x = \frac{m}{n}, \text{ 其中 } m \text{ 和 } n \text{ 为互素整数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

当 x 取任一个有理值时是不连续的,当 x 取任一个无理值时是连续的,作出此函数的略图.

证 不失一般,我们仅讨论区间 $[0, 1]$, 设 $x_0 \in [0, 1]$, 对于任给的 $\epsilon > 0$, 满足不等式 $n < \frac{1}{\epsilon}$ 的自然数 n 至多只有有限多个,

即在 $[0, 1]$ 中至多只有有限个有理数 $\frac{m}{n}$, 使得 $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} \geq \epsilon$. 因

而我们可取 $\delta > 0$, 使得在 x_0 的去心邻域 $0 < |x - x_0| < \delta$ 内不含这样的有理数. 因此, 在 $0 < |x - x_0| < \delta$ 内, 不论 x 是否为有理数, 均有 $|f(x)| < \epsilon$. 因此

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0,$$

若 x_0 为无理数, 则 $f(x_0) = 0$, 可见 $f(x)$ 在 x_0 连续. 若 x_0 为有理数, 则 $f(x_0) \neq 0$. $f(x)$ 在 x_0 点有可去间断点.

736 题图为 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的略图.

【737】 研究由以下形式给定的函数 $f(x)$ 的连续性:

若 x 为不可约有理分数 $\frac{m}{n}$ ($n \geq 1$) 时, $f(x) = \frac{nx}{n+1}$; 若 x 为无理数时, $f(x) = |x|$.

并作出这个函数的简略图.

解 当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 显然不连续. 而对于正有理数 $\xi = \frac{m}{n}$,

$f(\xi) = \frac{m}{n+1}$ 取一列无理数列 $\{x_k\}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$,

则 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi = \frac{m}{n} \neq f(\xi) = \frac{m}{n+1}$,

故 $f(x)$ 在正有理数点也不连续.

若 x_0 为正无理数, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 满足 $\frac{1}{n+1} \geq \frac{\varepsilon}{2}$ 的自然数 n 至多只有限多个. 故取 $0 < \delta \leq \min\{\frac{\varepsilon}{2}, x_0\}$, 使得在 x_0 的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内不含有理数 $\frac{m}{n}$, 其中 $\frac{1}{n+1} \geq \frac{\varepsilon}{2}$, 即若 $x = \frac{q}{p} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (p, q 为互质的整数, $p > 0$) 则 $\frac{1}{p+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. 因此, 对于 $|x - x_0| < \delta$ 内任何 x , 若 x 为无理数, 则有

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

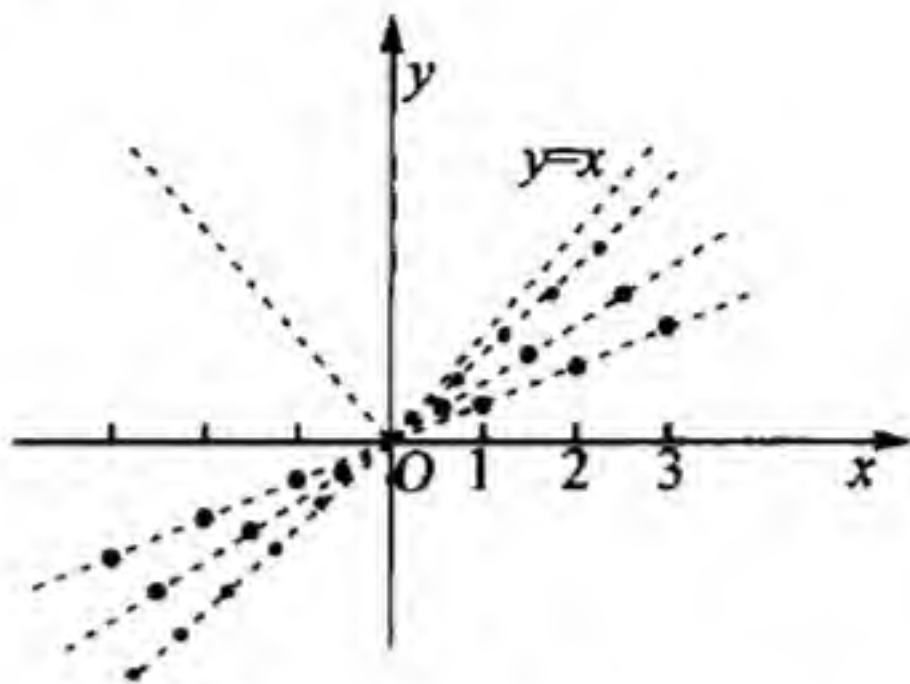
若 x 为有理数, 设 $x = \frac{q}{p}$, 则有

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \frac{q}{p+1} - x_0 \right| \\ &\leq \left| \frac{q}{p+1} - \frac{q}{p} \right| + |x - x_0| \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p+1} + (x - x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 即 $f(x)$ 在正无理数点 x_0 处连续.

如 737 题图所示.



737 题图

【738】 函数

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2},$$

除 $x = 0$ 外, 对于自变数 x 的所有值都有定义, 为了使得此函数在 $x = 0$ 时是连续的, 则在 $x = 0$ 这个点上函数 $f(x)$ 应该补充什么样的值?

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2},$

所以当取 $f(0) = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

【739】 证明: 无论怎样选取数 $f(1)$, 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 在 $x = 1$, 都是不连续的.

证 因为 $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty,$ 所以, $x = 1$ 为无穷型间断点, 无论选取怎样的 $f(1)$, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处均不连续.

【740】 当 $x = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 失去意义, 定义 $f(0)$ 的数值,

使 $f(x)$ 在 $x=0$ 是连续的, 若:

$$(1) f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}; \quad (2) f(x) = \frac{\tan 2x}{x};$$

$$(3) f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}; \quad (4) f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(5) f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad (6) f(x) = x^x \quad (x > 0);$$

$$(7) f(x) = x \ln^2 x.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{3}{2},$$

故定义 $f(0) = \frac{3}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} = 2,$$

故定义 $f(0) = 2$ 即可.

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0, \text{ 取 } f(0) = 0.$$

$$(4) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \text{ 故定义 } f(0) = e.$$

$$(5) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \text{ 故定义 } f(0) = 0.$$

$$(6) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = e^0 = 1, \text{ 故定义 } f(0) = 1.$$

$$(7) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x = 0, \text{ 故定义 } f(0) = 0.$$

【741】 (1) 当 $x = x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 是连续的, 而函数 $g(x)$ 是不连续的; (2) 在 $x = x_0$ 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都不连续, 问这两个函数的和 $f(x) + g(x)$ 在已知点 x_0 是否一定不连续? 举出适当的例子说明.

解 (1) $f(x) + g(x)$ 必不连续.

事实上, 设 $F(x) = f(x) + g(x)$, 若 $F(x)$ 在 x_0 连续, 则由

$f(x)$ 在 x_0 的连续性有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (F(x) - f(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ &= F(x_0) - f(x_0) = g(x_0),\end{aligned}$$

这与假设矛盾. 因此, $F(x)$ 在 x_0 必不连续.

(2) 不一定. 例如

$$\begin{aligned}f_1(x) &= \begin{cases} 1, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases} \\ g_1(x) &= \begin{cases} -1, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases}\end{aligned}$$

显然 $f_1(x), g_1(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 但其和 $f_1(x) + g_1(x) = 0$ 却处处连续. 又如

$$\begin{aligned}f_2(x) &= \begin{cases} x+1, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ x_2, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases} \\ g_2(x) &= \begin{cases} 2, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases}\end{aligned}$$

显然 $f_2(x), g_2(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 其和 $f_2(x) + g_2(x)$ 也在 $x=0$ 处不连续.

【742】 设: (1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 上是连续的, 而函数 $g(x)$ 在点 x_0 上是不连续的; (2) 在 $x = x_0$ 时, 两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都不连续, 问这两个函数的积 $f(x)g(x)$ 在已知点 x_0 是否一定不连续? 举出适当的例子说明.

解 (1) 不, 例如

$$f(x) = 0, g(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

$f(x)$ 处处连续, $g(x)$ 在点 $x=0$ 不连续, 但 $f(x) \cdot g(x) = 0$ 处处连续.

(2) 不, 例如

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -(x+1), & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

它们均在 $x=0$ 处不连续, 但 $f(x) \cdot g(x) = (x+1)^2$ 却处处连续.

【743】 能否断定不连续函数的平方也是不连续函数? 举出处处不连续的函数而它的平方是连续函数的例子.

解 不能, 例如

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } x \text{ 为无理数时,} \\ 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时.} \end{cases}$$

$f(x)$ 处处不连续, 但 $f^2(x) = 1$ 却处处连续.

【744】 研究函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$ 的连续性, 若:

- (1) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 和 $g(x) = 1 + x^2$;
- (2) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 和 $g(x) = x(1 - x^2)$;
- (3) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 和 $g(x) = 1 + x - [x]$.

解 (1) $f[g(x)] \equiv 1$ 处处连续.

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } x = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

$x=0$ 为 $g[f(x)]$ 的可去间断点.

(2) 当 $x=0, \pm 1$ 时, $g(x)=0$,

当 $x < -1$ 或 $0 < x < 1$ 时, $g(x) > 0$,

当 $x > 1$ 或 $-1 < x < 0$ 时, $g(x) < 0$,

故

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & \text{当 } x < -1 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x = -1 \text{ 时,} \\ -1, & \text{当 } -1 < x < 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x = 1 \text{ 时,} \\ -1, & \text{当 } x > 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

在 $x = -1, 0, 1$, 处不连续.

而

$g[f(x)] = 0$ 处处连续.

(3) $f[g(x)] = 1$, 处处连续
 $g[f(x)] = 1$ 也处处连续.

【745】 如果

$$f(u) = \begin{cases} u, & \text{当 } 0 < u \leq 1 \text{ 时,} \\ 2-u, & \text{当 } 1 < u < 2 \text{ 时;} \end{cases}$$

且

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 2-x, & \text{当 } x \text{ 为无理数;} \end{cases} \quad (0 < x < 1)$$

研究复合函数 $y = f(u)$ 的连续性, 式中 $u = \varphi(x)$.

解 当 $x(0 < x < 1)$ 为有理数时, $u = \varphi(x) = x$,

则 $0 < u < 1$,

故 $f(u) = x$.

当 x 为无理数时, $u = 2-x$

则 $1 < u < 2$,

故 $f(u) = 2-u = x$.

从而 $f[\varphi(x)] \equiv x$ 处处连续.

【746】 证明: 若 $f(x)$ 为连续函数, 则函数 $F(x) = |f(x)|$ 也是连续的.

证 设 x_0 为 $f(x)$ 的连续点, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

由于 $|F(x) - F(x_0)| = ||f(x)| - |f(x_0)||$
 $\leq |f(x) - f(x_0)|,$

从而 $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$,

故 $F(x)$ 在 x_0 处连续.

【747】 证明: 若函数 $f(x)$ 是连续的, 则函数

$$f_C(x) = \begin{cases} -C, & \text{若 } f(x) < -C; \\ f(x), & \text{若 } |f(x)| \leq C; \\ C, & \text{若 } f(x) > C. \end{cases}$$

(式中 C 为任意正数), 也是连续函数.

证 容易验证

$$f_c(x) = \frac{1}{2} (|C + f(x)| - |C - f(x)|).$$

而 $C + f(x)$ 及 $C - f(x)$ 均为连续函数.

由 746 题结果知 $f_c(x)$ 是连续函数.

【748】 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内是连续的, 则函数 $m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$ 和 $M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$ 在 $[a, b]$ 上也是连续的.

证 我们只证 $M(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. $m(x)$ 的连续性之证明完全类似.

设 $x_0 \in [a, b]$. 先证 $M(x)$ 在点 x_0 右连续. 任给 $\varepsilon > 0$, 由于 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 故存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

$$\text{恒有 } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

于是, 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 有

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \leq M(x_0) + \varepsilon,$$

而当 $a \leq x \leq x_0$ 时,

$$f(x) \leq M(x_0) < M(x_0) + \varepsilon.$$

由此可知当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时,

$$M(x) \leq M(x_0) + \varepsilon,$$

又因 $M(x)$ 是递增的, 故

$$M(x_0) \leq M(x) \leq M(x_0) + \varepsilon \quad (x_0 < x < x_0 + \delta),$$

因此 $\lim_{x \rightarrow x_0+0} M(x) = M(x_0)$.

即 $M(x)$ 在 x_0 右连续.

下证 $M(x)$ 的左连续性. 不妨设 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$ 的最大值在点 x_0 达到, 即 $M(x_0) = f(x_0)$ (否则, 若 $M(x_0) = f(x_1)$, $a \leq x_1 < x_0$, 则显然知, 当 $x_1 < x < x_0$ 时, $M(x) \equiv M(x_0)$, 从而 $M(x)$ 在 x_0 左连续.) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 恒有 $f(x) > f(x_0) - \varepsilon = M(x_0) - \varepsilon$.

因此 $M(x) > M(x_0) - \varepsilon$.

从而 $M(x_0) > M(x) > M(x_0) - \varepsilon$,

即 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} M(x) = M(x_0)$.

即 $M(x)$ 在 x_0 左连续, 证毕.

【749】 证明: 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续的, 则函数

$$\varphi(x) = \min[f(x), g(x)]$$

和 $\psi(x) = \max[f(x), g(x)]$

也是连续的.

证 因为 $f(x), g(x)$ 为连续函数, 所以 $f(x) + g(x), f(x) - g(x)$ 及 $|f(x) - g(x)|$ 均为连续函数. 而

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \{ [f(x) + g(x)] - |f(x) - g(x)| \},$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \{ [f(x) + g(x)] + |f(x) - g(x)| \},$$

所以 $\varphi(x), \psi(x)$ 为连续函数.

【750】 令函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 有定义并有界, 证明函数 $m(x) = \inf_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\}$ 和 $M(x) = \sup_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\}$ 在闭区间 $[a, b]$ 左连续.

证 设 $x_0 \in (a, b]$. 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界. 故 $M(x)$ 为有限值. 任给 $\varepsilon > 0$, 必存在 $\xi_0 \in [a, x_0)$, 使得

$$f(\xi_0) > M(x_0) - \varepsilon.$$

于是, 当 $\xi < x < x_0$ 时, 必有

$$M(x_0) > M(x) > f(\xi_0) > M(x_0) - \varepsilon_0,$$

因此 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} M(x) = M(x_0)$.

即 $M(x)$ 在 x_0 点左连续.

【751】 证明: 如果函数 $f(x)$ 在区间 $a \leq x < +\infty$ 上连续, 且存在有限的 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 则此函数在该区间有界.

证 设 $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 取 $\varepsilon = 1$, 则存在 $R > a$, 使得当 $x > R$ 时, 有 $|f(x) - A| < 1$.

从而 $|f(x)| < |A| + 1$,

又 $f(x)$ 在闭区间 $[a, R]$ 上连续, 因而有界, 即存在 $M_1 > 0$, 使得当 $a \leq x \leq R$ 时, $|f(x)| \leq M_1$.

取 $M = \max\{M_1, |A| + 1\}$,

对当 $x \in [a, +\infty)$ 时, 恒有 $|f(x)| < M$.

【752】 假设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 是连续的并且有界, 证明对于任何一个数 T , 能求得序列 $x_n \rightarrow +\infty$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

证 法一: 不妨设 $T > 0$, 事实上如果存在一无穷序列 $\{x_n\} (x_n \rightarrow +\infty)$ 使得

$$f(x_n + T) - f(x_n) = 0.$$

则结论已成立, 故我们不妨假设存在实数 $X_0 > 0$, 使得当 $x > x_0$ 时 $f(x + T) - f(x) > 0$,

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x + T) - f(x)] \geq 0$,

故我们只需证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x + T) - f(x)] = 0$.

反设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x + T) - f(x)] = A > 0$ (A 可为 $+\infty$),

则由定义对于数 $M > 0$ (若 $A < +\infty$, 则取 $M = \frac{A}{2}$, 若 $A = +\infty$,

则 M 可取为任一固定的正数), 存在 $R > x_0$, 使得当 $x \geq R$ 时,

$$f(x + T) - f(x) > M.$$

更重要的有

$$f(T + R) - f(R) > M,$$

$$f(2T + R) - f(T + R) > M,$$

...

$$f(nT + R) - f[(n-1)T + R] > M.$$

从而 $f(nT + R) > (n-1)M + f(R)$.

这与 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上有界相矛盾. 因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x + T) - f(x)] = 0,$$

故存在序列 $x_n \rightarrow +\infty$ 使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_n + T) - f(x_n) = 0.$$

法二:记

$$g(y) = f(x_0 + (y+1)T) - f(x_0 + yT) \quad y \geq 1,$$

取一正数序列 $\{\epsilon_n\} (n=1, 2, \dots)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = 0$. 易见 $g(y)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, 且有界. 现按下法取 k_1 , 使 $|g(k_1)| < \epsilon_1$. 如果 $g(1), g(2)$ 异号, 则由连续函数介值定理, 存在 k_1 , 且 $1 < k_1 < 2$, 使得 $|g(k_1)| = 0 < \epsilon_1$. 若 $g(1)$ 与 $g(2)$ 同号, 且 $g(1), g(2), g(3), g(4), \dots$ 都是同号的, 不妨设它们均大于 0, 那么我们可以证明, 必存在 $k_1 \geq 1$, 使 $0 < g(k_1) < \epsilon_1$. 因为, 若对一切自然数 n , 均有 $g(n) \geq \epsilon_1$, 则由 $g(y)$ 的定义,

$$f(x_0 + 2T) - f(x_0 + T) \geq \epsilon_1,$$

$$f(x_0 + 3T) - f(x_0 + 2T) \geq \epsilon_1,$$

$\dots,$

$$f(x_0 + nT) - f[x_0 + (n-1)T] \geq \epsilon_1.$$

从而

$$f(x_0 + nT) \geq (n-1)\epsilon_1 + f(x_0 + T),$$

这与 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内有界相矛盾. 故必存在自然数 k_1 , 使得

$$|g(k_1)| < \epsilon_1.$$

取 $x_1 = x_0 + k_1 T$,

则 $|f(x_1 + T) - f(x_1)| < \epsilon_1$,

然后, 取自然数 $p_2 > k_1 + 1$. 通过考虑 $g(p_2), g(p_2 + 1), \dots$, 仿照上面的证明, 可得 $k_2 > k_1 + 1$.

使得 $|g(k_2)| < \epsilon_2$,

取 $x_2 = x_0 + R_2 T$,

则 $|f(x_2 + T) - f(x_2)| < \epsilon_2$.

依此类推, 可得 $\{x_n\}$, 使得 $x_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$,

且 $|f(x_n + T) - f(x_n)| < \epsilon_n$,

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n + T) - f(x_n)) = 0$.

【753】 设 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 都是在 $-\infty < x < +\infty$ 的连续周

期函数, 并且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0$, 证明 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

证 先证明 $\varphi(x), \psi(x)$ 有相同的周期. 设 $\varphi(x)$ 的周期为 p , 则 $\varphi(x+p) = \varphi(x)$.

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x+p) - \psi(x+p)] = 0$,

得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x+p)] = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\psi(x) - \psi(x+p)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x+p)] - \lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)]$$

$$= 0.$$

反设 $\psi(x)$ 的周期为 $q \neq p$, 则至少存在一个 x_0 , 使得

$$\psi(x_0) \neq \psi(x_0 + p).$$

设 $x_n = x_0 + nq$ (n 为正整数),

又 $\alpha = |\psi(x_0) - \psi(x_0 + p)| > 0$,

则 $|\psi(x_n) - \psi(x_n + p)| = \alpha$,

这与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\psi(x) - \psi(x+p)] = 0$ 相矛盾.

最后证明, $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. 反设结论不成立, 则至少存在一个 x_0^* , 使 $\varphi(x_0^*) \neq \psi(x_0^*)$

记 $\beta = |\varphi(x_0^*) - \psi(x_0^*)| > 0, x_n^* = x_0^* + np$

(n 为正整数)

则 $|\varphi(x_n^*) - \psi(x_n^*)| = \beta$,

这与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0$ 相矛盾.

因此 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

【754】 证明: 单调有界函数的所有不连续点都是第一类不连续点.

证 不妨设 $f(x)$ 为单调增加的函数, 且 $m \leq f(x) \leq M$, 设 x_0 是 $f(x)$ 的一个间断点. 由单调函数的极限定理知

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x),$$

及 $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ 存在,

且 $m \leq f(x_0 - 0) \leq f(x_0 + 0) \leq M$.

故 x_0 为第一类间断点.

【755】 证明: 如果函数 $f(x)$ 具有以下性质:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义而且单调,

(2) $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间所有的数取作其函数值,

则这个函数在 $[a, b]$ 上是连续的.

证 不妨设 $f(x)$ 为单调增加的, 反设 $f(x)$ 在 x_0 间断 ($x_0 \in [a, b]$), 由于 $f(x)$ 在 x_0 有定义, 即 $f(x_0)$ 存在. 由 $f(x)$ 的单调增加性知, 当 $x < x_0$ 时, $f(x) \leq f(x_0)$. 所以

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0).$$

同理 $f(x_0 + 0) \geq f(x_0)$.

由于 $f(x)$ 在 x_0 间断.

所以 $f(x_0) - f(x_0 - 0)$,

及 $f(x_0 + 0) - f(x_0)$

中至少有一个大于零.

例如 $f(x_0) - f(x_0 - 0) > 0$.

由 $f(x)$ 的单调性知 $f(x)$ 不能取到区间 $(f(x_0 - 0), f(x_0))$ 内的值.

这与题设相矛盾. 因此, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

【756】 证明: 如果函数

$$f(x) = \sin \frac{1}{x-a} \quad (x \neq a), \text{ 且 } f(a) = 0,$$

在任意闭区间 $[a, b]$ 取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的所有中间值, 但是在 $[a, b]$ 上不是连续的.

证 事实上, $f(x)$ 在 $\left[a + \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, a + \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}\right]$ 上 (n 为

自然数) 取 $[-1, 1]$ 之间的一切值. 而当 n 充分大时,

$$\left[a + \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, a + \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}\right] \subset [a, b],$$

所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取 $[-1, 1]$ 上的一切值, 当然更取 $f(a) = 0$

与 $f(b)$ ($|f(b)| \leq 1$) 之间的一切值. 但显然有 $f(x)$ 在 $x = a$ 处不连续.

【757】 证明: 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是连续的, 且 x_1, x_2, \dots, x_n 为此区间内的任意值, 则在它们之间能找到一数值 ξ , 使得 $f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$.

证 不妨设

$$a < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n < b,$$

若 $x_1 = x_n$, 则结论显然成立. 故设 $x_1 < x_n$. 由于 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上连续, 于是, $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上取得最大值 M 和最小值 m , 且 $m \leq f(x) \leq M, x \in [x_1, x_n]$,

$$\text{从而有 } m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq M.$$

由连续函数的性质, 存在 $\xi \in [x_1, x_n]$, 使 $f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$.

【758】 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 连续, 且

$$l = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ 及 } L = \overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} f(x).$$

证明: 对于任意数 λ , 其中 $l \leq \lambda \leq L$, 存在序列 $x_n \rightarrow a+0$ ($n = 1, 2, \dots$), 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda$.

证 当 $\lambda = l$ 或 $\lambda = L$ 时, 结论显然成立. 因此, 设

$$l < \lambda < L.$$

因为 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = l, \overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} f(x) = L$,

故存在序列 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$, 使得 $a_n \rightarrow a+0, b_n \rightarrow a+0$,

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l, \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = L$.

于是, 存在自然数 N , 使得当 $n > N$ 时, $f(a_n) < \lambda < f(b_n)$.

由 $f(x)$ 的连续性知, 在 a_n, b_n 之间存在 x_n , 使

$$f(x_n) = \lambda \quad (n > N).$$

由于 $a_n \rightarrow a+0, b_n \rightarrow a+0$,

故 $x_n \rightarrow a+0$,

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda$.

§ 8. 反函数

用参数表示的函数

1. 反函数的存在和连续性

如果函数 $y = f(x)$ 具有以下性质:(1) 在区间 (a, b) 内有定义且是连续的;(2) 在严格意义上讲,在此区间上是单调的. 则存在单值反函数 $x = f^{-1}(y)$, 此函数在区间 (A, B) 上有定义且是连续的, 在严格意义上讲是相应地单调的.

其中 $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ 和 $B = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$

在其最大存在域定义并且在这个域内满足方程式 $f[g(y)] = y$ 的任何单值连续函数 $x = g(y)$, 则被理解为已知连续函数 $y = f(x)$ 的多值反函数的一个单值连续分枝.

2. 用参数表示的函数的连续性

如果函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 (α, β) 内有定义而且是连续的, 且函数 $\varphi(t)$ 在这个区间上严格单调, 则方程组

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

在区间 (a, b) 内将 y 定义成 x 的单值连续函数: $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$, 其中: $a = \lim_{t \rightarrow \alpha+0} \varphi(t)$ 和 $b = \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t)$.

【759】 求线性分式函数的反函数

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0)$$

问在什么情况下, 反函数与已知函数相同?

解 由 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$,

解之得反函数为 $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$,

或写成 $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$.

反函数与已知函数相同,当且仅当

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-dx+b}{cx-a}.$$

解之得 $a+d=0$,

或 $b=c=0, a=d \neq 0$ (此时函数为 $y=x$).

【760】 设 $y = x + [x]$, 求反函数 $x = x(y)$.

解 当 $k \leq x < k+1$, 时

$$2k \leq y < 2k+1.$$

且 $[x] = k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$,

所以, 此时 $y = x + k$,

故反函数为 $x = y - k \quad (2k \leq y < 2k+1)$.

即 $x = y - \left[\frac{y}{2} \right], y \in \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} [2k, 2k+1)$.

【761】 证明: 存在唯一的连续函数 $y = y(x) (-\infty < x < +\infty)$. 满足克卜勒方程

$$y - \epsilon \sin y = x \quad (0 \leq \epsilon < 1),$$

证 640 题知序列

$$y_0 = x, y_n = x + \epsilon \sin y_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

的极限 $y(x)$ 为克卜勒方程 $y - \epsilon \sin y = x$ 的唯一的根.

现在证明 $y = y(x)$ 是连续的. 事实上, 对任意 x_0 , 我们有

$$\begin{aligned} & |y_n(x) - y_n(x_0)| \\ &= |(x - x_0) + \epsilon [\sin y_{n-1}(x) - \sin y_{n-1}(x_0)]| \\ &\leq |x - x_0| + \epsilon |y_{n-1}(x) - y_{n-1}(x_0)|. \end{aligned}$$

逐次应用此不等式, 即得

$$\begin{aligned} & |y_n(x) - y_n(x_0)| \\ &\leq |x - x_0| (1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots + \epsilon^n) \\ &= |x - x_0| \frac{1 - \epsilon^{n+1}}{1 - \epsilon} \leq \frac{1}{1 - \epsilon} |x - x_0|. \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 便有

$$|y(x) - y(x_0)| \leq \frac{1}{1 - \epsilon} |x - x_0| \quad (0 \leq \epsilon < 1).$$

因此 $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y(x_0)$,

即 $y(x)$ 在 x_0 连续. 由 x_0 的任意性, 知 $y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

【762】 证明: 方程 $\cot x = kx$ 对于每个实数 $k (-\infty < k < +\infty)$ 在区间 $0 < x < \pi$ 内具有唯一连续的根 $x = x(k)$.

证 设 $f(x) = \frac{\cot x}{x}$

显然在 $(0, \pi)$ 上 $\cot x$ 和 $\frac{1}{x}$ 都是连续的严格单调减函数并且

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = -\infty$$

因此, 对每一实数 $k (-\infty < k < +\infty)$ 有唯一的 $x \in (0, \pi)$ 使 $f(x) = k$, 即 $\cot x = kx$.

另外, 由于 $f(x) = \frac{\cot x}{x}$ 在 $(0, \pi)$ 上是连续的严格减函数, 故 $k = f(x)$ 的反函数 $x = x(k) = f^{-1}(k)$ 存在而且是一 $-\infty < k < +\infty$ 上的连续的单调减函数. 此 $x = x(k)$ 即方程 $\cot x = kx$ 的根.

综上所述知: 对任何 $k (-\infty < k < +\infty)$, 方程 $\cot x = kx$ 在 $(0, \pi)$ 上有唯一的根 $x = x(k)$, 并且 $x(k)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数.

【763】 非单调函数 $y = f(x) (-\infty < x < +\infty)$ 能否有单值的反函数?

研究下例: $y = \begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ -x, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$

解 可以, 例如函数

$$y = \begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ -x, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上为单值函数, 但不是单调的函数, 而其反函数为此函数本身.

【764】 在什么情况下函数 $y = f(x)$ 和反函数 $x = f^{-1}(y)$ 是同一函数?

解 为统一坐标起见,记 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$.
故函数 $y = f(x)$ 与反函数为同一函数,当且仅当

$$f^{-1}(x) = f(x),$$

即 $x = f(f(x))$.

【765】 证明:不连续函数 $y = (1+x^2)\operatorname{sgn}x$ 的反函数是连续函数.

解 原函数为

$$y = \begin{cases} 1+x^2, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时,} \\ -(1+x^2), & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

显然在 $x = 0$ 处不连续. 其反函数在 $|y| \geq 1$ 及 $y = 0$ 有定义. 其反函数为

$$x = \begin{cases} \sqrt{y-1}, & \text{当 } y \geq 1 \text{ 时,} \\ -\sqrt{-y-1}, & \text{当 } y \leq -1 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } y = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

易见,上述函数在其定义域内连续.

【766】 证明:如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且严格单调,以及 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) (a \leq x_n \leq b)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

证 不妨设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调增加. 如果结论不真,则在 (a, b) 内总存在一个实数 a_1 及序列 $\{x_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} > a_1$.

由于 $f(x)$ 严格单调增加,故有

$$f(x_{n_k}) > f(a_1) > f(a).$$

于是 $f(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \geq f(a_1)$,

矛盾,因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

确定以下函数的反函数的单值连续分支(767 ~ 772).

【767】 $y = x^2$.

解 反函数的单值连续分支为

$$x = \sqrt{y} \quad (0 \leq y < +\infty),$$

及 $x = -\sqrt{y} \quad (0 \leq y < +\infty).$

【768】 $y = 2x - x^2.$

解 由 $x^2 - 2x + y = 0,$

得 $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - y}.$

于是单值连续分支为

$$x = 1 - \sqrt{1 - y},$$

及 $x = 1 + \sqrt{1 - y} \quad (-\infty < y \leq 1).$

【769】 $y = \frac{2x}{1 + x^2}.$

解 由于

$$x^2 y - 2x + y = 0,$$

故

$$x = \begin{cases} \frac{1 \pm \sqrt{1 - y^2}}{y}, & \text{当 } y \neq 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } y = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

又由于 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y(1 + \sqrt{1 - y^2})} = 0,$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} = \infty.$$

故反函数的连续分支为

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \quad (-1 \leq y \leq 1),$$

及 $x = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \quad (0 < |y| \leq 1).$

【770】 $y = \sin x.$

解 单值连续分支为

$$x = (-1)^k \arcsin y + k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (|y| \leq 1).$$

【771】 $y = \cos x$.

解 单值连续分支为

$$x = 2k\pi \pm \arccos y \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (|y| \leq 1).$$

【772】 $y = \tan x$.

解 单值连续分支为

$$x = \arctan y + k\pi \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (-\infty < y < +\infty).$$

【773】 证明: 连续函数 $y = 1 + \sin x$ 对应于区间 $0 < x < 2\pi$ 的值域是一线段.

证 因为 $-1 \leq \sin x \leq 1$.

从而 $0 \leq 1 + \sin x \leq 2$,

而 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 2, y|_{x=\frac{3\pi}{2}} = 0$,

且 $y = 1 + \sin x$,

是 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的连续函数, 由连续函数的介值定理知当 x 从 $\frac{\pi}{2}$ 变 $\frac{3\pi}{2}$ 时, y 取 0 到 2 之间的一切值. 因此当 $0 < x < 2\pi$ 时, y 值的集合就是线段 $[0, 2]$.

【774】 证明: 等式 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

证 令 $\varphi = \arcsin x$,

则 $x = \sin \varphi$.

从而 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi = x$.

又因为 $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$,

故 $0 \leq \frac{\pi}{2} - \varphi \leq \pi$.

因此 $\frac{\pi}{2} - \varphi = \arccos x$.

即 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$

【775】 证明: 等式 $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x (x \neq 0).$

证 当 $x > 0$ 时, 令 $\varphi = \arctan x,$

则得 $\tan \varphi = x,$

且 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$

又 $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \tan \varphi = x,$

故 $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1}{x},$

且 $0 < \frac{\pi}{2} - \varphi < \frac{\pi}{2},$

故 $\frac{\pi}{2} - \varphi = \arctan \frac{1}{x}.$

即 $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad (x > 0).$

当 $x < 0$ 时, 令 $\psi = \arctan x,$

则 $x = \tan \psi,$

且 $-\frac{\pi}{2} < \psi < 0,$

又 $\cot\left(-\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \tan \psi = x,$

即 $\tan\left(-\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \frac{1}{x},$

并且 $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - \psi < 0,$

故 $-\frac{\pi}{2} - \psi = \arctan \frac{1}{x},$

即 $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad (x < 0).$

总之, 当 $x \neq 0$ 时, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$.

【776】 证明反正切相加定理:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

式中 $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ 是取值 $0, 1, -1$ 三者之一的函数.

在已知 x 的值中, 什么样的 y 值能使函数 ε 可能不连续? 在 Oxy 平面上作出函数 ε 连续的对应域并求出此函数在所求得的域内的数值.

证 设 $\varphi = \arctan x, \quad \psi = \arctan y$

则 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2},$

故有 $-\pi < \varphi + \psi < \pi.$

若 $xy \leq 0$, 则 $-\frac{\pi}{2} < \varphi + \psi < \frac{\pi}{2}.$

若 $x > 0, y > 0$, 则 $0 < \varphi + \psi < \pi.$

再讨论 $\varphi + \psi$ 位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 还是 $(\frac{\pi}{2}, \pi).$

由 $0 < \varphi + \psi < \frac{\pi}{2},$

得 $0 < \arctan x + \arctan y < \frac{\pi}{2},$

即 $0 < \arctan x < \frac{\pi}{2} - \arctan y,$

亦即 $x < \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan y\right) = \cot(\arctan y) = \frac{1}{y}.$

故 $xy < 1,$

因此, 当 $x > 0, y > 0, xy < 1$ 时,

$$\varphi + \psi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

同理, 当 $x > 0, y > 0, xy > 1$ 时, $\varphi + \psi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$

同法可证, 当 $x < 0, y < 0, xy < 1$ 时, $\varphi + \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

当 $x < 0, y < 0, xy > 1$ 时, $\varphi + \psi \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$.

总之, 若 $xy < 1$, 则 $\varphi + \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

若 $x > 0, xy > 1$, 则 $\varphi + \psi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

若 $x < 0, xy > 1$, 则 $\varphi + \psi \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$.

设 $u = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$,

则 $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$.

由和角公式, 有 $\tan(\varphi + \psi) = \frac{x+y}{1-xy} = \tan u$.

因此当 $-\frac{\pi}{2} < \varphi + \psi < \frac{\pi}{2}$ 时, $\varphi + \psi = u$.

当 $\frac{\pi}{2} < \varphi + \psi < \pi$ 时, $\varphi + \psi = u + \pi$.

当 $-\pi < \varphi + \psi < -\frac{\pi}{2}$ 时, $\varphi + \psi = u - \pi$.

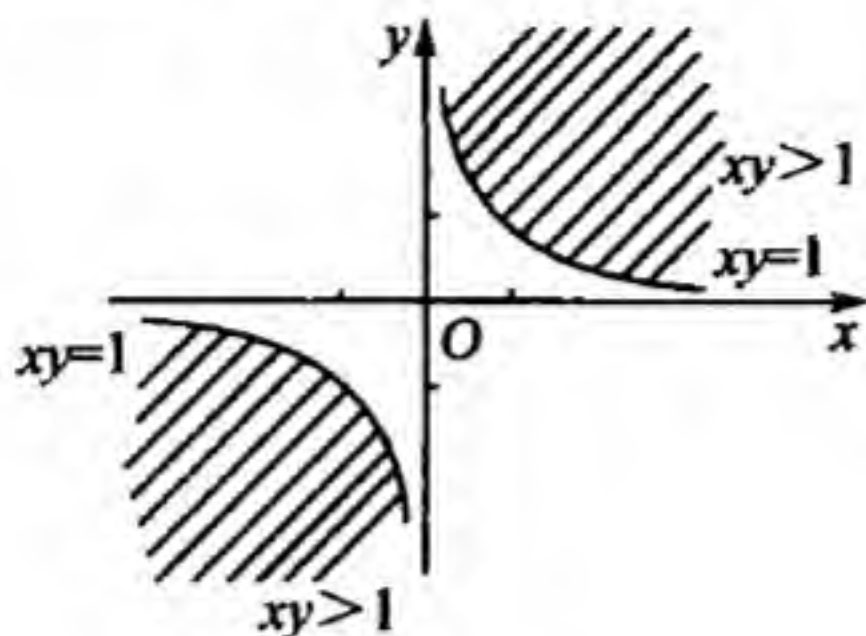
因此 $\arctan x + \arctan y$

$$= \begin{cases} \arctan \frac{x+y}{1-xy}, & \text{若 } xy < 1, \\ \pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy}, & \text{若 } x > 0, xy > 1, \\ -\pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy} & \text{若 } x < 0, xy > 1. \end{cases}$$

当 x 固定时, 若 $y = \frac{1}{x}$, 则 ϵ 不连续. 因为此时 (例如设 $x > 0$), 当

$y > \frac{1}{x}$ 时, $\epsilon \equiv 1$, 而当 $y < \frac{1}{x}$ 时, $\epsilon \equiv 0$. 如 776 题图所示, 曲线 xy

$= 1$ 为函数 $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ 的不连续域.



776 题图

【777】 证明反正弦相加定理:

$$\arcsin x + \arcsin y$$

$$= (-1)^{\varepsilon} \arcsin(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}) + \varepsilon \pi$$

$$(|x| \leq 1, |y| \leq 1).$$

$$\text{其中 } \varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{若 } xy \leq 0 \text{ 或 } x^2 + y^2 \leq 1, \\ \operatorname{sgn} x, & \text{若 } xy > 0 \text{ 且 } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

证 令

$$u = \arcsin x + \arcsin y \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1)$$

$$\text{因为 } -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } -\pi \leq u \leq \pi.$$

$$\text{令 } v = \arcsin(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}),$$

$$\text{则 } -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{并且 } \sin u = x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2} = \sin v.$$

u 有三种可能的情形.

情形 I

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2},$$

若 $xy \leq 0$, 则或者 $0 \leq x \leq 1$ 及 $-1 \leq y \leq 0$, 或者 $-1 \leq x \leq 0$ 及 $0 \leq y \leq 1$, 因而 $0 \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$,

及 $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq 0$,

或 $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq 0$,

及 $0 \leq \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}$,

故 $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}$.

若 $x > 0, y > 0$, 显然 $u \geq 0$, 要使 $u \leq \frac{\pi}{2}$, 即

$$\arcsin x + \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}.$$

从而 $0 < \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin y = \arccos y < \frac{\pi}{2}$.

由于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内, 正弦函数是增函数. 故

$$\sin(\arcsin x) \leq \sin(\arccos y),$$

即 $x \leq \sqrt{1-y^2}$,

亦即 $x^2 + y^2 \leq 1$.

同法可证, 若 $x < 0, y < 0$, 则 $-\frac{\pi}{2} \leq u < 0$,

相当于 $x^2 + y^2 \leq 1$.

因此, 当 $xy \leq 0$ 或 $x^2 + y^2 \leq 1$, 时 $u = v$.

情形 II

$$\frac{\pi}{2} < u \leq \pi,$$

当 $\frac{\pi}{2} < u \leq \pi$

时, 必有 $x > 0, y > 0$.

条件 $\frac{\pi}{2} < \arcsin x + \arcsin y \leq \pi$,

即 $\frac{\pi}{2} > \arcsin x > \frac{\pi}{2} - \arcsin y > 0$.

从而 $x > \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y\right) = \sqrt{1-y^2}$,

即 $x^2 + y^2 > 1$,

因此, 当 $x > 0, y > 0$ 且 $x^2 + y^2 > 1$ 时, $u = \pi - v$.

情形 III

$$-\pi \leq u < -\frac{\pi}{2},$$

此时, 必有 $x < 0, y < 0$. 且 $-\pi \leq \arcsin x + \arcsin y < -\frac{\pi}{2}$,

即 $\frac{\pi}{2} < \arcsin(-x) + \arcsin(-y) < \pi$,

由情形 II 的讨论知, 有

$$x^2 + y^2 > 1,$$

因此, 当 $x < 0, y < 0$, $x^2 + y^2 > 1$ 时 $u = -\pi - v$.

总之 $\arcsin x + \arcsin y =$

$$\begin{cases} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{若 } xy \leq 0 \text{ 或 } x^2 + y^2 \leq 1, \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{若 } x > 0, y > 0, x^2 + y^2 > 1, \\ -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{若 } x < 0, y < 0, x^2 + y^2 > 1, \end{cases}$$

即

$$\begin{aligned} & \arcsin x + \arcsin y \\ &= (-1)^\epsilon \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \epsilon\pi. \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \epsilon = \begin{cases} 0, & \text{若 } xy \leq 0 \text{ 或 } x^2 + y^2 \leq 1, \\ \operatorname{sgn} x, & \text{若 } xy > 0 \text{ 及 } x^2 + y^2 > 1, \end{cases}$$

$$(|x| \leq 1, |y| \leq 1).$$

【778】 证明反余弦相加定理:

$$\begin{aligned} & \arccos x + \arccos y \\ &= (-1)^{\epsilon} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}) + 2\pi\epsilon \\ & \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1). \end{aligned}$$

其中 $\epsilon = \begin{cases} 0, & \text{若 } x+y \geq 0, \\ 1, & \text{若 } x+y < 0. \end{cases}$

证 设 $u = \arccos x + \arccos y$

因为 $0 \leq \arccos x \leq \pi, \quad 0 \leq \arccos y \leq \pi,$

故 $0 \leq u \leq 2\pi.$

若 $0 \leq u \leq \pi,$

则 $0 \leq \arccos x \leq \pi - \arccos y \leq \pi,$

而余弦函数在 $[0, \pi]$ 上是减函数. 因此

$$x \geq \cos(\pi - \arccos y) = -y,$$

即 $x + y \geq 0.$

同理可得, 若 $\pi < u \leq 2\pi,$

则 $x + y < 0.$

再设 $v = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}),$

则 $0 \leq v \leq \pi.$

由和角公式有

$$\begin{aligned} \cos u &= \cos(\arccos x + \arccos y) \\ &= xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} = \cos v, \end{aligned}$$

因此, 若 $0 \leq u \leq \pi,$

则 $u = v.$

若 $\pi < u \leq 2\pi,$

则 $u = 2\pi - v,$

即 $\arccos x + \arccos y$

$$= (-1)^{\epsilon} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}) + 2\pi\epsilon,$$

其中 $\epsilon = \begin{cases} 0, & \text{若 } x+y \geq 0, \\ 1, & \text{若 } x+y < 0. \end{cases}$

【779】 作出以下函数的图形:

$$(1) y = \arcsin x - \arcsin \sqrt{1-x^2};$$

$$(2) y = \arcsin(2x \sqrt{1-x^2}) - 2\arcsin x.$$

解 (1) 因为

$$x^2 + (-\sqrt{1-x^2})^2 = 1.$$

由 777 题的结果有

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x + \arcsin(-\sqrt{1-x^2}) \\ &= \arcsin(x \sqrt{1-(1-x^2)} - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-x^2}) \\ &= \arcsin(x |x| - 1 + x^2). \end{aligned}$$

$$\text{当 } -1 \leq x \leq 0 \text{ 时, } y = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\text{若 } 0 < x \leq 1 \text{ 时, } y = \arcsin(2x^2 - 1)$$

$$= 2\arcsin x - \frac{\pi}{2},$$

$$\text{因此 } y = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{当 } -1 \leq x \leq 0 \text{ 时,} \\ 2\arcsin x - \frac{\pi}{2}, & \text{当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

如 779 题图 1 所示

(2) 由 777 题的结果有

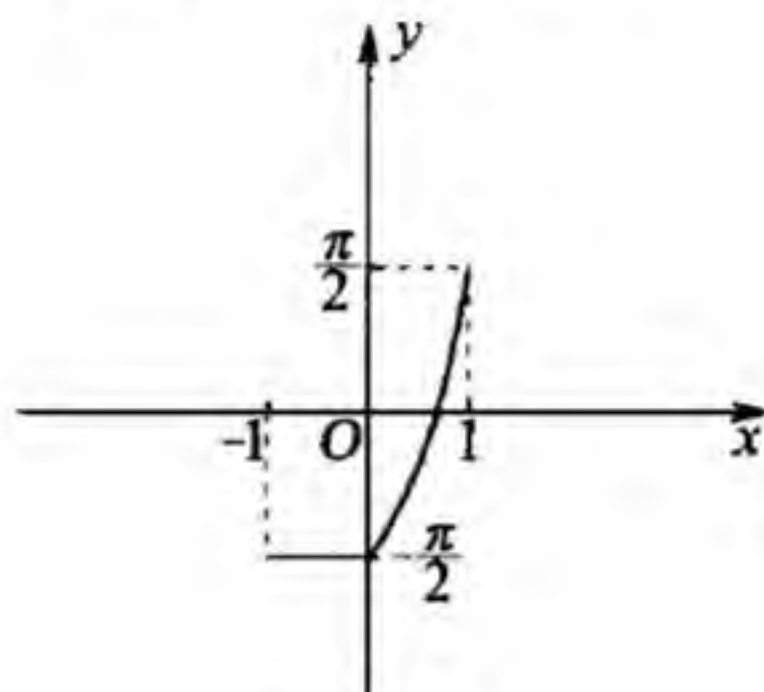
$$2\arcsin x = \arcsin x + \arcsin x$$

$$= \begin{cases} \arcsin(2x \sqrt{1-x^2}), & \text{若 } |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \pi \operatorname{sgn} x - \arcsin(2x \sqrt{1-x^2}), & \text{若 } \frac{1}{\sqrt{2}} < |x| \leq 1, \end{cases}$$

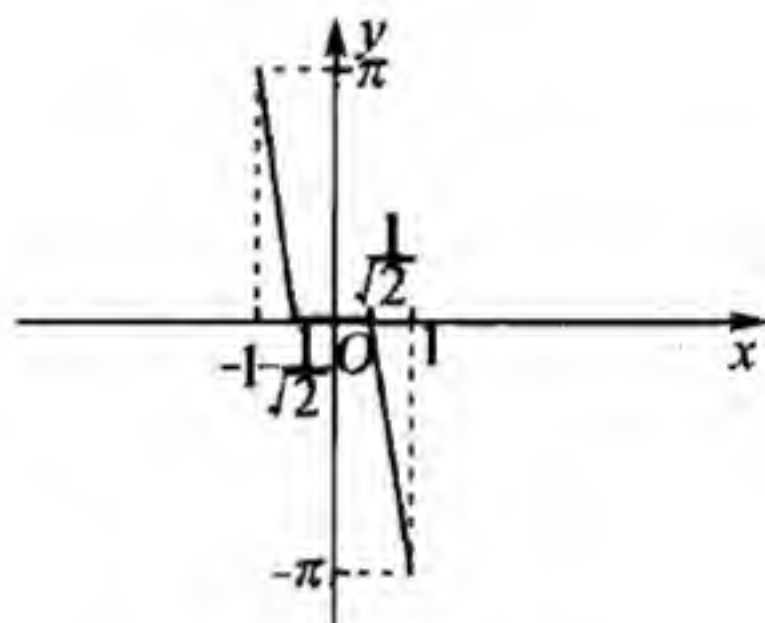
故

$$y = \begin{cases} -(\pi + 4\arcsin x), & \text{当 } -1 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 0, & \text{当 } -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \pi - 4\arcsin x, & \text{当 } \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1. \end{cases}$$

如 779 题图 2 所示.



779 题图 1



779 题图 2

【780】 设方程式

$$x = \arctan t, \quad y = \operatorname{arccot} t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

给出函数 $y = y(x)$, 求 $y = y(x)$.

问在怎样的域内该函数才有定义?

解 由条件有

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y < \pi,$$

且 $\tan x = t, \quad \cot y = t$

即得 $\cot y = \tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

且当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$,

时 $0 < \frac{\pi}{2} - x < \pi$,

因此 $y = \frac{\pi}{2} - x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

【781】 设 $x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t (-\infty < t < +\infty)$, 在怎样的参数 t 变化域可以把变数 y 看作是变数 x 的单值函数? 求出对于各个域上 y 的表达式.

解 由于

$$x = \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

$$y = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

所以 $x^2 - y^2 = 1$.

当 $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \geq 0$ 时,

即 $e^t \geq e^{-t}$,

或 $e^{2t} \geq 1$,

亦即 $t \geq 0$ 时,

$$y = \sqrt{x^2 - 1}.$$

当 $t < 0$ 时 $y = -\sqrt{x^2 - 1}$.

不论 t 取何值, 都有 $x \geq 1$, 故 $\sqrt{x^2 - 1}$ 有意义.

【782】 要使方程组

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$

将 y 定义为 x 的单值函数的必要且充分的条件是什么?

研究实例: $x = \sin^2 t, y = \cos^2 t$.

解 将 y 定义为 x 的单值函数的必要且充分条件为对任意给定的 x , 使 $\varphi(t) = x$ 的一切 t 值, 函数 $\psi(t)$ 应有同一的值. 下面加以证明, 先证必要性, 倘若不然, 则存在 x_0 及 $t_1 \neq t_2$, 使 $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = x_0$ 且 $\psi(t_1) \neq \psi(t_2)$. 于是, 对于这样的 x_0 , 有两个不同的 y 值 $y_1 = \psi(t_1), y_2 = \psi(t_2)$ 和它对应. 故 y 就不定义为 x 的单值函数. 因此, 使 $\varphi(t) = x$ 的一切值, $\psi(t)$ 应有同一值.

再证充分性, 对任一 x , 取 t_0 使 $x = \varphi(t_0)$ 定义与 x 对应 y 为 $y = \psi(t_0)$.

这样定义的函数 $y = y(x)$ 不因 t_0 的不同选取而不同, 它由 x 唯一确定. 从而 y 定义为 x 的单值函数.

【783】 问在什么条件下, 以下两个方程组

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (a < t < b)$$

和 $x = \varphi(\chi(\tau)), y = \psi(\chi(\tau)) \quad (a < \tau < \beta)$

能定义同一个函数 $y = y(x)$?

解 当 $a < \tau < \beta$ 时, 函数 $x(\tau)$ 的值的集应为区间 (a, b) , 即 $x[(\alpha, \beta)] = (a, b)$

【784】 假设函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义而且是连续的, 且 $A = \inf_{a < x < b} \varphi(x), B = \sup_{a < x < b} \varphi(x)$.

在什么情况下存在在区间 (A, B) 有定义的单值函数 $f(x)$, 使得在 $a < x < b$ 时, $\psi(x) = f[\varphi(x)]$?

解 设 $u = \varphi(x), v = \psi(x)$

显然, 要求对于使 $\varphi(x) = u$ 的一切 x 值 ($A < u < B$), 函数 $\psi(x)$ 应取同一值. 这时对 $u \in (A, B)$, 可定义

$$f(u) = \psi(x) = v,$$

其中 x 为满足 $\varphi(x) = u$ ($a < x < b$) 的任何数. 上述条件保证了这样定义的 $v = f(u)$ 是单值的.

§ 9. 函数的一致连续性

1. 一致连续性的定义

设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义, 若对于每个 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于任何数值 $x', x'' \in X$, 由不等式

$$|x' - x''| < \delta$$

可得出不等式 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$,

则称函数 $f(x)$ 在已知集 (开区间, 闭区间等) $X = \{x\}$ 上为一致连续函数的.

2. 康托尔定理

在有界闭区间 $[a, b]$ 内有定义的连续函数 $f(x)$ 在此闭区间

上一致连续.

【785】 某工厂的车间制造正方形薄板,其边长 x 可在 1 厘米到 10 厘米范围内取值,为了使(在上述范围内)不论何种边长薄板的面积 y 与原设计的差小于 ϵ ,问能以多大的公差 δ 加工这些薄板的边长?(1) $\epsilon = 1$ 平方厘米;(2) $\epsilon = 0.01$ 平方厘米;(3) $\epsilon = 0.0001$ 平方厘米,求 ϵ 的值.

解 $y = x^2 (1 \leq x \leq 10)$, 由于

$$\begin{aligned} |x'^2 - x''^2| &= |x' - x''| |x' + x''| \\ &\leq 20 |x' - x''|. \end{aligned}$$

于是对任给的 $\epsilon > 0$, 要 $|x'^2 - x''^2| < \epsilon$,

只要 $|x' - x''| < \frac{\epsilon}{20}$ 即可.

于是,在加工薄板边长时,只要取公差 $\delta \leq \frac{\epsilon}{20}$, 当 $|x' - x''| < \delta$ 时,即可满足要求.

(1) 当 $\epsilon = 1$ 平方厘米时, $\delta \leq \frac{1}{20} = 0.05$ 厘米.

(2) 当 $\epsilon = 0.01$ 平方厘米时, $\delta \leq \frac{0.01}{20} = 0.0005$ 厘米.

(3) 当 $\epsilon = 0.0001$ 平方厘米时,

$$\delta \leq \frac{0.0001}{20} = 0.000005 \text{ 厘米.}$$

【786】 圆柱形套筒的宽度为 ϵ , 长度为 δ , 将套筒套在曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 上并沿此曲线滑动, 此时套筒的轴仍然保持平行于 Ox 轴, 为了使此套筒顺利地通过曲线上由不等式 $-10 \leq x \leq 10$ 所确定的曲线段, 问 δ 应该等于多少? 设 (1) $\epsilon = 1$; (2) $\epsilon = 0.1$; (3) $\epsilon = 0.01$; (4) ϵ 为任意小数时.

解 $y = \sqrt[3]{x}$. 对于 $y' \neq y''$, 由于

$$|y' - y''| = \left| \frac{y'^3 - y''^3}{y'^2 + y'y'' + y''^2} \right|$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{y'^3 - y''^3}{\frac{3}{4}(y' + y'')^2 + \frac{1}{4}(y' - y'')^2} \right| \\
 &\leq \frac{|y'^3 - y''^3|}{\frac{1}{4}|y' - y''|^2},
 \end{aligned}$$

即 $\frac{1}{4}|y' - y''|^3 \leq |y'^3 - y''^3| = |x' - x''|.$

从而 $|y' - y''| \leq \sqrt[3]{4|x' - x''|}.$

对于任给的 $\varepsilon > 0$, 要

$$|y' - y''| < \varepsilon,$$

只要 $|x' - x''| < \frac{\varepsilon^3}{4}$ 即可.

取 $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon^2}{4},$

则当 $|x' - x''| < \delta$

时, 恒有 $|\sqrt[3]{x'} - \sqrt[3]{x''}| < \varepsilon.$

(1) 当 $\varepsilon = 1$ 时, $\delta \leq \frac{1}{4}.$

(2) 当 $\varepsilon = 0.1$ 时, $\delta \leq 2.5 \times 10^{-4}.$

(3) 当 $\varepsilon = 0.01$ 时, $\delta \leq 2.5 \times 10^{-7}.$

(4) 当 ε 为任意数时, $\delta \leq \frac{\varepsilon^3}{4}.$

【787】 用“ $\varepsilon - \delta$ ”语言表述法, 正面表达以下论断: 函数 $f(x)$ 在某集(开区间, 闭区间等等)内是连续的, 但在这个集内并非一致连续.

解 设集合为 E . 所需论断的“ $\varepsilon - \delta$ ”说法如下: 对于任给的 $\varepsilon > 0$ 及 $x_0 \in E$, 总存在一个数 $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$ 时, 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

同时, 至少存在一个 $\varepsilon_0 > 0$, 使对于任意给定的 $\delta > 0$, 至少存在两

点 $x_1, x_2 \in E$, 满足 $|x_1 - x_2| < \delta$, 但

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \epsilon_0.$$

【788】 证明: 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内是连续的, 但在此区间内并非一致连续.

证 连续性是显然的, 现证 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上不一致连续. 考虑 $(0, 1)$ 内的两个点列

$$x_n = \frac{1}{n}, x'_n = \frac{1}{n+1},$$

则对于固定的 ϵ_0 , 只要 $0 < \epsilon_0 < 1$, 对任意的 $\delta > 0$, 当 $n > \sqrt{\frac{1}{\delta}}$ 时,

$$|x_n - x'_n| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \delta,$$

$$\text{但 } |f(x_n) - f(x'_n)| = 1 > \epsilon_0,$$

因此 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上并非一致连续.

【789】 证明: 函数 $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内是连续的, 但在此区间内并非一致连续.

证 由基本初等函数在其定义域的连续性知, 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ 是连续的. 同时 $|f(x)| \leq 1$, 即 $f(x)$ 是有界的. 现

$$\text{设 } x_n = \frac{2}{n}, x'_n = \frac{2}{n+1} \quad (n > 2),$$

$$\text{则 } x_n \in (0, 1), x'_n \in (0, 1).$$

当 $0 < \epsilon_0 < 1$ 时, 对任给的 δ , 当 $n > \sqrt{\frac{2}{\delta}}$ 时, 总有

$$|x_n - x'_n| = \frac{2}{n(n+1)} < \frac{2}{n^2} < \delta.$$

$$\text{但 } |f(x_n) - f(x'_n)| = 1 > \epsilon_0,$$

因此, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上并非一致连续.

【790】 证明: 函数 $f(x) = \sin x^2$ 在无穷区间 $-\infty < x < +\infty$ 上是连续的且有界, 但在此区间内并非一致连续.

证 由基本初等函数在其定义域内的连续性知, $f(x) = \sin x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $|\sin x^2| \leq 1$, 即 $f(x)$ 有界. 现证 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不一致连续.

考虑 $(-\infty, +\infty)$ 内的两个点列

$$x_n = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}, \quad x'_n = \sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则当 $0 < \varepsilon_0 < 1$ 时, 对任给的 $\delta > 0$, 只要 n 充分大时, 总有

$$|x_n - x'_n| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}} + \sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}} < \delta.$$

但是 $|f(x_n) - f(x'_n)| = 1 > \varepsilon_0$,

因此, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不一致连续.

【791】 证明: 如果函数 $f(x)$ 在域 $a \leq x < +\infty$ 内有定义并且是连续的, 且存在有限的 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 则 $f(x)$ 在此域内是一致连续的.

证 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $R > a$, 使得当 $x > R$ 时,

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而, 当 $x' > R, x'' > R$ 时

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon,$$

又由于 $f(x)$ 在 $[a, R+1]$ 上连续, 从而 $f(x)$ 在 $[a, R+1]$ 上一致连续. 故对于上面给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得当

$$x' \in [a, R+1], \quad x'' \in [a, R+1],$$

且 $|x' - x''| < \delta_1$ 时,

恒有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

令 $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$.

设 $x', x'' \in [a, +\infty)$,

且 $|x' - x''| < \delta$,

从而 x', x'' 或者同时属于 $[a, R+1]$, 或者同时满足 $x' > R, x'' > R$. 因此, 恒有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$, 故 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

【792】 证明: 无界函数 $f(x) = x + \sin x$ 在全轴 $-\infty < x < +\infty$ 上是一致连续的.

证 因为

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= |(x' - x'') + (\sin x' - \sin x'')| \\ &\leq |x' - x''| + |\sin x' - \sin x''| \leq 2|x' - x''|, \end{aligned}$$

对于任给的 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\epsilon}{2} > 0$,

则当 $x', x'' \in (-\infty, +\infty)$, 且 $|x' - x''| < \delta$ 时,

恒有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

【793】 函数 $f(x) = x^2$ 在以下区间是一致连续的吗?

(1) $(-l, l)$, 此处 l 是任意大的正数;

(2) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内.

解 (1) 当 $x', x'' \in (-l, l)$ 时,

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= |x' + x''| |x' - x''| \\ &\leq 2l |x' - x''|, \end{aligned}$$

故对任给的 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\epsilon}{2l}$, 则当 $x', x'' \in (-l, l)$, 且 $|x' - x''| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$, 故 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 上一致连续.

(2) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上, 对于 $\epsilon_0 = 1$, 考虑两点列

$$x_n = n, x'_n = n + \frac{1}{n},$$

则对于任意的 $\delta > 0$, 当 $n > \frac{1}{\delta}$ 时, $|x'_n - x_n| = \frac{1}{n} < \delta$.

但是 $|f(x'_n) - f(x_n)| = 2 + \left(\frac{1}{n}\right)^n > \epsilon_0$,

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上非一致连续.

研究以下函数在指定域内的一致连续性(794 ~ 800).

【794】 $f(x) = \frac{x}{4-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1).$

解 $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 从而 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上一致连续.

【795】 $f(x) = \ln x \quad (0 < x < 1).$

解 取

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2} \ln 2,$$

考虑点列 $x_n = \frac{1}{n}, x'_n = \frac{1}{2n} \quad (n = 2, 3, \dots),$

对于任给的 $\delta > 0$, 当 $n > \frac{1}{2\delta}$ 时, $|x_n - x'_n| = \frac{1}{2n} < \delta$.

但是 $|f(x_n) - f(x'_n)| = \ln 2 > \epsilon_0$,

因此, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内非一致连续.

【796】 $f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (0 < x < \pi).$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\text{定义函数 } F(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

显然 $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 因而 $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上一致连续. 因此 $f(x)$ 也在 $(0, \pi)$ 上一致连续.

$$\text{【797】 } f(x) = e^x \cos \frac{1}{x} \quad (0 < x < 1).$$

解 取 $\varepsilon_0 = 1$.

$$\text{令 } x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi},$$

$$x'_n = \frac{1}{n\pi} \quad (n \text{ 为正整数}),$$

则 x_n 及 x'_n 均属于 $(0, 1)$. 对任意给定的 $\delta > 0$, 当 $n > \sqrt{\frac{1}{2\pi\delta}}$ 时,

$$\text{总有 } |x_n - x'_n| = \frac{1}{(2n+1)n\pi} < \frac{1}{2\pi n^2} < \delta.$$

但是 $|f(x_n) - f(x'_n)|$

$$\begin{aligned} &= \left| e^{\frac{2}{(2n+1)\pi}} \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - e^{\frac{1}{n\pi}} \cos n\pi \right| \\ &= e^{\frac{1}{n\pi}} > 1 = \varepsilon_0, \end{aligned}$$

因此, $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上非一致连续.

$$\text{【798】 } f(x) = \arctan x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

解 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 及 $[0, +\infty)$ 上连续, 并且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

由 791 题知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 及 $[0, +\infty)$ 上均一致连续. 于是, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1(\varepsilon) > 0$, 当 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta_1(\varepsilon)$ 时, 恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

成立. 又存在 $\delta_2(\varepsilon) > 0$, 当 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta_2(\varepsilon)$ 时, 恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

成立. 现取 $\delta = \delta(\varepsilon) = \min\{1, \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$,

则当 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, x_1 与 x_2 必或同时属于 $(-\infty, 1]$, 或同时属于 $[0, +\infty)$, 故恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

因此, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

【799】 $f(x) = \sqrt{x} \quad (1 \leq x < +\infty).$

解 因为, 当 $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1$ 时, 有

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \left| \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{2}.$$

于是, 对于任给的 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = 2\epsilon$, 则当 $|x_1 - x_2| < \delta$, 且 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ 时, 恒有 $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \frac{1}{2}\delta = \epsilon$,

因此, $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续.

【800】 $f(x) = x \sin x \quad (0 \leq x < +\infty).$

解 在 $[0, +\infty)$ 区间上选取两点列

$$x_n = 2n\pi, \quad x'_n = 2n\pi + \frac{1}{n},$$

则 $|x'_n - x_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty),$

而 $|f(x'_n) - f(x_n)| = \left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{1}{n}$
 $= 2n\pi \sin \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}.$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} = 0,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n\pi \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 2\pi,$$

所以 $|f(x'_n) - f(x_n)| \rightarrow 2\pi (n \rightarrow \infty).$

现取 $\epsilon_0 = \pi$, 于是, 不论 $\delta > 0$ 取得多么小, 只要 n 充分大, 总有

$$|x'_n - x_n| = \frac{1}{n} < \delta.$$

但 $|f(x'_n) - f(x_n)| > \pi = \epsilon_0,$

因此, $f(x) = x \sin x$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上不是一致连续的.

【801】 证明: 函数 $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$

在区间 $J_1 = (-1 < x < 0)$ 和 $J_2 = (0 < x < 1)$ 内分别一致连续,但在它们的和

$$J_1 + J_2 = \{0 < |x| < 1\}$$

上并非一致连续.

证 在 $J_1 = (-1, 0)$ 上

$$f(x) = -\frac{\sin x}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1,$$

且 $f(x) = -\frac{\sin x}{x}$,

在 $(-\infty, 0]$ 上连续,所以定义

$$F(x) = \begin{cases} -1, & x = 0, \\ -\frac{\sin x}{x}, & -1 \leq x < 0, \end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上连续,从而一致连续,因而 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上一致连续. 同理, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上也一致连续. 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-\sin x}{x} = -1,$$

故必存在 $\eta > 0$ ($\eta < 1$), 使当

$$0 < x_1 < \eta, \quad -\eta < x_2 < 0$$

时,有 $|f(x_1) - f(x_2)| > 1$.

现取 $\epsilon_0 = 1$, 则不论 $\delta > 0$ 取多么小,都存在两点 x_1, x_2 , 使

$$0 < x_1 < \min\left\{\eta, \frac{\delta}{2}\right\}, \quad -\min\left\{\eta, \frac{\delta}{2}\right\} < x_2 < 0.$$

于是 $|x_1 - x_2| < \delta$,

但 $|f(x_1) - f(x_2)| > \epsilon_0$,

因此, $f(x)$ 在 $J_1 + J_2 = \{0 < |x| < 1\}$ 上不一致连续.

【801. 1】 证明: 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 中的每一个区间内一致连续, 则此函数在总和区间 $[a, b]$ 内也一致

连续.

证 因为 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上一致连续, 故对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta_1(\epsilon) > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in [a, c]$,

且 $|x_1 - x_2| < \delta_1(\epsilon)$

时, 恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$.

同样, 存在 $\delta_2(\epsilon) > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in [c, b]$, 且

$|x_1 - x_2| < \delta_2(\epsilon)$

时, 恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$,

取 $\delta = \min\{\delta_1(\epsilon), \delta_2(\epsilon)\}$,

则当 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$

时, 若 x_1, x_2 位于 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 中的同一区间, 则有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

若 x_1, x_2 位于 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 中的不同区间上, 则 c 位于 x_1 和 x_2 之间, 所以 $|x_1 - c| < \delta$, $|x_2 - c| < \delta$,

因而, 恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - c| + |f(x_2) - c|$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

因此, 当 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续.

【802】 对于 $\epsilon > 0$, 求使函数 $f(x)$ 在已知区间内满足一致连续的条件 $\delta = \delta(\epsilon)$ (任意的!), 若

$$(1) f(x) = 5x - 3 \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$(2) f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad (-2 \leq x \leq 5);$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{x} \quad (0.1 \leq x \leq 1);$$

$$(4) f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x < +\infty);$$

$$(5) f(x) = 2\sin x - \cos x \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$(6) f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

及 $f(0) = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi).$

解 (1) $|f(x_1) - f(x_2)| = 5|x_1 - x_2|,$

取 $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ 即可.

$$(2) |f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2||x_1 + x_2 - 2|,$$

由于 $-2 \leq x \leq 5,$

故 $|x_1 + x_2 - 2| \leq 8,$

于是, 取 $\delta = \frac{\epsilon}{8}$ 即可.

(3) 当 $0.1 \leq x_1 \leq 1, 0.1 \leq x_2 \leq 1$ 时,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} \leq \frac{|x_1 - x_2|}{0.01}.$$

于是, 取 $\delta = 0.01\epsilon$ 即可.

(4) 当 $a \geq 0, b \geq 0$ 时, 显然有不等式

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

成立. 对于任给的 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \epsilon^2$, 则当 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2 + \delta} \leq \sqrt{x_2} + \sqrt{\delta} = \sqrt{x_2} + \epsilon,$$

同理, 有 $\sqrt{x_2} \leq \sqrt{x_1} + \epsilon,$

即 $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \epsilon.$

$$\begin{aligned} (5) & |f(x_1) - f(x_2)| \\ & \leq 2|\sin x_1 - \sin x_2| + |\cos x_1 - \cos x_2| \\ & \leq 2|x_1 - x_2| + \left| \left(\frac{\pi}{2} - x_1 \right) - \left(\frac{\pi}{2} - x_2 \right) \right| \\ & = 3|x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

取 $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ 即可.

(6) 任给 $\varepsilon > 0$, 当 $x_1, x_2 \in \left[\frac{\varepsilon}{3}, \pi\right]$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 & |f(x_1) - f(x_2)| \\
 &= \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \\
 &= \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_1 \sin \frac{1}{x_2} + x_1 \sin \frac{1}{x_2} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \\
 &\leq |x_1| \left| \sin \frac{1}{x_1} - \sin \frac{1}{x_2} \right| + |x_1 - x_2| \left| \sin \frac{1}{x_2} \right| \\
 &\leq |x_1| \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| + |x_1 - x_2| \\
 &= \left(\frac{1}{x_2} + 1 \right) |x_1 - x_2| \leq \frac{3 + \varepsilon}{\varepsilon} |x_1 - x_2|,
 \end{aligned}$$

$$\text{取 } \delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon^2}{3 + \varepsilon} \right\},$$

设 $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$, 下面证明必有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

不妨设 $x_1 < x_2$, 若 $x_1 \geq \frac{\varepsilon}{3}$, 则 x_1, x_2 均属于 $\left[\frac{\varepsilon}{3}, \pi\right]$, 故由上面的结论有

$$\begin{aligned}
 |f(x_1) - f(x_2)| &\leq \frac{3 + \varepsilon}{\varepsilon} |x_1 - x_2| \\
 &< \frac{3 + \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon^2}{3 + \varepsilon} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

若 $0 < x_1 < \frac{\varepsilon}{3}$, 则

$$x_2 = x_2 - x_1 + x_1 < \delta + \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{2\varepsilon}{3},$$

$$\begin{aligned}
 \text{故 } |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \\
 &\leq |x_1| + |x_2| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

当 $x_1 = 0$, 则同样有 $x_2 < \frac{2\epsilon}{3}$,

所以 $|f(x_1) - f(x_2)| = \left| 0 - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \leq |x_2| < \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$.

综上所述, 当 $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

【803】 把闭区间 $[1, 10]$ 划分成多少个彼此相等的线段, 才能使函数 $f(x) = x^2$ 在这些线段中每一段上振幅都小于 0.0001?

解 设分为 n 个相等的线段, 则对于每段中的任意两点 x_1, x_2 均有 $|x_1 - x_2| \leq \frac{9}{n}$.

于是 $|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2| |x_1 - x_2|$

$$\leq \frac{(10+10)9}{n} = \frac{180}{n}.$$

按题设, 只需 $\frac{180}{n} < 0.0001$,

即 $n > 1800000$,

因此, 把 $[1, 10]$ 等分成至少为 1800000 个等长的线段, 就能满足要求.

【804】 证明: 在区间 (a, b) 内有无穷个一致连续函数的和及其乘积在此区间内仍然是一致连续的.

证 由于有无穷个函数相加或相乘可逐次分解成两个函数的相加或相乘, 故我们只需考虑两个函数的情况.

设 $f(x), g(x)$ 都在有限区间 (a, b) 上一致连续, 我们先证明.

(1) $f(x) + g(x)$. 任给 $\epsilon > 0$, 由于 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta_1$ 时, 恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$.

同样, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta_2$ 时, 恒有 $|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$,

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,

则当 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} & |[f(x_1) + g(x_1)] - [f(x_2) + g(x_2)]| \\ & \leq |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

故 $f(x) + g(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

下面我们证明

(2) $f(x) \cdot g(x)$ 在 (a, b) 上连续. 因为 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续, 故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得, 当 $x', x'' \in (a, b)$, 且

$$|x' - x''| < \delta$$

时, 恒有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

特别地, 当 $a < x' < a + \delta$, $a < x'' < a + \delta$.

时, 必有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

由柯西收敛准则, 知 $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$

存在. 同理

$$f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x),$$

$$g(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x),$$

$$g(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x),$$

存在. 故在 $[a, b]$ 区间上定义

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } a < x < b \text{ 时;} \\ f(a+0), & \text{当 } x = a \text{ 时;} \\ f(b-0), & \text{当 } x = b \text{ 时.} \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{当 } a < x < b \text{ 时;} \\ g(a+0), & \text{当 } x = a \text{ 时;} \\ g(b-0), & \text{当 } x = b \text{ 时.} \end{cases}$$

故 $F(x) \cdot G(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从而一致连续. 所以 $f(x) \cdot g(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

注:由证明知,当 (a, b) 为无穷区间时, (a, b) 上一致连续的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和 $f(x) + g(x)$ 也一致连续.但乘积 $f(x) \cdot g(x)$ 不一定一致连续.例如,设 $(a, b) = (-\infty, +\infty)$, $f(x) = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续,但

$$f(x) \cdot f(x) = x^2,$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续.

【805】 证明:如果单调有界的函数 $f(x)$ 在有穷或无穷的区间 (a, b) 内是连续的,则此函数在区间 (a, b) 内是一致连续的.

证 分三种情况讨论

(1) (a, b) 为有限区间.由于 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调有界,故

$$f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x), f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$$

均存在且为有限.

在 $[a, b]$ 上定义 $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } a < x < b \text{ 时;} \\ f(a+0), & \text{当 } x = a \text{ 时;} \\ f(b-0), & \text{当 } x = b \text{ 时.} \end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,从而一致连续,当然在 (a, b) 上也一致连续.故 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

(2) a, b 中一个为有限数,一个为无穷大.不妨设 a 为有限数, $b = +\infty$ (b 为有限数, $a = -\infty$ 的情况,可类似地证明).因为 $f(x)$ 为单调有界的函数,故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.所以,在 $[a, +\infty)$ 上定义

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } a < x < +\infty \text{ 时,} \\ f(a+0), & \text{当 } x = a \text{ 时,} \end{cases}$$

故 $F(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续,且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

存在并为有限数.

由791题的结果知, $F(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续,从而 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上一致连续.

(3) $a = -\infty, b = +\infty$.任给 $\epsilon > 0$,由(2)的结果知, $f(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 上一致连续, 故存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $x', x'' \in (0, +\infty)$, 且 $|x' - x''| < \delta_1$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

同样, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上一致连续, 故存在 $\delta_2 > 0$, 使得, 当 $x', x'' \in (-\infty, 1)$, 且 $|x' - x''| < \delta_2$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$,

则当 $|x' - x''| < \delta$,

时, x', x'' 必或者同属于区间 $(0, +\infty)$, 或者同属于区间 $(-\infty, 1)$, 因此, 恒有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$,

因此, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

【806】 证明: 如果函数 $f(x)$ 在有穷区间 (a, b) 内是一致连续的, 则存在极限 $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ 和 $B = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$.

问此定理对于无穷区间 (a, b) 是正确的吗?

证 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 上一致连续, 故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x', x'' \in (a, b)$, 且 $|x' - x''| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon_0,$$

特别, 当 $a < x' < a + \delta, a < x'' < a + \delta$, 时,

恒有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon_0$.

由柯西收敛准则

$$A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ 存在.}$$

同理 $B = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ 存在.

此定理对无穷区间不成立. 例如 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续, 但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ 及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ 均不存在.

【806. 1】 证明: 在有穷区间 (a, b) 内有定义且连续的函数 $f(x)$, 能用连续的方式延续到闭区间 $[a, b]$ 上, 其必要和充分的条件是函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是一致连续的.

证 必要性: 若 $f(x)$ 能用连续的方法延拓到闭区间 $[a, b]$

上,则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,从而一致连续,所以在 (a, b) 上也是一致连续的.

充分性:若 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续,根据 806 题结果知,

$$f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x),$$

与
$$f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x),$$

存在且为有限值,故在 $[a, b]$ 上定义 $F(x)$ 为

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } a < x < b \text{ 时;} \\ f(a+0), & \text{当 } x = a \text{ 时;} \\ f(b-0), & \text{当 } x = b \text{ 时.} \end{cases}$$

显然, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 上 $F(x) = f(x)$, 即 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的连续延拓.

【807】 函数 $\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|$, 称作函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的连续模数. (其中 x_1 和 x_2 是 (a, b) 中受条件 $|x_1 - x_2| \leq \delta$ 限制的任意两点).

证明:函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内一致连续性的必要且充分条件是 $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_f(\delta) = 0$.

证 必要性:设 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续,任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $|x_1 - x_2| < \eta$ 时, 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现设 $0 < \delta < \eta$, 则当 $|x_1 - x_2| \leq \delta$ 时, 必有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而 $\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$,

即 $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_f(\delta) = 0$.

充分性:因为 $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_f(\delta) = 0$,

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得当 $0 < \delta < \eta$ 时, 恒有

$$\omega_f(\delta) < \epsilon.$$

现设 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且满足 $|x_1 - x_2| < \eta$.

若 $x_1 = x_2$, 则显然

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 0 < \epsilon,$$

若 $x_1 \neq x_2$, 令

$$\delta_1 = |x_1 - x_2|,$$

则 $0 < \delta_1 < \eta$.

于是 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega_f(\delta_1) < \epsilon$,

因此, $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

【808】 若

$$(1) f(x) = x^3 \quad (0 \leq x \leq 1);$$

$$(2) f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x \leq a) \text{ 及 } (a < x < +\infty);$$

$$(3) f(x) = \sin x + \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

对函数 $f(x)$ 的连续模数 $\omega_f(\delta)$ (参阅上题) 作以下形式的估计:

$$\omega_f(\delta) \leq C\delta^a$$

其中 C 和 a 都是常数,

解 (1) 当 $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$

且 $|x_1 - x_2| < \delta$,

$$\text{时 } |x_1^3 - x_2^3| = |x_1 - x_2| |x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2| \leq 3\delta.$$

于是 $\omega_f(\delta) \leq 3\delta$.

$$(2) \text{ 由于 } \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0).$$

当 $0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq a$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时,

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|} \leq \sqrt{\delta}.$$

于是 $\omega_f(\delta) \leq \sqrt{\delta}$.

当 $a < x_1 < +\infty, a < x_2 < +\infty$,

$$\text{且 } |x_1 - x_2| < \delta \text{ 时, } |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{\delta}{2\sqrt{a}}.$$

于是 $\omega_f(\delta) \leq \frac{\delta}{2\sqrt{a}}$

(3) 因为 $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned} \text{故 } |f(x_1) - f(x_2)| &= \sqrt{2} \left| \sin\left(x_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x_2 + \frac{\pi}{4}\right) \right| \\ &= \sqrt{2} \cdot 2 \left| \cos \frac{x_1 + x_2 + \frac{\pi}{2}}{2} \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \\ &\leq \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{2} \leq \sqrt{2}\delta. \end{aligned}$$

于是 $\omega_f(\delta) \leq \sqrt{2}\delta$.

§ 10. 函数方程

【809】 证明:对于 x 和 y 的所有实数值满足方程式:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad ①$$

的唯一的连续函数 $f(x) (-\infty < x < +\infty)$ 为齐次线性函数:

$$f(x) = ax.$$

其中: $a = f(1)$ 是任意的常数.

证 先证:对任何有理数 C , 必有

$$f(Cx) = Cf(x).$$

事实上,当 m 与 n 为正整数时

$$\begin{aligned} f(mx) &= f(x + (m-1)x) = f(x) + f((m-1)x) \\ &= f(x) + f(x) + f((m-2)x) = \cdots \\ &= f(x) + f(x) + \cdots + f(x) = mf(x), \end{aligned}$$

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right),$$

所以 $f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x).$

于是 $f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x)$,

又在①中令 $y = 0$, 有

$$f(x) = f(x) + f(0).$$

于是 $f(0) = 0$,

从而有 $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$,

所以 $f(-x) = -f(x)$.

于是 $f\left(-\frac{m}{n}x\right) = -f\left(\frac{m}{n}x\right) = -\frac{m}{n}f(x)$,

因此, 对任何有理数 C , 都有

$$f(Cx) = Cf(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

若 C 为无理数, 则存在一有理数序列 C_n , 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C.$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n x = Cx \quad (-\infty < x < +\infty)$.

由 $f(x)$ 的连续性, 有

$$f(Cx) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(C_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n f(x) = Cf(x),$$

因而, 即对任何实数 C 都

$$f(Cx) = Cf(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

因此, 对任何实数 x , 有

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = ax,$$

其中 $a = f(1)$.

【810】 证明: 满足方程式①的单调函数 $f(x)$ 是齐次线性函数.

证 由 809 题的证明知: 对任何有理数 C , 有

$$f(Cx) = Cf(x).$$

且 $f(0) = 0$.

下面, 利用 $f(x)$ 的单调性证明上式对任何无理数 C 也成立. 我们不妨设 $f(x)$ 为单调增加的, 设 C 为无理数, 要证明 $f(Cx) = Cf(x) (-\infty < x < +\infty)$. 当 $x = 0$, 时, 显然成立, 下面我们只讨

论 $x > 0$ 的情形 ($x < 0$ 时可类似地讨论). 取两串有理数 $\{r_n\}$ 及 $\{r'_n\}$ 使

$$r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < C < \cdots < r'_3 < r'_2 < r'_1,$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r'_n = C$.

由于 $x > 0$, 故

$$r_1 x < r_2 x < r_3 x < \cdots < Cx < \cdots < r'_3 x < r'_2 x < r'_1 x,$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n x = \lim_{n \rightarrow \infty} r'_n x = Cx$.

由于 $f(x)$ 是单调增加的, 故在点 Cx 的左, 右极限存在, 并且

$$\text{有 } f(Cx - 0) \leq f(Cx) \leq f(Cx + 0).$$

$$\text{而 } f(r_n x) = r_n f(x), f(r'_n x) = r'_n f(x),$$

$$\text{因此 } f(Cx - 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n x) = Cf(x),$$

$$f(Cx + 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r'_n x) = Cf(x),$$

$$\text{故 } f(Cx) = Cf(x),$$

故对任何实数 C 及 x 都有

$$f(Cx) = Cf(x).$$

$$\text{从而 } f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = ax,$$

其中 $a = f(1)$.

【811】 证明: 满足方程式①并在某小区间 $(-\epsilon, \epsilon)$ 有界的函数 $f(x)$ 是线性齐次函数.

证 由 809 题的证明知, 对任何有理数 C 有

$$f(Cx) = Cf(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

下面我们证明对于任何无理数 C , 上式也成立. 反设存在无理数 C_0 及某实数 x_0 , 使

$$f(C_0 x_0) \neq C_0 f(x_0).$$

$$\text{令 } f(C_0 x_0) - C_0 f(x_0) = \alpha.$$

则 $\alpha \neq 0$.

现选取一有理数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = C_0$.

于是, 对任何正整数 m , 有

$$\begin{aligned}
 f[m(C_0 - r_n)x_0] &= mf[(C_0 - r_n)x_0] \\
 &= m[f(C_0x_0) - f(r_nx_0)] \\
 &= m(C_0 - r_n)f(x_0) + m\alpha \\
 &\quad (n = 1, 2, 3, \dots; m = 1, 2, 3, \dots).
 \end{aligned}$$

任给 $M > 0$, 先取定一正整数 m , 使 $m > \frac{2M}{|\alpha|}$ 对此固定的 m , 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(C_0 - r_n)x_0 = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(C_0 - r_n)f(x_0) = 0,$$

故可取一个充分大的正整数 n , 使

$$\begin{aligned}
 |m(C_0 - r_n)x_0| &< \epsilon, \\
 |m(C_0 - r_n)f(x_0)| &< M,
 \end{aligned}$$

$$\text{令 } \bar{x} = m(C_0 - r_n)x_0.$$

于是 $\bar{x} \in (-\epsilon, \epsilon)$, 并且

$$\begin{aligned}
 |f(\bar{x})| &\geq m|\alpha| - |m(C_0 - r_n)f(x_0)| \\
 &> 2M - M = M.
 \end{aligned}$$

由 $M > 0$ 的任意性, 即知 $f(x)$ 在 $(-\epsilon, \epsilon)$ 内无界, 与假设矛盾. 故对任何无理数 C , 有 $f(Cx) = Cf(x)$.

由 809 题的证明, 即可得结论.

【812】 证明: 对 x 和 y 的所有值满足方程

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (2)$$

的唯一不恒等于 0 的连续函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是指数函数: $f(x) = a^x$, 其中 $a = f(1)$ 为正常数.

证 法一: 我们首先证明 $f(x) > 0$ ($-\infty < x < +\infty$). 事实上, 由 $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$ 知 $f(x) \geq 0$.

由于 $f(x) \not\equiv 0$, 故存在 x_0 , 使 $f(x_0) > 0$. 再由

$$f(x_0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)f(0),$$

可得 $f(0) = 1$,

从而对任何实数 x , 有

$$1 = f(0) = f[x + (-x)] = f(x) \cdot f(-x).$$

故 $f(x) \neq 0$,

因此 $f(x) > 0$,

且 $f(-x) = [f(x)]^{-1}$.

当 m 与 n 为正整数时,

$$\begin{aligned} f(mx) &= f((m-1)x + x) \\ &= f((m-1)x)f(x) \\ &= f((m-2)x) \cdot (f(x))^2 \\ &= \cdots = [f(x)]^m, \end{aligned}$$

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n.$$

从而 $f\left(\frac{x}{n}\right) = f(x)^{\frac{1}{n}}$.

于是 $f\left(\frac{m}{n}x\right) = \left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^m = [f(x)]^{\frac{m}{n}}$,

$$\text{又 } f\left(-\frac{m}{n}x\right) = [f(-x)]^{\frac{m}{n}} = [f(x)]^{-\frac{m}{n}}.$$

因此,对任何有理数 C ,有

$$f(Cx) = [f(x)]^C \quad (-\infty < x < +\infty).$$

对无理数 C ,可选取一有理数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$,使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = C.$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n x = Cx$.

由 $f(x)$ 及指数函数的连续性,我们有

$$f(Cx) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x)]^{r_n} = [f(x)]^C.$$

因此,对任何实数 C 及 x ,有 $f(Cx) = [f(x)]^C$.

从而 $f(x) = f(x \cdot 1) = [f(1)]^x = a^x$,

其中 $a = f(1) > 0$.

法二:根据前面的证明,有 $f(x) > 0$,令

$$F(x) = \log_a f(x),$$

这里 $a = f(1) > 0$, 于是 $F(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上连续, 并且

$$\begin{aligned} F(x+y) &= \log_a f(x+y) = \log_a f(x)f(y) \\ &= \log_a f(x) + \log_a f(y) = F(x) + F(y). \end{aligned}$$

由 809 题的结果, 知 $F(x) = Ax$

这里 $A = F(1) = \log_a f(1) = \log_a a = 1$.

从而 $F(x) = x$,

因此 $f(x) = a^x$.

【813】 证明: 在区间 $(0, \epsilon)$ 内有界并且满足方程 ② 的不恒等于 0 的函数 $f(x)$ 是指数函数.

证 由 812 题的证明知: $f(x) > 0$ ($-\infty < x < +\infty$), 并且对任何有理数 C , 有

$$f(Cx) = [f(x)]^C, f(0) = 1.$$

下面证明对任何无理数 C , 也有

$$f(Cx) = [f(x)]^C \quad (-\infty < x < +\infty),$$

反设存在某无理数 C_0 及某实数 x_0 , 使得

$$f(C_0 x_0) \neq [f(x_0)]^{C_0},$$

因为 $f(0) = 1$,

所以 $x_0 \neq 0$.

不妨设 $x_0 > 0$. 设 $\alpha = \frac{f(C_0 x_0)}{[f(x_0)]^{C_0}}$,

则 $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. 若 $\alpha > 1$, 选取一有理数列 $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 使得

$$r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < C_0,$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = C_0$.

于是对任何正整数 m , 有

$$\begin{aligned} f[m(C_0 - r_n)x_0] &= \{f[(C_0 - r_n)x_0]\}^m \\ &= f(C_0 x_0)^m \cdot f(-r_n x_0)^m \\ &= \alpha^m \cdot [f(x_0)]^{m(C_0 - r_n)}. \end{aligned}$$

对于任给的 $G > 0$, 先取定一个正整数 m , 使 $\alpha^m > 2G$. 而对于

此固定的 m 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(C_0 - r_n)x_0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_0)]^{m(C_0 - r_n)} = 1.$$

故存在一个充分大的 n , 使得

$$0 < m(C_0 - r_n)x_0 < \varepsilon, [f(x_0)]^{m(C_0 - r_n)} > \frac{1}{2}.$$

于是令 $\bar{x} = m(C_0 - r_n)x_0$,

则 $\bar{x} \in (0, \varepsilon)$, 且 $f(\bar{x}) > 2G \cdot \frac{1}{2} = G$,

故 $f(x)$ 在 $(0, \varepsilon)$ 内无界. 若 $\alpha < 1$, 则选取有理数列 $\{r'_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$r'_1 > r'_2 > r'_3 > \cdots > C_0,$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} r'_n = C_0$.

于是对任何正整数 m , 有

$$f[-m(C_0 - r'_n)x_0] = \alpha^{-m} [f(x_0)]^{-m(C_0 - r'_n)},$$

与前面一样的讨论可得到矛盾. 因此, 对任何无理数 C , 有 $f(Cx) = [f(x)]^C$.

故对任何实数 C 及 x , 有 $f(Cx) = [f(x)]^C$.

从而 $f(x) = f(x \cdot 1) = [f(1)]^x = a^x$,

这里 $a = f(1) > 0$.

【814】 证明: 对于 x 和 y 的所有正值满足方程

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

的唯一不恒等于 0 的连续函数 $f(x)$ ($0 < x < +\infty$) 是对数函数:

$f(x) = \log_a x$, 其中 a 是正数常数 ($a \neq 0$).

证 由 $f(xy) = f(x) + f(y)$,

有 $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x) + f(1)$.

从而 $f(1) = 0$, 由于 $f(x) \neq 0$, 故存在 $x_0 > 0$, 使得 $f(x_0) \neq 0$, 先考虑 $f(x_0) > 0$ 的情况. 由于

$$\begin{aligned} f(x_0^n) &= f(x_0) + f(x_0^{n-1}) = \cdots \\ &= nf(x_0) \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

由连续函数的性质知, 在 1 与 x_0^n 之间必存在 a ($a > 0$), 使得

$f(a) = 1$. 现考虑函数

$$F(x) = f(a^x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

显然 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且满足

$$\begin{aligned} F(x+y) &= f(a^{x+y}) = f(a^x \cdot a^y) \\ &= f(a^x) + f(a^y) = F(x) + F(y). \end{aligned}$$

由 809 题的结果知

$$F(x) = Ax \quad (-\infty < x < +\infty),$$

其中 $A = F(1) = f(a) = 1$,

即 $F(x) = x$.

亦即 $f(a^x) = x$.

令 $a^x = y$,

则 $x = \log_a y$,

于是 $f(y) = \log_a y \quad (0 < y < +\infty)$.

若 $f(x_0) < 0$, 则设 $g(x) = -f(x)$,

于是 $g(x_0) > 0$, 且 $g(x)$ 也满足

$$g(xy) = g(x) + g(y).$$

根据前面的证明, 有

$$g(y) = \log_{a_1} y \quad (0 < y < +\infty),$$

其中 $a_1 > 0$. 即

$$-f(y) = \log_{a_1} y,$$

或 $f(y) = -\log_{a_1} y$.

令 $a = \frac{1}{a_1}$, 则 $a > 0$, 且

$$f(y) = -\log_{a_1} y = \log_a y \quad (0 < y < +\infty).$$

【815】 证明: 对于 x 和 y 的所有正值满足方程

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (3)$$

的唯一不恒等于 0 的连续函数 $f(x)$ ($0 < x < +\infty$) 是幂函数:

$f(x) = x^a$, 其中 a 为常数.

证 设 $F(x) = f(e^x) \quad (-\infty < x < +\infty)$,

则 $F(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续, 不恒为零的函数, 并且满足

$$\begin{aligned} F(x+y) &= f(e^{x+y}) = f(e^x \cdot e^y) \\ &= f(e^x) \cdot f(e^y) = F(x) \cdot F(y). \end{aligned}$$

根据 812 题的结果, 有 $F(x) = b^x \quad (-\infty < x < +\infty)$,
其中 $b > 0$, 即 $f(e^x) = b^x \quad (-\infty < x < +\infty)$.

令 $e^x = y$, 则 $y \in (0, +\infty)$. 显然存在唯一的 $a \in (-\infty, +\infty)$, 使得 $e^a = b$, 于是

$$f(y) = b^x = e^{ax} = y^a \quad (0 < y < +\infty).$$

【816】 求对于 x 和 y 的所有实数值满足方程式 ③ 的所有连续函数 $f(x) (-\infty < x < +\infty)$.

解 因为 $f(xy) = f(x)f(y)$,

所以 $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1)$.

于是 $f(1) = 0$,

或 $f(1) = 1$.

当 $f(1) = 0$ 时, 对任于任意实数 x , 均有

$$f(x) = f(1) \cdot f(x) \equiv 0.$$

当 $f(1) = 1$ 时, 由于

$$f(1) = f(-1) \cdot f(-1) = 1.$$

所以 $f(-1) = \pm 1$.

下面分两种情况讨论:

(1) $f(-1) = 1$. 此时由于

$$f(-x) = f(-1)f(x) = f(x),$$

所以问题可以归结为讨论 $0 < x < +\infty$. 而当 $0 < x < +\infty$ 时, 由 815 题的结果有

$$f(x) = x^a \quad a \text{ 为常数.}$$

再由 $f(-x) = f(x)$, 即得

$$f(x) = |x|^a.$$

为保证 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中连续, 需 $a \geq 0$.

(2) $f(-1) = -1$. 此时有

$$f(-x) = f(-1) \cdot f(x) = -f(x).$$

同(1)一样讨论,可得

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot |x|^a \quad (a \geq 0).$$

综上所述,所求函数为:① $f(x) \equiv 0$ 或② $f(x) = |x|^a (a \geq 0)$ 或③ $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot |x|^a (a \geq 0)$.

【817】 证明:不连续函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 满足方程 ③.

证 由于 $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $f(xy) = \operatorname{sgn}(xy)$

分三种情况讨论:

(1) $xy > 0$, 此时 x 与 y 同号, 故

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = 1.$$

(2) $xy < 0$, 此时 x 与 y 异号, 故

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = -1.$$

(3) $xy = 0$, 此时, x 与 y 中, 至少有一个为零, 故

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = 0.$$

因此, 对任何实数 x, y , 均有

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y,$$

亦即函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 满足方程

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y).$$

【818】 求对于 x 和 y 的所有实数值满足方程

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

的所有连续函数 $f(x) (-\infty < x < +\infty)$.

解 易见函数 $f(x) = \cos ax$ 或 $f(x) = \operatorname{ch} ax$ 满足所给方程.

下面我们将证明满足所给方程的函数具有上述形式. 在方程

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

中, 令 $y = 0$, 得

$$2f(x) = 2f(x)f(0).$$

若 $f(x) \not\equiv 0$,

则 $f(0) = 1$.

又令 $x = 0$, 得

$$f(y) + f(-y) = 2f(y).$$

从而 $f(-y) = f(y)$.

由 $f(x)$ 的连续性, 知存在 $C > 0$, 使得当 $x \in [0, C]$ 时, $f(x) > 0$, 设 $f(C) = a$. 下面分两种情况来讨论:

(1) $0 < a \leq 1$, 此时存在 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 使得

$$f(C) = a = \cos \theta.$$

从而 $f(2C) = 2[f(C)]^2 - f(0)$

$$= 2\cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta,$$

$$f(3C) = 2f(2C)f(C) - f(C)$$

$$= 2\cos 2\theta \cdot \cos \theta - \cos \theta = \cos 3\theta.$$

利用数学归纳法可得, 对一切自然数 n , 均有

$$f(nC) = \cos n\theta,$$

又 $\left[f\left(\frac{1}{2}C\right)\right]^2 = \frac{1}{2}[f(C) + f(0)]$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) = \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

由于 $f\left(\frac{1}{2}C\right) > 0$, 故取正根, 得

$$f\left(\frac{1}{2}C\right) = \cos \frac{\theta}{2}.$$

利用数学归纳法可得, 对于一切正整数 n , 均有

$$f\left(\frac{1}{2^n}C\right) = \cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right).$$

重复利用上面的推理过程, 可得对任何自然数 m 和 n , 有

$$f\left(\frac{m}{2^n}C\right) = \cos\left(\frac{m}{2^n}\theta\right),$$

因此, 对任何形如 $\frac{m}{2^n}$ 的正实数 x_n , 有

$$f(Cx_n) = \cos(\theta x_n).$$

由实数的二进制知,任一正实数皆可表为 $\frac{m}{2^n}$ 型数列的极限,
故由 $f(x)$ 的连续性知,对任一正实数

$$f(Cx) = \cos(\theta x). \quad ①$$

由于 $f(-y) = f(y)$,故当 $x < 0$ 时,①式也成立.当 $x = 0$ 时,①式显然成立.因此,对任何实数 x 均有

$$f(Cx) = \cos(\theta x).$$

$$\text{令 } Cx = y, a = \frac{\theta}{C},$$

$$\text{则 } f(y) = \cos ay.$$

(2) $a > 1$,此时,存在 θ 使得 $f(C) = a = \operatorname{ch}\theta$.

根据双曲余弦的关系式,重复上面的推理过程,可得

$$f(x) = \operatorname{ch} ax.$$

综上所述,所求函数为

$$f(x) \equiv 0,$$

$$\text{或 } f(x) = \cos ax,$$

$$\text{或 } f(x) = \operatorname{ch} ax.$$

【819】 求对于 x 和 y 的所有实数值满足方程组

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y),$$

$$g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

及

$$f(0) = 1 \text{ 且 } g(0) = 0$$

的一切有界连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ ($-\infty < x < +\infty$).

提示:研究函数

$$F(x) = f^2(x) + g^2(x).$$

解 设 $F(x) = f^2(x) + g^2(x)$,

$$\begin{aligned} \text{则 } F(x+y) &= f^2(x+y) + g^2(x+y) \\ &= [f(x)f(y) - g(x)g(y)]^2 \\ &\quad + [f(x)g(y) + f(y)g(x)]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [f^2(x) + g^2(x)][f^2(y) + g^2(y)] \\
 &= F(x)F(y).
 \end{aligned}$$

由于 $F(0) = 1$, 及 $F(x) \neq 0$, 故由 812 题的结果有

$$F(x) = a^x \quad (-\infty < x < +\infty),$$

其中 $a = F(1) > 0$.

由于 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有界, 故 $F(x)$ 有界, 从而 $a = 1$. 因此, 对于一切实数 x , 有 $f^2(x) + g^2(x) = 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{又} \quad 0 &= g(0) = g(x-x) \\
 &= f(x)g(-x) + f(-x)g(x), \\
 1 &= f(0) = f(x-x) \\
 &= f(x)f(-x) - g(x)g(-x),
 \end{aligned}$$

上面两式分别乘以 $g(-x)$ 及 $f(-x)$, 然后相加得

$$f(-x) = f(x)[g^2(-x) + f^2(-x)] = f(x).$$

如果上面两式分别乘以 $f(-x)$ 及 $g(-x)$, 然后相减, 则得

$$g(-x) = -g(x)[g^2(-x) + f^2(-x)] = -g(x).$$

$$\begin{aligned}
 \text{从而有} \quad &f(x+y) + f(x-y) \\
 &= f(x)f(y) - g(x)g(y) + f(x)f(-y) - g(x)g(-y) \\
 &= 2f(x)f(y).
 \end{aligned}$$

于是由 818 题的结果及 $f(x)$ 的有界性得

$$f(x) = \cos ax,$$

$$\text{再由} \quad f^2(x) + g^2(x) = 1,$$

$$\text{可得} \quad g(x) = \pm \sin ax.$$

【820】 假设: $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$\text{和} \quad \Delta^2 f(x) = \Delta\{\Delta f(x)\}$$

分别是一阶和二阶函数 $f(x)$ 的有限差.

证明: 如果函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是连续的且

$$\Delta^2 f(x) \equiv 0,$$

则此函数为线性函数, 即 $f(x) = ax + b$.

其中 a 和 b 都是常数.

证 由 $\Delta^2 f(x) \equiv 0$, 得

$$\begin{aligned} f(x + \Delta_1 x + \Delta_2 x) - f(x + \Delta_2 x) \\ \equiv f(x + \Delta_1 x) - f(x). \end{aligned}$$

令 $x = 0$, 得

$$f(\Delta_1 x + \Delta_2 x) - f(\Delta_2 x) = f(\Delta_1 x) - f(0).$$

令 $\Delta_2 x = n\Delta_1 x$, 得

$$f[(n+1)\Delta_1 x] - f(n\Delta_1 x) \equiv f(\Delta_1 x) - f(0).$$

由数学归纳法可得

$$f[(n+1)\Delta_1 x] - f(0) \equiv (n+1)[f(\Delta_1 x) - f(0)].$$

从而有 $f(\Delta_1 x) - f(0) = \frac{1}{n}[f(n\Delta_1 x) - f(0)]$,

特别地, 令 $\Delta_1 x = \frac{1}{n}$, 有

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) &= \frac{1}{n}[f(1) - f(0)] \\ f\left(\frac{m}{n}\right) - f(0) &= m\left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right] \\ &= \frac{m}{n}[f(1) - f(0)], \end{aligned}$$

所以 $f\left(\frac{m}{n}\right) = a\frac{m}{n} + b$,

其中 $a = f(1) - f(0)$, $b = f(0)$.

于是对任何有理数 x , 均有 $f(x) = ax + b$.

利用 $f(x)$ 的连续性, 可得上式对任何无理数 x 也成立. 事实上, 设 x 为无理数, 则存在一系列有理数 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$, 由 $f(x)$ 的连续性知

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (ar_n + b) = ax + b,$$

因此, 对于一切实数 x , 均有 $f(x) = ax + b$.